ISSN 1229-1889(Print)
ISSN 2287-9005(Online)
J Korean Soc Qual Manag Vol. 44, No.4:751-770, December 2016
http://dx.doi.org/10.7469/JKSQM.2016.44.4.751

성능변수와 대용변수를 이용한 3단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계

곽신석* · 이주호**†

*대전광역시 기획조정실
**충남대학교 정보통계학과

Economic Design of Three-Stage $\overline{X}$ Control Chart Based on both Performance and Surrogate Variables

Shin-Seok Kwak*· Jooho Lee**†

*Policy Planning Division, Daejeon City Hall
**Department of Information & Statistics, Chungnam National University

ABSTRACT

Purpose: Two-stage $\overline{X}$ chart is a useful tool for process control when a surrogate variable may be used together with a performance variable. This paper extends the two-stage $\overline{X}$ chart to a three stage version by decomposing the first stage into the preliminary stage and the main stage.

Methods: The expected cost function is derived using Markov-chain approach. The optimal designs are found for numerical examples using a genetic algorithm combined with a pattern search algorithm and compared to those of the two-stage $\overline{X}$ chart. Sensitivity analysis is performed to see the parameter effects.

Results: The proposed design outperforms the optimal design of the two-stage $\overline{X}$ chart in terms of the expected cost per unit time unless the correlation between the performance and surrogate variables is modest and the shift in process mean is smallish.

Conclusion: Three-stage $\overline{X}$ chart may be a useful alternative to the two-stage $\overline{X}$ chart especially when the correlation between the performance and surrogate variables is relatively high and the shift in process mean is on the small side.

Key Words: Three-Stage $\overline{X}$ Chart, Performance Variable, Surrogate Variable, Economic Design

● Received 29 July 2016, 1st revised 3 October 2016, accepted 4 October 2016

† Corresponding Author(jooholee@cnu.ac.kr)

※ 이 연구는 2014년도 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음.

1. 서 론

관리도는 1920년대에 Shewhart가 개발한 이래 지금까지 품질특성값의 변동을 모니터링함으로써 공정이 관리상태에 있는지의 여부를 판단하기 위한 도구로 널리 사용되어 오고 있다. 최초의 관리도는 경험적 근거로부터 중심선(μ)에서 $\pm 3\sigma_{\overline{X}}$를 관리한계로 사용하였으나 이후에 통계적인 성능을 개선하는 설계를 찾기 위한 연구가 방대하게 이루어졌다. 특히 Duncan(1956)은 $\overline{X}$ 관리도에 비용의 개념을 도입한 경제적 설계를 최초로 제시하였고, Saniga(1989)는 경제적 설계가 지닌 단점을 보완하기 위해 경제적 설계에 평균런 길이(ARL)와 같은 통계적 제약조건을 추가한 $\overline{X}-R$ 관리도의 경제적-통계적 설계를 제안하였다. 관리도의 경제적 설계에 대한 전반적 연구동향은 Montgomery(1980), Ho와 Case(1994), Montgomery(2004) 등에 잘 요약되어 있다.

기존의 관리도는 제품이나 공정의 품질특성을 나타내는 변수인 성능변수(performance variable)를 사용하여 공정을 관리하지만, 최근 들어 생산 설비의 자동화율이 높은 공정의 경우에는 x-ray, 초음파, 전류 등을 이용한 자동검사장비를 사용하여 성능변수 대신에 그것과 상관관계가 높은 대용변수(surrogate variable)를 측정하는 방법이 보다 편리하고 경제적일 수 있다. 그러나 공정의 특성상 대용변수만으로는 품질을 확신할 수 없고 성능변수의 품질을 최종적으로 확인해야만 하는 경우에는 성능변수와 대용변수 모두를 사용하여 공정을 관리할 필요가 발생한다. 예를 들어 핵연료봉의 용접공정의 경우 핵연료를 특수강 재질의 봉에 장전한 후 마개를 닫고 용접을 하는데, 용접된 부위를 직접 절단하여 용접 상태를 확인하게 되면 고가의 핵연료가 파괴되므로, 검사비용이 보다 저렴한 대용변수로서 핵연료가 장전되지 않은 봉에 동일하게 수행된 용접 상태를 확인하는 방법이 적용된다. 그러나 안전도가 극히 중요한 핵연료봉 용접공정의 특성상 대용변수만으로 공정을 관리할 수는 없으므로 핵연료봉의 용접 상태도 성능변수로서 함께 사용된다. Lee와 Kwon(1999)은 이와 같이 성능변수와 대용변수를 모두 사용하는 경우의 2단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계를 제안하였고, 이후에 Costa와 De Magalhães(2005)는 Lee와 Kwon(1999)의 모형을 변형한 2단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계 모형을 제시하고 마코프 연쇄를 이용하여 최적해를 구하였다.

