

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(3), 203-211(2016)

DOI: <http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.3.203>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

자동조종장치 동역학을 고려한 궤환 형태의 BTT 미사일용 최적 종말 유도 법칙

유성재*, 홍진우**, 하인중***

A Feedback-Form of Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles Considering Autopilot Dynamics

Seong-Jae Yoo*, Jin-Woo Hong** and In-Joong Ha***

ASRI/Dept. of Electrical and Computer Engineering, Seoul National University* ,***

Samsung Electronics Co., Ltd.**

ABSTRACT

In contrast with STT missiles, the guidance law design for BTT missiles should be based on 3-dimensional pursuit kinematics, since the pitch and roll channels of BTT missiles are coupled dynamically. More generally than the prior works, the dynamics of pitch and roll channels, as well as 3-dimensional pursuit kinematics are considered in the design of our terminal-phase optimal guidance law for BTT missiles proposed in this paper. Thereby, the proposed optimal guidance law guarantees high capturability with small miss distance without significant performance degradation due to time-lag effect even in case of relatively slow autopilot dynamics. Moreover, the resulting optimal guidance law is expressed explicitly in feedback-form with the coefficients given as the functions of time-to-go. The effectiveness and practicality of our work is demonstrated through various simulation results.

초 록

BTT 미사일은 STT 미사일과 달리 피치와 롤 채널이 동역학적으로 결합되어 있기 때문에 유도 법칙 개발 시 3차원 추적 기하학을 고려하여야 한다. 기존 연구결과들과는 달리 본 논문에서는 3차원 추적 기하학뿐만 아니라 자동조종장치의 피치와 롤 채널 동역학을 모두 고려한 BTT 미사일의 최적 종말 유도 법칙을 제안한다. 그 결과, 제안하는 유도 법칙은 상대적으로 느린 자동조종장치 동역학에서도 시간 지연 효과로 인한 성능 하락 없이 작은 요격 오차의 높은 요격 성능을 보장한다. 또한, 제안하는 최적 유도 법칙은 잔여 비행시간의 함수를 계수로 하는 궤환 형태로 구해진다. 끝으로 다양한 요격 상황에서의 모의실험을 통해 그 성능을 입증한다.

Key Words : BTT Missile(BTT 미사일), Optimal Guidance Law(최적 유도 법칙), Autopilot Dynamics(자동조종장치 동역학), 3-D Pursuit Kinematics(3차원 추적 기하학)

† Received : October 14, 2015

Revised : February 3, 2016

Accepted : February 20, 2016

*** Corresponding author, E-mail : ijha@snu.ac.kr

I. 서 론

BTT(bank-to-turn) 미사일은 STT(skid-to-turn) 미사일에 비해 설계 구조의 제약이 적고 공기 흡입 추진 기관 탑재가 가능해 전술적 장거리 운항에 용이하다는 장점이 있다[1]. 하지만 BTT 미사일용 고성능 유도 법칙은 설계 시 다음을 필히 고려해야 하기 때문에 그 개발에 어려움이 따른다. 우선, BTT 미사일의 유도 법칙은 3차원 추적 기하학을 고려해 개발해야 한다. STT 미사일은 기동에 있어 피치(pitch)와 요(yaw) 채널이 독립적으로 작용하므로 2차원 평면상에서의 추적 기하학만을 고려하여 유도 법칙을 개발할 수 있다. 그러나 피치 가속도와 롤(roll) 회전의 복합작용만을 이용하여 기동하는 BTT 미사일은 피치와 롤 운동이 역학적으로 결합(coupling) 되어 있어 2차원 추적 기하학만을 고려하여 개발한 유도 법칙을 바로 적용하기에는 적합하지 않다. 또한, 이와 같은 기동 방식으로 인하여 BTT 미사일은 STT 미사일에 비하여 가속도 응답에 지연이 나타나는데 이는 요격 성능 하락의 큰 요인이 된다. 따라서 BTT 미사일의 유도 법칙은 자동조종장치 동역학을 고려해 개발해야 한다.

고전적인 미사일 유도 법칙에는 대표적으로 널리 알려진 비례 항법 유도(proportional navigation guidance, PNG) 법칙을 꼽을 수 있다[2]. 그러나 PNG는 자동조종장치 동역학이 그 영향을 무시할 수 있을 만큼 빠르다는 가정 하에 개발된 유도 법칙으로 실제 BTT 미사일에 적용할 경우에는 자동조종장치 동역학으로 인한 시간 지연 효과로 인해 요격 성능이 저하된다. 이러한 문제점을 개선하기 위해 최적 유도 법칙이 개발되었다. [3]에서는 자동조종장치 동역학을 1차원 선형 시불변(linear time-invariant) 시스템으로 표현할 경우 요격 성능을 향상시킬 수 있음을 보였다. 또한, 표적이 요격 오차(miss distance)를 최소화하도록 기동할 때 이를 게임 이론을 통해 자동조종장치 동역학을 고려하며 효과적으로 요격하는 유도 법칙이 개발 되었다[4]. [5]에서는 미사일의 가속도가 제한되는 실제 상황에 맞춰 확률적 최적 유도 법칙을 통해 표적을 요격하는 방법이 제시되었으며, [6]에서는 가변구조 제어기(sliding-mode controller)를 이용하여 자동조종장치와 유도법칙을 동시에 개발하였다.