전통적인 $\overline{X}$ 관리도가 지닌 단점 중의 하나는 공정변화의 징후에 적응하지 않는 일정한 크기의 표본을 추출함으로써 검정력이 떨어지거나 비용적 측면에서 낭비가 발생할 수 있다는 점이다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Prabhu 등(1993)과 Costa(1994)는 가변표본크기(variable sample size; VSS) 관리도를 제안하였는데, 이는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 그렇지 않은 경우보다 표본크기를 증가시킴으로써 관리도의 검정력을 높이려는 시도이다. 또한 Reynolds 등(1988)은 공정변화의 징후에 따라 표본추출간격을 변동시켜 수행하는 가변추출간격(variable sampling interval; VSI) 관리도를 제안하였는데, 이는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 표본추출간격을 짧게 하여 이상원인 발견시간을 단축시키려는 시도이다. 그 후에 VSS 관리도와 VSI 관리도를 결합한 가변추출비(variable sampling rate; VSR 또는 variable sample size and interval; VSSI) 관리도가 Prabhu 등(1994)과 Costa(1997)에 의해 제안되었다. 이 분야에 관한 연구는 Yu 등(2007)에 전반적으로 잘 요약되어 있다.

본 논문에서는 성능변수와 대용변수를 모두 사용하여 공정 평균을 관리해야 하는 상황 하에서, VSSI $\overline{X}$ 관리도가 공정 평균의 이동을 감지하는 데 민감하다는 특성에 착안하여, 대용변수를 활용한 관리 단계에 이를 적용함으로써 Costa와 De Magalhães(2005)의 2단계 관리도를 보다 효율적인 관리가 가능하도록 확장한 3단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계 모형을 제안하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 성능변수와 대용변수를 이용한 3단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계 모형을

제안하고 그 절차를 설명한다. 3절에서는 제안한 설계 모형의 비용 함수를 유도하고, 4절에서는 수치 예를 통해 기존의 Costa와 De Magalhães(2005)의 2단계 모형과 제안된 모형의 최적 설계모수 값을 비교한다. 5절에서는 비용모수와 시간모수 등의 다양한 모수 변화에 따른 민감도 분석을 실시하고, 6절에서는 본 논문의 연구 결과를 요약한다.

2. 가정 및 모형

Costa와 De Magalhães(2005)에서 제안한 모형(이하 Costa 모형)은 성능변수와 대용변수를 기반으로 한 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계 모형으로서, 고장시간의 분포가 지수분포를 따른다는 가정 하에 이상신호가 없을 때에는 대용변수에 의해 공정을 관리하다가 이상신호가 감지됐을 때에는 성능변수에 의해 공정을 관리하는 2단계 모형이다. 본 논문에서는 Costa 모형을 보다 세분하여 먼저 1단계로 대용변수를 사용하여 관리하다가, 만약 경고신호가 감지되면 계속 대용변수를 사용하되 표본의 크기는 늘리고 표본의 추출간격은 줄이는 2단계로 전환하며, 조치신호가 감지될 경우에는 성능변수를 사용하는 3단계로 전환하는 관리도 모형을 제시하고자 한다.

2.1 가정

본 논문에서는 새로운 모형의 제안을 위해 먼저 다음과 같은 가정을 도입하기로 한다.

1) 성능변수를 X, 대용변수를 Y로 정의할 때 i번째 표본추출시점에서의 X_i와 Y_i간에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$X_i = \zeta_i + \delta_i, \tag{1}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \zeta_i + \epsilon_i. \tag{2}$$

여기서 δ_i와 ϵ_i는 서로 독립이며, 각각 독립이고 동일한 $N(0,\, \sigma_\delta^2)$와 $N(0,\, \sigma_\epsilon^2)$를 따른다. 또한 ζ_i는 독립이고 동일한 $N(\zeta,\, \sigma_\zeta^2)$를 따르며 δ_i 및 ϵ_i와 서로 독립이다. 이러한 가정 하에서 $(X_i,\, Y_i)$는 평균이

$$(\mu_x,\, \mu_y) = (\zeta,\, \beta_0 + \beta_1 \zeta) \tag{3}$$

이고, 공분산행렬이

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 + \sigma_\zeta^2 & \beta_1 \sigma_\zeta^2 \\ \beta_1 \sigma_\zeta^2 & \sigma_\epsilon^2 + \beta_1^2 \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

인 이변량정규분포를 따른다(자세한 것은 Fuller(1987)를 참조).

2) 공정은 성능변수의 평균이 μ_x이고 분산이 σ_x^2인 관리상태로 시작한다. 단위 시간당 이상원인 발생률 λ인 포아송과정에 따라 이상원인이 발생하면 성능변수의 평균은 μ_x에서 $\mu_x + c\sigma_x$로 이동하고, 이에 따라 대용변수의 평균은 μ_y에서 $\mu_y + \beta_1 c \sigma_x$로 이동한다.

3) 공정의 관리는 다음과 같은 순서로 진행된다.

i) 먼저 $\overline{Y}$ 관리도로 시작하여 표본크기 n_{y_1}인 Y 표본의 평균이 경고한계 내에 있으면 다음 표본추출시점에서도

표본크기가 동일한 $\overline{Y}$ 관리도를 사용하고, Y 표본의 평균이 경고한계와 조치한계 사이에 있으면 다음 표본추출시점에서는 표본크기가 n_{y_2}로 증가한 $\overline{Y}$ 관리도를 사용하며, Y 표본의 평균이 조치한계를 벗어나는 경우엔 다음 표본추출시점에서 표본크기가 n_x인 $\overline{X}$ 관리도를 사용한다. 편의상 표본크기가 작은 1단계 $\overline{Y}$ 관리도를 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도로, 표본크기가 큰 2단계 $\overline{Y}$ 관리도를 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도로 나타내기로 한다.

ii) 현 시점에서 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 사용할 경우, Y 표본의 평균이 경고한계 내에 있으면 다음 표본추출시점에서 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도를 사용하고, Y 표본의 평균이 경고한계와 조치한계 사이에 있으면 다음 표본추출시점에서도 계속 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 사용하며, Y 표본의 평균이 조치한계를 벗어나면 다음 표본추출시점에서 $\overline{X}$ 관리도를 사용한다.

iii) 현 시점에서 $\overline{X}$ 관리도를 사용할 경우, X 표본의 평균이 경고한계 내에 있으면 다음 표본추출시점에서 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 사용하고, X 표본의 평균이 경고한계와 조치한계 사이에 있으면 다음 표본추출시점에서도 계속 $\overline{X}$ 관리도를 사용하며, X 표본의 평균이 조치한계를 벗어나면 공정을 즉시 중단하고 이상원인의 발생여부를 확인하여 존재할 경우 이를 제거한다.

iv) 이상원인을 제거한 후에나 거짓 경보를 확인한 후에는 다음 표본추출시점에서 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도를 사용하여 계속 공정관리를 진행한다.

4) 이상원인이 존재할 경우 이를 발견하고 제거하기 위해 a_1의 비용과 b_1의 시간이 소요되며, 거짓 경보로 판명될 경우 a_2의 비용과 b_2의 시간이 소요된다. 또한 X 표본을 추출하는 데에는 a_3의 고정비용 및 단위당 a_4의 변동비용과 b_3의 시간이 소요되고, Y 표본을 추출하는 데에는 $a_3^{'}$의 고정비용 및 단위당 $a_4^{'}$의 변동비용과 $b_3^{'}$의 시간이 소요된다. 관리상태 하에서의 단위시간당 순수입은 i_1이고 이상상태 하에서의 단위 시간당 순수입은 i_2이다.

2.2 모형

위의 가정 하에서 본 연구에서 제안하는 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, 그리고 $\overline{X}$ 관리도로 이루어진 3단계 관리도 모형을 기술하기로 한다.

먼저 h_{y_1}, h_{y_2}, h_x를 각각 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도에서의 표본추출간격이라고 정의한다. 또한 (W_{y_1}, L_{y_1}), (W_{y_2}, L_{y_2}), (W_x, L_x)를 각각 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도의 경고한계선과 조치한계선의 계수로 정의한다. 이상의 정의를 사용하여 본 연구에서 제안하는 모형을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

단계 1. 크기 n_{y_1}인 표본을 h_{y_1} 간격으로 추출해서 $Z_{y_1} \equiv |\overline{Y} - \mu_y| / (\sigma_y / \sqrt{n_{y_1}})$를 계산한다. 만약 $|Z_{y_1}| < W_{y_1}$이면 다음 표본추출시점에서 단계 1로 가고, $w_{y_1} \le |Z_{y_1}| < L_{y_1}$이면 단계 2로 가며, $|Z_{y_1}| > L_{y_1}$이면 단계 3으로 간다.

단계 2. 크기 n_{y_2}인 표본을 h_{y_2} 간격으로 추출해서 $Z_{y_2} \equiv |\overline{Y} - \mu_y| / (\sigma_y / \sqrt{n_{y_2}})$를 계산한다. 만약 $|Z_{y_2}| < W_{y_2}$이면 다음 표본추출시점에서 단계 1로 가고, $W_{y_2} \le |Z_{y_2}| < L_{y_2}$이면 단계 2로 가며, $|Z_{y_2}| > L_{y_2}$이면 단계 3으로 간다.

단계 3. 크기 n_x인 표본을 h_x 간격으로 추출해서 $Z_x \equiv |\overline{X} - \mu_x| / (\sigma_x / \sqrt{n_x})$를 계산한다. 만약

$|Z_x| < W_x$이면 다음 표본추출시점에서 단계 2로 가고, $W_x \le |Z_x| < L_x$이면 단계 3으로 가며, $|Z_x| > L_x$이면 단계 4로 간다.

단계 4. 공정을 중단하고 이상원인의 발생여부를 조사한다. 만약 신호가 거짓 경보로 판명되면 단계 1로 가고, 이상원인이 발견되면 제거한 후에 단계 1로 간다.