최근에는 효과적인 표적 요격을 위하여 요격 오차만이 아니라 추가로 여러 요소를 같이 고려하는 유도 법칙이 개발되었다. [7]에서는 요격 시 미사일이 표적을 원하는 충돌각으로 요격하는 유

도 법칙을 미사일의 가속도와 같은 물리적 제한을 고려하여 PNG를 기반으로 개발하였다. 또한, 가변구조 제어를 통해 정지해 있거나 등속 운동하는 표적에 대하여 요격하는 시간을 조정하는 유도 법칙도 개발되었다[8]. 하지만 이상의 연구 결과들[2-8]은 모두 2차원 평면에서의 추적 기하학만을 고려한 결과들로 피치와 롤 운동을 모두 고려해야 하는 BTT 미사일의 유도 법칙으로는 적합하지 않다.

한 편, 3차원 추적 기하학을 고려하여 요격 오차와 피치 가속도, 롤 각 변화율의 에너지를 최적화 하는 유도 법칙이 개발되었다[9]. 그러나 이 결과[9]는 롤 각 변화율의 동역학은 충분히 빠르다고 가정하여 그 영향을 무시한 채, 피치 가속도 동역학만을 1차 시불변 시스템으로 가정하고 개발한 결과이다.

본 논문에서는 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학을 고려한 BTT 미사일의 최적 종말 유도 법칙을 제안한다. 제안한 유도 법칙은 잔여 비행시간(time-to-go)의 함수를 계수로 하는 시변 상태 궤환 형태로 정리할 수 있다. 끝으로, 다양한 모의실험을 통해 제안한 유도 법칙의 우수한 성능을 입증한다. 모의실험은 자동조종장치 동역학, 구동기 동역학, 미사일 동역학, 3차원 추적 기하학 등의 비선형성을 근사 없이 모두 고려하여 가능한 실제 전장에서의 요격 상황을 그대로 반영하여 진행되었다.

II. 본 론

2.1 최적 유도 문제 설정

3차원 공간에서 미사일과 표적의 기하학적 관계를 도식화하면 Fig. 1과 같다. 여기서 (X_I, Y_I, Z_I) , (X_M, Y_M, Z_M) , (X_T, Y_T, Z_T) 는 각각 관성 좌표계, 미사일 동체 좌표계, 표적 좌표계를 뜻한다. 이 때, 관성 좌표계는 종말 유도가 시작

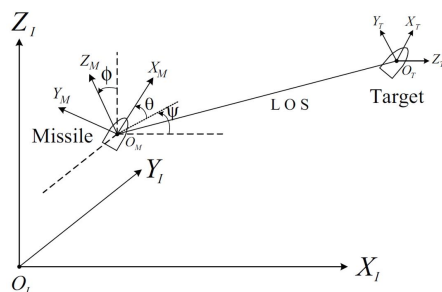


Fig. 1. 3-Dimensional Pursuit Kinematics

되는 시간 $t=0$ 에서의 미사일 동체 좌표계로 정의한다. 미사일 동체 좌표계의 원점 O_M 은 미사일 동체의 무게 중심과 일치 시키며 좌표축 X_M 은 미사일의 진행 방향과 일치 시키고, 이의 수직 방향을 좌표축 Z_M 으로 하여 이 축에 대한 미사일 가속도 성분을 피치 가속도 A_z 라고 한다. 또한, θ, ψ, ϕ 는 각각 미사일의 피치, 요, 롤 각을 뜻한다. x_M, y_M, z_M 과 x_T, y_T, z_T 는 각각 관성 좌표계에서 각 축에 대한 미사일과 표적의 위치 성분을 나타내며 $A_{M_x}, A_{M_y}, A_{M_z}$ 와 $A_{T_x}, A_{T_y}, A_{T_z}$ 는 각각 미사일의 가속도 A_M 과 표적의 가속도 A_T 를 관성 좌표계에서 각 축에 대한 가속도 성분으로 나타낸 것이다.

[10]에서는 3차원 추적 기하학을 기술하였는데 이는 매우 복잡한 형태의 비선형 방정식으로 표현된다. 하지만 중간 유도 단계까지 미사일이 표적을 향해 잘 유도 되었으며 일반적으로 종말 유도 단계에서는 미사일과 표적의 접근 속도가 일정하다는 가정에서 다음과 같이 단순화하여 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= A_{T_y} + A_z \sin \phi \\ \ddot{z} &= (A_{T_z} + g) - A_z \cos \phi\end{aligned}\quad (1)$$

이 때, g 는 중력 가속도를 뜻하며, y, z 는 각각 $y \triangleq y_M - y_T$, $z \triangleq z_M - z_T$ 으로 정의된다.

한 편, BTT 미사일 시스템은 고차의 비선형성을 띠고 제어 편각(control fins)으로부터 미사일 가속도까지의 입출력 동특성이 비최소위상(nonminimum phase)의 특성을 갖는 것으로 알려져 있다. 이에 [11]에서는 유사 특이 섭동 기법을 바탕으로 BTT 미사일의 비최소위상 특성을 포함해 모든 비선형성을 고려한 자동조종 제어기를 개발하였다. 이를 통해 롤 채널과 피치 채널 간의 결합성을 없애고 자동조종장치 동역학의 입출력 특성이 비행조건에 무관하게 선형 시불변 시스템으로 표시 가능하게 되었다. 따라서 [11]에서 제안한 비선형 자동조종 제어기를 적용한다고 할 때, 자동조종장치의 롤 채널과 피치 채널의 동역학을 다음과 같은 간단한 1차 선형 시스템으로 근사하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -k_\phi \phi + k_\phi \phi^c \\ \dot{A}_z &= -k_a A_z + k_\phi A_z^c\end{aligned}\quad (2)$$

이 때, k_ϕ, k_a 는 각각 롤과 피치 채널의 대역폭을 뜻한다.

이제 최적 유도 문제를 기술한다. 종말 유도가 시작되는 시점의 시간을 $t=0$ 으로 두고 요격 시간을 $t=t_f$ 라고 한다. 이에 다음과 같은 목적 함수 J 를 정의한다.

$$\begin{aligned}J &\triangleq \frac{1}{2} [|y(t_f)|^2 + |z(t_f)|^2] \\ &+ \int_0^{t_f} (w_1 |A_z^c(\tau)|^2 + w_2 |\phi^c(\tau) - \bar{\phi}|^2) d\tau\end{aligned}\quad (3)$$

이 때, w_1, w_2 는 각각 피치 가속도 명령과 롤 각 명령에 대한 가중치를 뜻하며 $\bar{\phi}$ 는 다음 절에서 설명하기로 한다. 이상으로 본 최적 유도 문제는 식 (1)의 추적 기하학과 (2)의 자동조종장치 동역학을 통해 식 (3)의 목적 함수를 최적화하는 최적 유도 명령 A_z^c, ϕ^c 를 찾는 것으로 정리할 수 있다.

2.2 최적 유도 법칙 설계

식 (1)의 추적 기하학과 식 (2)의 자동조종장치 동역학으로부터 다음의 상태 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 \cos x_6 + A_{T_1} \\ \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= x_3 \sin x_6 + A_{T_2} \\ \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2\end{aligned}\quad (4)$$

이 때, 각 상태 변수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}x_1 &\triangleq z \cos \bar{\phi} - y \sin \bar{\phi} \\ x_2 &\triangleq \dot{z} \cos \bar{\phi} - \dot{y} \sin \bar{\phi} \\ x_3 &\triangleq A_z \\ x_4 &\triangleq z \sin \bar{\phi} + y \cos \bar{\phi} \\ x_5 &\triangleq \dot{z} \sin \bar{\phi} + \dot{y} \cos \bar{\phi} \\ x_6 &\triangleq \phi - \bar{\phi} \\ u_1 &\triangleq A_z^c \\ u_2 &\triangleq \phi^c - \bar{\phi} \\ A_{T_1} &\triangleq (A_{T_z} + g) \cos \bar{\phi} - A_{T_y} \sin \bar{\phi} \\ A_{T_2} &\triangleq (A_{T_z} + g) \sin \bar{\phi} + A_{T_y} \cos \bar{\phi}\end{aligned}\quad (5)$$

위 식 (5)에서 x_1, x_4 는 각각 피치 축과 요 축에 대한 미사일과 표적의 상대 거리를 나타내며 x_2, x_5 는 각각 이에 대한 상대 속도를 나타낸다. x_3 는 미사일의 피치 가속도를 뜻하며 x_6 는 미사

일의 롤 각을 뜻한다. u_1, u_2 는 각각 피치 가속도 명령, 롤 각 명령이며 끝으로 A_{T_1}, A_{T_2} 는 각각 피치 축과 요 축에 대한 표적의 가속도이다. 위 상태 변수를 이용해 식 (3)의 목적 함수를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J \triangleq \frac{1}{2} [|x_1(t_f)|^2 + |x_4(t_f)|^2 + \int_0^{t_f} (w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2) dt] \quad (6)$$

상태 변수 x_6 에서 $\bar{\phi}$ 는 종말 유도 단계가 시작되는 시간 $t=0$ 에서 0(rad)으로 설정하고 이후 미사일의 롤 각이 $\pm n\pi/6$ (rad) ($n=1,2,\dots$)를 넘을 때 마다 $\pi/6$ (rad)씩 증가 혹은 감소시킨다. 그러면 상태 변수 x_6 는 종말 유도 단계 중 항상 $\pm \pi/6$ (rad) 이내의 값을 유지할 수 있으므로 다양한 요격 상황에서도 유도 성능의 심각한 저하가 없는 유도 법칙을 구할 수 있다. 따라서 식 (4)에서 상태 변수 x_6 에 관한 삼각함수에 대해 본 최적 유도 문제의 풀이가 용이하도록 $\pm \pi/6$ (rad) 범위에서 다음과 같이 근사한다.