위에서 기술된 관리도 절차에 관리도와 관련된 비용요소를 고려한 비용함수를 도입하면 관리도의 경제적 모형을 구축할 수 있다. 제안된 모형은 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도로 시작해서 $\overline{X}$ 관리도에서 조치신호를 발생시키고 이상원인을 제거할 때까지를 한 주기로 하는 재생보상과정이다. 따라서 T를 주기시간, I를 주기당 순수입이라고 정의하면 시간당 순수입 A의 기댓값은 다음과 같이 나타낼 수 있다(자세한 것은 Ross(1983)를 참조).

$$E(A) = E(I)/E(T) \tag{5}$$

따라서 제안된 관리도의 경제적 모형은 $E(A)$를 최대화하도록 설계모수인 n_{y_1}, n_{y_2}, n_x, h_{y_1}, h_{y_2}, h_x, L_{y_1}, L_{y_2}, L_x, W_{y_1}, W_{y_2}, W_x를 결정하는 문제로 표현할 수 있다.

3. 비용함수

3.1 마코프 연쇄 접근법

제안된 모형의 비용함수인 $E(A)$를 유도하기 위해 마코프 연쇄 접근법을 이용하기로 한다. 이상원인의 존재여부를 확인하는 데에 걸리는 시간은 공정이 그 동안 중단되므로 무시하기로 하면, 지수분포의 무기억성에 의해 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도 간의 전이가 시간에 무관하게 일정한 확률로 발생하기 때문에 마코프 연쇄의 성질을 만족시킨다. 이제 공정이 관리상태인지 이상상태인지의 여부와 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도 중의 어떤 것을 사용하여 공정을 관리하고 있는가에 따라 마코프 연쇄의 상태를 다음과 같이 정의하기로 한다.

- 상태 1: 공정이 관리상태이고 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도를 사용함.
- 상태 2: 공정이 관리상태이고 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 사용함.
- 상태 3: 공정이 관리상태이고 $\overline{X}$ 관리도를 사용함.
- 상태 4: 공정이 이상상태이고 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도를 사용함.
- 상태 5: 공정이 이상상태이고 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 사용함.
- 상태 6: 공정이 이상상태이고 $\overline{X}$ 관리도를 사용함.
- 상태 7: 공정에서 발생한 이상원인이 발견됨.

위와 같이 상태를 정의할 때 마코프 연쇄의 1단계 전이는 <Table 1>과 같이 나타낼 수 있으며, 전이확률행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} \end{bmatrix}$$

여기서 확률 p_{ij}는 상태 i에서 상태 j로 전이될 확률로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_{11} = P[|Z| \leq W_{y_1}]e^{-\lambda h_{y_1}}$$

Table 1. One-step transition between Markov chain states

*i*th sample				(*i*+1)th sample	
Control chart	Process Condition	Region	Markov chain states	Process Condition	Markov chain states
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	central	1	in control	1
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	warning	1	in control	2
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	action	1	in control	3
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	central	1	out of control	4
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	warning	1	out of control	5
$\overline{Y}_{(1)}$	in control	action	1	out of control	6
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	central	2	in control	1
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	warning	2	in control	2
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	action	2	in control	3
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	central	2	out of control	4
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	warning	2	out of control	5
$\overline{Y}_{(2)}$	in control	action	2	out of control	6
$\overline{X}$	in control	action	3	in control	1
$\overline{X}$	in control	central	3	in control	2
$\overline{X}$	in control	warning	3	in control	3
$\overline{X}$	in control	action	3	out of control	4
$\overline{X}$	in control	central	3	out of control	5
$\overline{X}$	in control	warning	3	out of control	6
$\overline{Y}_{(1)}$	out of control	central	4	out of control	4
$\overline{Y}_{(1)}$	out of control	warning	4	out of control	5
$\overline{Y}_{(1)}$	out of control	action	4	out of control	6
$\overline{Y}_{(2)}$	out of control	central	5	out of control	4
$\overline{Y}_{(2)}$	out of control	warning	5	out of control	5
$\overline{Y}_{(2)}$	out of control	action	5	out of control	6
$\overline{X}$	out of control	central	6	out of control	5
$\overline{X}$	out of control	warning	6	out of control	6
$\overline{X}$	out of control	action	6	out of control	7