$$\cos x_6 \cong k_1, \sin x_6 \cong k_2 x_6 \quad (7)$$

이에 식 (4)의 상태 방정식은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma_p : \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_3 + A_{T_1} \\ \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\ \Sigma_y : \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= k_2 x_3 x_6 + A_{T_2} \\ \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)은 쌍일차 시스템(bilinear and cascade system)의 형태를 가짐을 알 수 있고 이에 폰트리아진의 최소값 정리(Pontryagin's minimum principle)[12]를 통해 최적 유도 문제를 풀 수 있다. 우선 본 최적 유도 문제의 해밀토니안(Hamiltonian)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} H \triangleq & \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_3 + \lambda_3 (-k_a x_3 + k_a u_1) \\ & + \lambda_4 x_5 + \lambda_5 x_3 x_6 + \lambda_6 (-k_\phi x_6 + k_\phi u_2) \\ & + \frac{1}{2} (w_1 |u_1|^2 + w_2 |u_2|^2) \end{aligned} \quad (9)$$

또한, 준상태 방정식, 경계조건, 필요조건은 다음과 같다.

$$A_p : \dot{\lambda}_1 = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_3 = k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3 - k_2 \lambda_5 x_6$$

$$A_y : \dot{\lambda}_4 = 0$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_4$$

$$\dot{\lambda}_6 = -k_2 \lambda_5 x_3 + k_\phi \lambda_6$$

$$A_p' : \lambda_1(t_f) = x_1(t_f) \quad (11)$$

$$\lambda_2(t_f) = 0$$

$$\lambda_3(t_f) = 0$$

$$A_y' : \lambda_4(t_f) = x_4(t_f)$$

$$\lambda_5(t_f) = 0$$

$$\lambda_6(t_f) = 0$$

$$U_p : \frac{\partial H}{\partial u_1} = k_a \lambda_3 + w_1 u_1 = 0 \quad (12)$$

$$U_y : \frac{\partial H}{\partial u_2} = k_\phi \lambda_6 + w_2 u_2 = 0$$

특히, 식 (7)에서의 삼각 함수의 근사와 마찬가지로 상태 변수 x_6 는 항상 작은 범위의 값을 가지며 준상태 변수 λ_5 또한 요격 순간인 $t=t_f$ 까지 0으로 수렴하는 작은 값이므로 식 (10)의 $\dot{\lambda}_3$ 에 관한 식에서 이 둘의 곱으로 이루어진 항은 나머지 항들의 크기에 비해 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정하여 다음과 같이 근사해 쓸 수 있다.

$$\dot{\lambda}_3 = k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3 \quad (13)$$

식 (13)을 이용해 식 (10)의 준상태 방정식 A_p 를 풀면 다음과 같다.

$$\lambda_1(t) = x_1(t_f) \quad (14)$$

$$\lambda_2(t) = x_1(t_f)(t_f - t)$$

$$\lambda_3(t) = -\frac{k_1 x_1(t_f)}{k_a^2} [k_a(t_f - t) - e^{-k_a(t_f - t)} - 1]$$

식 (12), (14)에 따라 최적 제어 입력 u_1 는 다음과 같다.

$$u_1(t) = \frac{k_1 x_1(t_f)}{w_1 k_a} [k_a(t_f - t) - e^{-k_a(t_f - t)} - 1] \quad (15)$$

여기서, $x_1(t_f)$ 는 식 (8)에서 시스템 Σ_p 의 상태 변수 x_1, x_2, x_3 를 적분하여 구할 수 있다. 특히, 식 (8)에서 상태 변수 x_3 는 다시 시스템 Σ_y 의 시변 계수(time-varying coefficient)가 되는 쌍일차 시스템을 알 수 있다. 따라서 시스템 Σ_p 을 풀 방법과 동일한 방법으로 최적 제어 입력 u_2 또

한 구할 수 있다. 이상의 과정을 통해 구한 최적 유도 법칙은 다음과 같다.

$$A_z^c = a_1(t_{go})x_1 + a_2(t_{go})x_2 + a_3(t_{go})x_3 + a_4(t_{go})A_{T_1} \quad (16)$$

$$\phi^c = \frac{1}{P_5^T b_5(t_{go})} [P_1^T b_1(t_{go})x_4 + P_2^T b_2(t_{go})x_5 + P_3^T b_3(t_{go})x_6 + P_4^T b_4(t_{go})A_{T_2}] + \bar{\phi}$$

여기서, $a_i: R \rightarrow R$, $i = 1, 2, 3, 4$, $b_j: R \rightarrow R^{73}$, $j = 1, 2, 4$, $b_3: R \rightarrow R^{323}$, $b_5: R \rightarrow R^{375}$ 는 잔여 비행시간 $t_{go} \triangleq t_f - t$ 와 상태 변수 x_1, x_2, x_3, A_{T_1} 의 곱으로 이루어진 열벡터 P_i , ($i = 1, 2, \dots, 5$)의 함수로 표현된다. 각각의 자세한 유도 과정과 유도 법칙의 모든 계수는 수식의 양이 방대하여 생략하나 계수를 반영한 유도 법칙의 전체 식은 [13]을 통해 확인할 수 있다.

식 (16)의 피치 가속도 명령 A_z^c 는 식 (15)의 최적 제어 입력을 구한 것으로 앞서 언급한 것처럼 이를 통해 상태변수 x_1, x_2, x_3 를 구할 수 있다. 쌍일차 시스템의 특성에 따라 이들 상태 변수 x_1, x_2, x_3 는 식 (16)과 같이 다시 롤 각 명령 ϕ^c 을 구성하는 계수로 사용된다. 이는 피치와 롤 운동이 서로 결합되어 있음을 나타내는 것으로 본 최적 유도 법칙은 피치와 롤 운동이 결합되어 있는 BTT 미사일의 특성을 충분히 반영하였음을 확인할 수 있다.

한 편, 식 (6)의 목적 함수에서 적분 안의 항들은 에너지 최적화에 관련된 항들이다. 그러나 종말유도단계에서는 에너지 소비 보다 요격오차가 더 중요하므로 에너지 최적화에 관한 가중치 w_1, w_2 를 0으로 설정하는 것이 더 바람직하다. 더욱이, 식 (16)에서 가중치 w_1, w_2 에 관한 항들을 정리하고 나면 아래와 같이 최적 유도 법칙이 더욱 단순화되므로 실제 미사일 시스템에 적용할 경우 계산시간 및 양을 줄여 실시간 구현이 더욱 용이해진다.

$$A_z^c = \alpha_1(t_{go})x_1 + \alpha_2(t_{go})x_2 + \alpha_3(t_{go})x_3 + \alpha_4(t_{go})A_{T_1} \quad (17)$$

$$\phi^c = \frac{1}{Q_5^T \beta_5(t_{go})} [Q_1^T \beta_1(t_{go})x_4 + Q_2^T \beta_2(t_{go})x_5 + Q_3^T \beta_3(t_{go})x_6 + Q_4^T \beta_4(t_{go})A_{T_2}] + \bar{\phi}$$

여기서, $\alpha_i: R \rightarrow R$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\beta_j: R \rightarrow R^{41}$, $j = 1, 2, 4$, $\beta_3: R \rightarrow R^{181}$, $\beta_5: R \rightarrow R^{213}$ 는 잔여 비행시간 t_{go} 와 상태 변수 x_1, x_2, x_3, A_{T_1} 의 곱으로

이루어진 열벡터 Q_i , ($i = 1, 2, \dots, 5$)의 함수로 표현된다. 위 식 (17)의 자세한 내용 또한 [13]에서 확인할 수 있다.

2.3 모의실험 결과

다양한 환경에서의 모의실험을 수행하여 제안한 유도 법칙의 성능을 입증한다. 특히, 기존의 BTT 미사일 유도 법칙으로 널리 사용된 BPNG(biased PNG)를 극좌표 변환(polar conversion logic, PCL)한 결과와 비교하여 제안한 유도 법칙의 우수성을 보인다[14]. 또한, 에너지 최적화 관련 가중치 w_1, w_2 를 0으로 설정해 정리한 유도 법칙의 결과 또한 비교하여 간략화의 유효성 또한 입증한다. 미사일의 공역학 자료는 ILAAT(Inter-Laboratory Air-to-Air Missile Technology)[15]을 적용하였으며 또한, 제안한 유도 법칙을 구하기 위해 사용하였던 가정들은 모두 무시하고 비선형 추적 기하학, 중력 가속도, 미사일 동역학 등을 근사 없이 고려하였다. 미사일과 표적의 위치, 속도, 가속도 정보는 미사일의 탐색기를 통해서 획득하여 모두 알고 있다고 가정하였으며, 실제 상황과 유사한 조건을 갖도록 피치 가속도는 $10g$ 를 넘지 않도록 하였고, 잔여 비행시간은 $t_{go} = [(x^2 + y^2 + z^2) / (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)]^{1/2}$ 로 계산 하였다. 또한, 롤과 피치 채널의 대역폭은 $k_\phi = 0.75$, $k_a = 0.25$ 로 설정하였는데 이는 자동조종장치 동역학이 느릴 경우에도 제안한 유도 법칙이 잘 동작함을 보이기 위함이다. 삼각함수의 근사를 위한 상수는 각각 $k_1 = 0.9282$, $k_2 = 0.9769$ 로 설정하였는데 이는 롤 각이 $\pm \pi/6$ (rad) 범위에서 식 (7)에서의 삼각함수와 그 근사의 최대 오차를 최소화 하도록 최소최대 근사(minimax approximation)한 것으로 이는 Remez 알고리즘 [16]을 통해 구할 수 있다. 간략화 이전의 에너지 최적화 관련 가중치는 $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.1$ 로 설정 하였다.

관성 좌표계에서의 미사일의 초기 위치와 속도, 표적의 위치는 각각 $[U(0), V(0), W(0)] = [510, 0, 0](m/s)$, $[x_M(0), y_M(0), z_M(0)] = [0, 0, 0](m)$, $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -300](m)$ 로 설정하여 총 3가지 요격 상황에 대해 모의실험을 실시한다. 첫째는 표적이 정지한 경우, 다음은 $[\dot{x}_T(0), \dot{y}_T(0), \dot{z}_T(0)] = [-10, -10, 0](m/s)$ 의 속도로 표적이 등속 운동하는 경우, 끝으로 표적이 $[\dot{x}_T(0), \dot{y}_T(0), \dot{z}_T(0)] = [-15, 5, 0](m/s)$ 의 초기 속도를 가지고 Fig. 2와 같이 $A_{T_y} = 2u(t)$