$$p_{12} = P[W_{y_1} < |Z| \le L_{y_1}]e^{-\lambda h_{y_2}}$$

$$p_{13} = P[|Z| > L_{y_1}]e^{-\lambda h_x}$$

$$p_{14} = P[|Z| \le W_{y_1}](1 - e^{-\lambda h_{y_1}})$$

$$p_{15} = P[W_{y_1} < |Z| \le L_{y_1}](1 - e^{-\lambda h_{y_2}})$$

$$p_{16} = P[|Z| > L_{y_1}](1 - e^{-\lambda h_x})$$

$$p_{21} = P[|Z| \le W_{y_2}]e^{-\lambda h_{y_1}}$$

$$p_{22} = P[W_{y_2} < |Z| \le L_{y_2}]e^{-\lambda h_{y_2}}$$

$$p_{23} = P[|Z| > L_{y_2}]e^{-\lambda h_x}$$

$$p_{24} = P[|Z| \le W_{y_2}](1 - e^{-\lambda h_{y_1}})$$

$$p_{25} = P[W_{y_2} < |Z| \le L_{y_2}](1 - e^{-\lambda h_{y_2}})$$

$$p_{26} = P[|Z| > L_{y_2}](1 - e^{-\lambda h_x})$$

$$p_{31} = P(|Z| > L_x)e^{-\lambda h_{y_1}}$$

$$p_{32} = 1 - P(W_x < |Z| \le L_x)e^{-\lambda h_{y_2}}$$

$$p_{33} = P[W_x < |Z| \le L_x]e^{-\lambda h_x}$$

$$p_{34} = P(|Z| > L_x)(1 - e^{-\lambda h_{y_1}})$$

$$p_{35} = 1 - P(W_x < |Z| \le L_x)(1 - e^{-\lambda h_{y_2}})$$

$$p_{36} = P(W_x < |Z| \le L_x)(1 - e^{-\lambda h_x})$$

$$p_{44} = P[|U_{y_1}| \le W_{y_1}]$$

$$p_{45} = P[W_{y_1} < |U_{y_1}| \le L_{y_1}]$$

$$p_{46} = P[|U_{y_1}| > L_{y_1}]$$

$$p_{54} = P[|U_{y_2}| \le W_{y_2}]$$

$$p_{55} = P[W_{y_2} < |U_{y_2}| \le L_{y_2}]$$

$$p_{56} = P[|U_{y_2}| > L_{y_2}]$$

$$p_{65} = P[|U_x| \le W_x]$$

$$p_{66} = P[W_x < |U_x| \le L_x]$$

$$p_{67} = P[|U_x| > L_x]$$

$$p_{77} = 1$$

여기서 $Z \sim N(0,1)$, $U_x \sim N(c\sqrt{n_x}, 1)$, $U_{y_1} \sim N(\beta_1 c\sqrt{n_{y_1}}, 1)$, $U_{y_2} \sim N(\beta_1 c\sqrt{n_{y_1}}, 1)$이다.

이제 행렬 P로부터 흡수상태에 해당하는 7행과 7열을 제거해서 얻은 6×6 행렬을 Q라고 정의하면 마코프연쇄의 기본 성질로부터 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도의 표본추출횟수의 기댓값은 이상원인 발생 이전인가 혹은 이후인가에 따라 각각 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다. (자세한 것은 Cinlar(1975)를 참조.)

$$m_{y_1} = b'(I-Q)^{-1}c_1, \tag{6}$$

$$m_{y_2} = b'(I-Q)^{-1}c_2, \tag{7}$$

$$m_x = b'(I-Q)^{-1}c_3, \tag{8}$$

$$m_{y_1}' = b'(I-Q)^{-1}c_4, \tag{9}$$

$$m_{y_2}' = b'(I-Q)^{-1}c_5, \tag{10}$$

$$m_x' = b'(I-Q)^{-1}c_6. \tag{11}$$

여기서 $b' = (e^{-\lambda h_{y_1}},\ 0,\ 0,\ 1-e^{-\lambda h_{y_1}},\ 0,\ 0)$은 초기확률을 나타내는 벡터이고 $c_j,\ j=1,\cdots,6$은 j번째 원소가 1인 단위벡터이다. 또한 주기당 거짓경보횟수의 기댓값은

$$E(FA) = m_x P(|Z| > L_x) \tag{12}$$

로 나타낼 수 있고, $h' = (h_{y_1},\ h_{y_2},\ h_x,\ h_{y_1},\ h_{y_2},\ h_x)$로 정의하면 공정의 시작부터 이상원인이 발생하고 이를 감지할 때까지의 평균시간은

$$AT = b'(I-Q)^{-1}h \tag{13}$$

로 나타낼 수 있다.

이제 이 기댓값들을 보다 간단한 형태로 표현하기 위해 $(I-Q)^{-1}$를 구해 보기로 한다. 먼저 행렬 $I-Q$를

$$I-Q = \begin{bmatrix} 1-p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} & -p_{15} & -p_{16} \\ -p_{21} & 1-p_{22} & -p_{23} & -p_{24} & -p_{25} & -p_{26} \\ -p_{31} & -p_{32} & 1-p_{33} & -p_{34} & -p_{35} & -p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1-p_{44} & -p_{45} & -p_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -p_{54} & 1-p_{55} & -p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{65} & 1-p_{66} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

의 형태로 표현하면, $I-Q$의 역행렬은 분할에 의한 역행렬 구하는 방식을 적용해 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