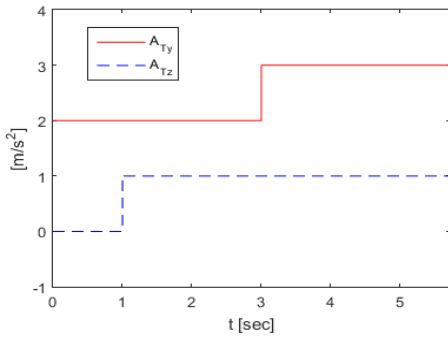


Fig. 2. Target Acceleration Profile in Case 3

Table 1. Miss Distance (m)

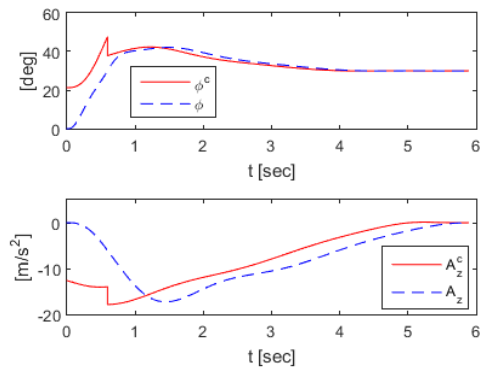
	Proposed OG law	Proposed OG law(Simplified)	BPNG/PCL
Case 1	0.72	0.71	5.11
Case 2	0.65	0.65	5.67
Case 3	0.68	0.69	5.21

$+u(t-3) (m/s^2)$, $A_{Tz}=u(t-1) (m/s^2)$ 의 가속도로 기동하는 경우이다.

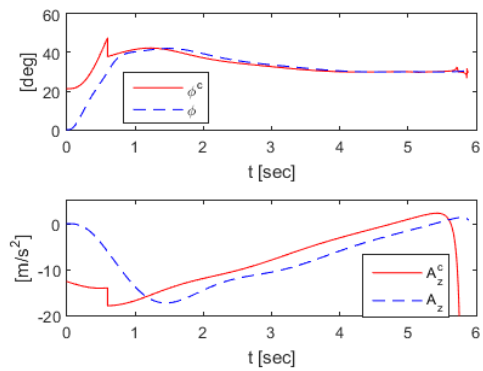
모의실험 결과는 Table 1과 Fig. 3-6으로 정리하였다. 이와 같이 다양한 요격 상황에서의 모의 실험에서 모두 제안한 유도 법칙이 기존의 유도 법칙에 비하여 작은 요격 오차를 가지며 요격에 성공하는 것을 확인할 수 있다. 이는 제안한 유도 법칙이 자동조종장치 동역학을 고려하였기 때문에 시간 지연 효과로 인한 요격 성능의 하락이 없음을 의미한다.

Figure 3, 5에서는 제안한 유도 법칙 적용 시를 각이 $\pi/6$ 씩 증감할 때 마다 $\bar{\phi}$ 이 바뀌고 그 순간을 $t=0$ 으로 하여 새로운 유도명령을 산출하는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 상태 변수 x_6 는 항상 $\pm\pi/6$ 보다 작은 크기를 유지하여 삼각 함수 근사의 유효성을 보존할 수 있다. 특히, Fig. 5에서는 $\bar{\phi}$ 가 바뀌는 상황뿐만 아니라 Fig. 2와 같이 표적의 가속도가 변하는 상황에서도 유도 명령이 급격히 바뀌는 것을 볼 수 있는데 이를 통해 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙이 기동하는 표적에 대해서도 표적의 가속도를 반영하여 효과적으로 요격함을 확인할 수 있다.

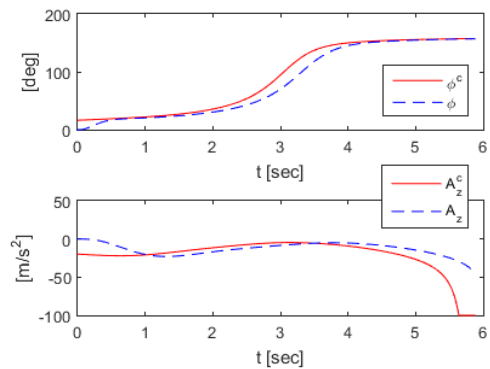
Figure 6에서는 3차원 공간에서의 미사일과 표적의 궤적을 표시 해 요격 상황을 보여주고 있다. 또한, Fig. 3, 4, 5의 결과를 통해 간략화 전후로 요격 성능 차이가 없는 것을 확인, 간략화로 인하여 요격 성능의 하락 없이 실시간 구현의



(a) Proposed OG law



(b) Proposed OG law (Simplified)

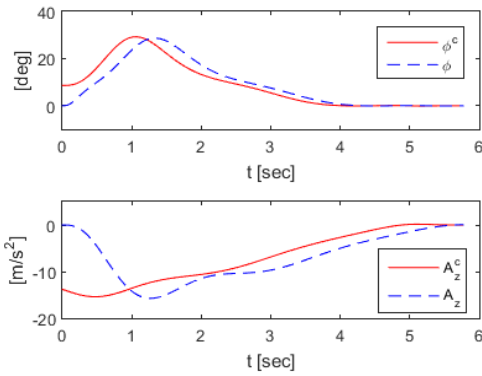


(c) BPNG/PCL

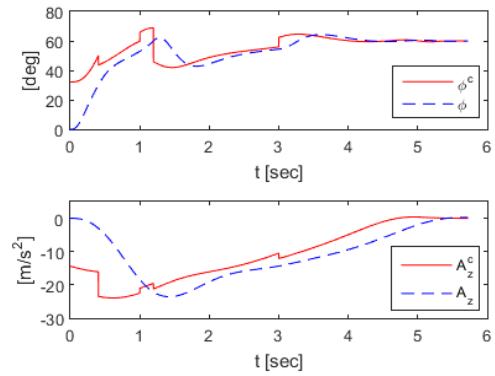
Fig. 3. Trajectories of Roll and Pitch Acceleration in Case 1

용이성을 높일 수 있음을 확인하였다.

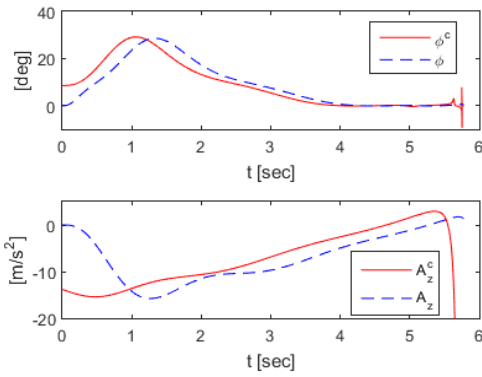
한편, 이상의 모의실험에서 제안한 유도 법칙이 작은 요격 오차로 요격을 성공하는 결과로 부터 식 (7), (13)에서와 같은 근사가 유효함을 알



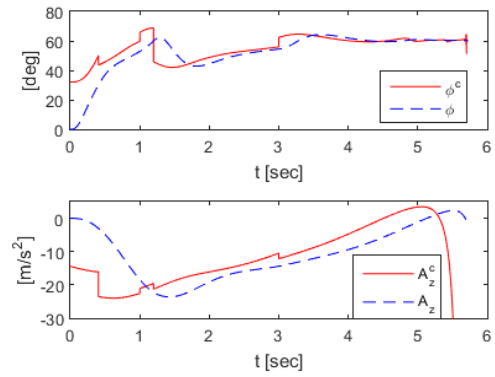
(a) Proposed OG law



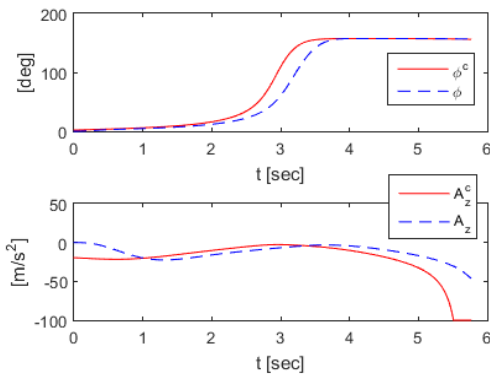
(a) Proposed OG law



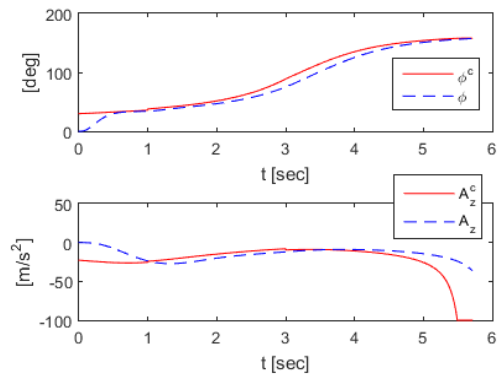
(b) Proposed OG law (Simplified)



(b) Proposed OG law (Simplified)



(c) BPNG/PCL



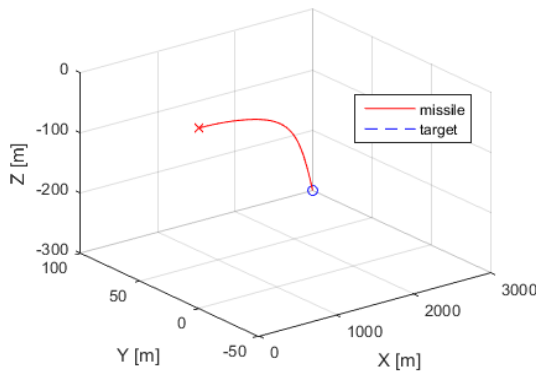
(c) BPNG/PCL

Fig. 4. Trajectories of Roll and Pitch Acceleration in Case 2

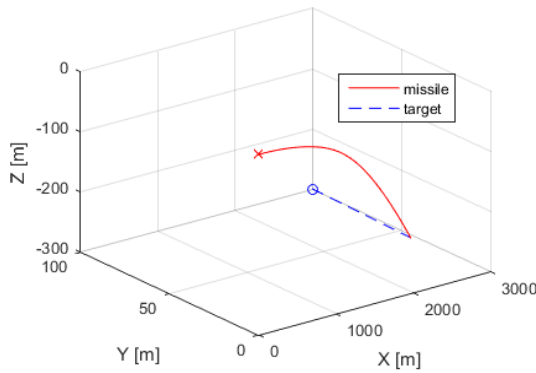
Fig. 5. Trajectories of Roll and Pitch Acceleration in Case 3

수 있다. 뿐만 아니라 이런 근사를 통해 구한 최적 유도 문제의 해석해(analytic solution)와 근사 전 식을 수치 해석적 방법으로 구한 수치해