이때 A의 역행렬은

$$A^{-1}=\frac{1}{\gamma}F,$$
$$F\equiv\begin{bmatrix}(1-p_{22})(1-p_{33})-p_{23}p_{32} & p_{12}(1-p_{33})+p_{13}p_{32} & p_{12}p_{23}+p_{13}(1-p_{22})\\ p_{21}(1-p_{33})+p_{23}p_{31} & (1-p_{11})(1-p_{33})-p_{13}p_{31} & (1-p_{11})p_{23}+p_{13}p_{21}\\ p_{21}p_{32}+(1-p_{22})p_{31} & (1-p_{11})p_{32}+p_{12}p_{31} & (1-p_{11})(1-p_{22})-p_{12}p_{21}\end{bmatrix}$$
$$\gamma\equiv(1-p_{11})(1-p_{22})(1-p_{33})-p_{13}p_{21}p_{32}-p_{12}p_{23}p_{31}-p_{13}p_{31}(1-p_{22})-(1-p_{11})p_{23}p_{32}$$

로 나타낼 수 있으며, C의 역행렬은

$$C^{-1}=\frac{1}{\delta}G,$$
$$G\equiv\begin{bmatrix}(1-p_{55})(1-p_{66})-p_{56}p_{65} & p_{45}(1-p_{66})+p_{46}p_{65} & p_{45}p_{56}+p_{46}(1-p_{55})\\ p_{54}(1-p_{66}) & (1-p_{44})(1-p_{66}) & (1-p_{44})p_{56}+p_{46}p_{54}\\ p_{54}p_{65} & (1-p_{44})p_{65} & (1-p_{44})(1-p_{55})-p_{45}p_{54}\end{bmatrix}$$
$$\delta\equiv(1-p_{44})(1-p_{55})(1-p_{66})-p_{46}p_{54}p_{65}-p_{45}p_{54}(1-p_{66})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$-A^{-1}BC^{-1}=\frac{1}{\gamma\delta}D$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 행렬 D의 $(i,\ j)$번째 원소는

$$D_{ij}\equiv\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}p_{k,\,l+3}F_{ik}G_{lj},\quad i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3$$

으로 정의된다. 따라서 $I-Q$의 역행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}F_{11}/\gamma & F_{12}/\gamma & F_{13}/\gamma & D_{11}/(\gamma\delta) & D_{12}/(\gamma\delta) & D_{13}/(\gamma\delta)\\ F_{21}/\gamma & F_{22}/\gamma & F_{23}/\gamma & D_{21}/(\gamma\delta) & D_{22}/(\gamma\delta) & D_{23}/(\gamma\delta)\\ F_{31}/\gamma & F_{32}/\gamma & F_{33}/\gamma & D_{31}/(\gamma\delta) & D_{32}/(\gamma\delta) & D_{33}/(\gamma\delta)\\ 0 & 0 & 0 & G_{11}/\delta & G_{12}/\delta & G_{13}/\delta\\ 0 & 0 & 0 & G_{21}/\delta & G_{22}/\delta & G_{23}/\delta\\ & 0 & 0 & G_{31}/\delta & G_{32}/\delta & G_{33}/\delta\end{bmatrix}$$

그러므로 이상원인 발생 이전과 이후의 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도, $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도, $\overline{X}$ 관리도의 표본추출횟수의 기댓값은 식 (6) ~ 식 (11)로부터 각각 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$m_{y_1} = \frac{1}{\gamma} F_{11} e^{-\lambda h_{y_1}} \tag{14}$$

$$m_{y_2} = \frac{1}{\gamma} F_{12} e^{-\lambda h_{y_1}} \tag{15}$$

$$m_x = \frac{1}{\gamma} F_{13} e^{-\lambda h_{y_1}} \tag{16}$$

$$m_{y_1}^{'} = \frac{1}{\gamma\delta} D_{11} e^{-\lambda h_{y_1}} + \frac{1}{\delta} G_{11}(1 - e^{-\lambda h_{y_1}}) \tag{17}$$

$$m_{y_2}^{'} = \frac{1}{\gamma\delta} D_{12} e^{-\lambda h_{y_1}} + \frac{1}{\delta} G_{12}(1 - e^{-\lambda h_{y_1}}) \tag{18}$$

$$m_x^{'} = \frac{1}{\gamma\delta} D_{13} e^{-\lambda h_{y_1}} + \frac{1}{\delta} G_{13}(1 - e^{-\lambda h_{y_1}}) \tag{19}$$

또한, 공정의 시작부터 이상상태가 발생하고 이를 감지할 때까지의 평균시간은 식 (13)으로부터

$$AT = (m_{y_1} + m_{y_1}^{'})h_{y_1} + (m_{y_2} + m_{y_2}^{'})h_{y_2} + (m_x + m_x^{'})h_x \tag{20}$$

로 표현할 수 있다.

한편 평균 표본추출시간 AS는 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도에서 $\overline{X}$ 관리도로 넘어가는 경우와 $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도에서 $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도를 거쳐 $\overline{X}$ 관리도로 넘어가는 경우의 평균표본추출시간들의 가중평균으로 나타낼 수 있으므로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} AS &= \frac{p_{13}}{p_{13} + p_{12}p_{23}}(b_3^{'} n_{y_1} + b_3 n_x) + \frac{p_{12}p_{23}}{p_{13} + p_{12}p_{23}}[b_3^{'}(n_{y_1} + n_{y_2}) + b_3 n_x] \\ &= b_3 n_x + b_3^{'} n_{y_1} + \frac{p_{12}p_{23}}{p_{13} + p_{12}p_{23}}(b_3^{'} n_{y_2}) \end{aligned} \tag{21}$$

3.2 비용함수의 유도

공정의 진행은 생산을 시작해서 이상원인을 발견하고 제거할 때까지의 기간이 주기적으로 반복되는 형태로 이루어진다고 볼 수 있다. 한 주기의 기댓값 $E(T)$는 다음과 같이 네 종류의 기간으로 분할된다. (a) 관리상태하의 기간 $1/\lambda$; (b) 이상상태 하에서의 기간 $AT - 1/\lambda + AS$; (c) 거짓경보로 인한 공정중단시간 $b_2 E(FA)$; (d) 이상원인을 발견하고 제거하는 데 소요되는 시간 b_1. 따라서 기대주기시간은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(T) = AT + AS + b_2 E(FA) + b_1 \tag{22}$$

한편 주기당 기대 순수입은 관리상태 하에서의 순수입과 이상상태 하에서의 순수입의 합에서 표본추출비용과 이

상원인 제거 비용 및 거짓경보 확인 비용을 뺀 값이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(I) = i_1/\lambda + i_2(AT - 1/\lambda + AS) - a_1 - a_2 E(FA) - (a_3 + a_4 n_x)(m_x + m_x^{'}) \\ - (a_3^{'} + a_4^{'} n_{y_1})(m_{y_1} + m_{y_1}^{'}) - (a_3^{'} + a_4^{'} n_{y_2})(m_{y_2} + m_{y_2}^{'}) \tag{23}$$

따라서 제안된 모형의 경제적 설계는 다음과 같은 제약조건 하에서 단위 시간당 기대 순수입 $E(A) = E(I)/E(T)$를 최대화하도록 설계모수 n_{y_1}, n_{y_2}, n_x, h_{y_1}, h_{y_2}, h_x, L_{y_1}, L_{y_2}, L_x, W_{y_1}, W_{y_2}, W_x의 값을 결정하는 문제로 표현할 수 있다.

$$W_x \leq L_x \tag{24}$$

$$W_{y_1} \leq L_{y_1} \tag{25}$$

$$W_{y_2} \leq L_{y_2} \tag{26}$$

$$b_3 n_x \leq h_x \tag{27}$$

$$b_3^{'} n_{y_1} \leq h_{y_1} \tag{28}$$

$$b_3^{'} n_{y_2} \leq h_{y_2} \tag{29}$$

$$n_{y_1} \leq n_{y_2} \tag{30}$$

$$h_{y_2} \leq h_{y_1} \tag{31}$$

여기서 식 (24) ~ 식 (26)은 관리도의 속성과 관련된 제약이고, 식 (27) ~ 식 (29)는 표본추출간격이 표본추출에 소요되는 시간보다 길어야 함을 의미하며, 식 (30)과 식 (31)은 VSSI 관리도에서 일반적으로 사용하는 제약조건이다.

4. 수치 예 및 분석

이 절에서는 다양한 수치 예를 사용하여 본 논문에서 제안한 모형의 최적해와 Costa 모형의 최적해를 비교하기로 한다. <Table 2>에 제시한 수치 예는 Panagos 등(1985)에서 사용한 짝수 번째의 예 16개 중에서, 성능변수의 검사시간이 최근 자동화 시스템의 도입을 통해 상당히 단축된 현실을 감안하여 b_3의 값이 0.05로 작은 경우에 해당하는 8개를 택한 것이다. 이 8개의 예 각각에 대하여 이상원인 발생 시 공정의 평균 변동량 계수가 $c = 0.5$, 1, 2인 경우를 조합한 총 24개의 경우에 대해 비교 분석하였다. 그리고 $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 1$, $a_3^{'} = 0.1 a_3$, $a_4^{'} = 0.1 a_4$, $b_3^{'} = 0.2 b_3$, $\beta_1 = 0.5$, 0.7, 또는 0.9라고 가정하였다.

Table 2. Cost and time parameter values of 8 examples in Panagos et. al.(1985)

Example No.	λ	c	i_1	i_2	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
2	0.01	1	150	50	350	500	5.0	1.0	3.05	4.05	0.05
4	0.01	2	150	50	135	500	0.5	0.1	4.00	41.00	0.05
6	0.05	1	50	-50	350	50	0.5	1.0	4.00	41.00	0.05
8	0.05	2	50	-50	135	50	5.0	0.1	3.05	4.05	0.05
18	0.01	1	50	-50	45	500	5.0	1.0	20.05	40.05	0.05
20	0.01	2	50	-50	260	500	0.5	0.1	21.00	5.00	0.05
22	0.05	1	150	50	45	50	0.5	1.0	21.00	5.00	0.05
24	0.05	2	150	50	260	50	5.0	0.1	20.05	40.05	0.05