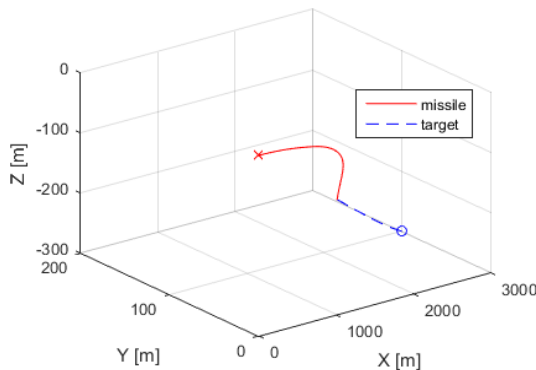
(numerical solution)를 서로 비교하여 검증할 수도 있는데 그 결과 두 해가 실제로 거의 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 식 (8), (10)은 종말



(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3

Fig. 6. Trajectories of Missile and Target Positions (Proposed OG law)

유도 법칙이 시작할 때의 상태 변수의 초기값과 식 (11)을 통해 두 점 경계치 문제(two point boundary value problem)로 정리할 수 있다. 이는 사격법(shooting method)[12]을 통해 풀 수

있는데 이에 대한 자세한 풀이는 지면상의 이유로 생략한다.

III. 결 론

본 논문에서는 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학을 고려한 BTT 미사일용 궤환 형태의 최적 종말 유도 법칙을 제안하였다. 종말 유도 단계에서의 요격 상황을 최적 유도 문제로 설정하고 적절한 가정과 근사 및 최적 제어 이론을 통해 최적 유도 문제의 해석해를 구하였다.

제안한 유도 법칙은 그 풀이가 복잡하고 어려워 식 (7)과 같이 상태변수에 $\bar{\phi}$ 를 도입하고 삼각함수를 근사하여 해를 구하였다. 즉, 일종의 준최적 유도 법칙이다. 그럼에도 불구하고 제안한 유도 법칙은 요격 성능 하락에 큰 영향을 주는 자동조종장치 동역학의 시간 지연 효과에도 매우 우수한 요격성능을 보장하며 이를 다양한 경우의 모의실험을 통해 보였다.

유감스럽게도, 본 논문에서와 같은 근사를 거치지 않고 완전한 최적 유도 문제를 궤환 형태로 구하는 것은 여전히 미제로 남아있다. 앞으로는 이에 대한 연구와 함께 요격 오차뿐만 아니라 표적 충돌각 등의 요격 상황에서의 여러 요소를 함께 고려하는 유도 법칙에 대한 연구도 필요할 것이다.

References

- 1) Arrow, A., "Status and Concerns for Bank-to-Turn Control of Tactical Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 2, 1985, pp. 267-274.
- 2) Alder, F. P., "Missile guidance by three-dimensional proportional navigation", *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, No. 3, 1956, pp. 500-507.
- 3) Zarchan, P., *Tactical and strategic missile guidance*, Vol. 124, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Washington, D.C., 1997, pp. 135-154.
- 4) Chen, R. H., Speyer, J. L., and Lianos, D., "Optimal Intercept Missile Guidance Strategies with Autopilot Lag", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 1264-1272.
- 5) Hexner, G., and Pila, A. W., "Practical

Stochastic Optimal Guidance Law for Bounded Acceleration Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, 2011, pp. 437-445.

6) Shima, T., Idan, M., and Golan, O. M., "Sliding-Mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, 2006, pp. 250-260.

7) Park, B. G., Kim, T. H., Kim, Y. H., and Kwon, H. H., "Composite Guidance Law for Impact Angle Control Against Moving Targets Under Physical Constraints", *J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Science*, Vol. 43, No. 6, 2015, pp. 497-506.

8) Cho, D. S., Kim, H. J., Tahk, M. J., "Nonsingular Sliding Mode Guidance for Impact Time Control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, pp. 1-8.

9) Aggarwal, R. K. and Moore, C. R., "Terminal Guidance Algorithm for Ramjet-Powered Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 862-866.

10) Song, S. H. and Ha, I. J., "A Lyapunov-Like Approach to Performance Analysis of 3-Dimensional Pure PNG Laws",

IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 30, No. 1, 1994, pp. 238-248.

11) Yeom, J. H., Song, S. H., Hong, J. W., and Ha, I. J., "Singular Perturbation-Like Approach to Compensation of Actuator Dynamics Effect in Missile Control", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 50, No. 4, 2014, pp. 2417-2439.

12) Lewis, F. L. and Syrmos, V. L., *Optimal Control 2nd Ed.*, John Wiley & Son, INC., 1995, pp. 282-283.

13) <http://nsl.snu.ac.kr/ksas/og.pdf>, accessed Dec. 2015.

14) Lee, J. G., Han, H. S., and Kim, Y. J., "Guidance Performance Analysis of Bank-To-Turn(BTT) Missiles", *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Hawaii, USA, 1999, pp. 991-996.

15) Williams, D. E., Friedland, B., and Madiwale, A. N., "Modern Control Theory for Design of Autopilots for Bank-to-Turn Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, 1987, pp. 378-386.

16) Ralston, A. and Wilf, H. S., *Mathematical Method for Digital Computers*, Vol. 2, John Wiley & Son, INC., 1967, pp. 266-269.