본 논문에서는 위의 수치 예를 통해 단위 시간당 기대 순수입 $E(A)$를 최대화하는 해를 구하기 위해서 첫 번째 단계로 유전자 알고리즘(genetic algorithm; GA)을 적용하였다. GA는 Holland(1975)가 제안한 생물의 진화를 모방한 진화 연산의 대표 기법으로 지역 최적해에 빠지는 오류를 피할 수 있다는 장점을 지니고 있다. 그러나 본 논문의 최적화 문제의 경우에는 설계모수의 수가 12개나 되어 GA의 수행시간이 지나치게 오래 걸린다는 현실적인 제약이 있기 때문에 GA를 통해 구해진 전역 최적해를 초기값으로 사용하고, 두 번째 단계로 Hooke와 Jeeves(1961)가 제안한 패턴탐색 알고리즘(pattern search algorithm; PS)을 사용하여 최종해를 구하였다. 단, PS의 특성상 표본크기 (n_x, n_{y_1}, n_{y_2})의 조건에 정수로 제약할 수 있는 기능이 없어 GA로 구해진 표본크기 값 $(n_x^0, n_{y_1}^0, n_{y_2}^0)$에 ±3을 해 준 모든 정수 조합에 대해 PS를 통해 $E(A)$를 최대화하는 해를 구하였다. GA와 PS 알고리즘 계산은 MATLAB (2015)의 루틴들을 사용하였으며, 계산상의 편의를 위하여 n_{y_1}, n_{y_2}, n_x에는 각각 1과 50의 하한값과 상한값을, h_{y_1}, h_{y_2}, h_x에는 각각 0.05와 20의 하한값과 상한값을, L_{y_1}, L_{y_2}, L_x, W_{y_1}, W_{y_2}, W_x에는 각각 0.01과 4의 하한값과 상한값을 부여하였다. <Table 3>에 제시된 계산 결과를 분석해 보면 다음과 같은 몇 가지 사실을 발견할 수 있다.

첫째, 단위 시간당 기대 순수입 $E(A)$은 Costa 모형보다 본 논문에서 제안한 모형에서 모두 증가하였는데, $E(A)$의 증가효과는 대체로 이상원인 발생시 공정 평균의 변동량 c가 작을수록 크게 나타났다. 따라서 이상원인 발생에 따른 공정 변동이 미세한 경우($c=0.5$)에 본 논문에서 제안된 3단계 $\overline{X}$ 관리도를 사용하는 것이 더 유리함을 알 수 있다.

둘째, 제안된 3단계 모형의 경우 β_1이 0.9일 때에는 성능변수의 표본크기와 표본추출간격의 최적해 값이 각각 $n_x = 1$과 $h_x = 0.05$로 하한값에 도달한 반면, β_1이 0.5일 때에는 n_x와 h_x의 최적해 값이 하한값보다 훨씬 큰 경우가 많은 것으로 나타났다. 이러한 결과는 대용변수의 상관성이 높을 때에는 1단계와 2단계 위주로 관리도를 설계함으로써 단위 시간당 기대 순수입을 높일 수 있는 반면, 대용변수의 상관성이 낮을 때에는 3단계 관리도의 비중을 더 늘림으로써 단위 시간당 기대 순수입을 높일 수 있기 때문일 것이다.

셋째, 대용변수의 상관관계가 높으면($\beta_1 = 0.9$), c가 증가할수록 대부분의 경우 대용변수의 표본크기와 추출간격이 점차 줄어드는 것으로 나타났는데, 이는 공정 변동의 크기가 클수록 더 작은 크기의 표본을 보다 빈번하게 추출하여 공정을 관리하는 것이 더 유리함을 의미한다.

넷째, 성능변수의 관리계수 측면에서 살펴보면, 대용변수의 상관관계가 높고($\beta_1 = 0.9$), 공정 변동이 크지 않을 경우($c=0.5$, $c=1$)에는 성능변수 관리한계가 한 가지 경우를 제외하고 모두 0.01로 설계되었다. 이는 상관관계가 높은 대용변수로 공정이 충분히 모니터링 되었고, 또한 공정 변동이 크지 않기 때문에 성능변수 단계에 있어서는 즉시 이상여부를 확인해 보는 것이 오히려 기대수입을 증가시키기 때문일 것이다.

Table 3. Comparison of optimal economic designs of two-stage and three-stage charts

Example No.	β_1	two-stage $\overline{X}$ chart								three-stage $\overline{X}$ chart													(B) −(A)
		n_y	n_x	h_y	h_x	L_y	L_x	W_x	EA (A)	n_{y_1}	n_{y_2}	n_x	h_{y_1}	h_{y_2}	h_x	L_{y_1}	W_{y_1}	L_{y_2}	W_{y_2}	L_x	W_x	EA (B)	
2	0.5	50	26	2.87	1.30	1.67	2.36	1.06	131.22	1	50	22	3.38	0.50	1.10	4.00	0.01	2.04	0.82	2.15	1.03	131.87	0.65
		33	9	2.67	0.45	2.04	2.63	1.06	137.04	22	39	5	2.46	0.39	0.25	2.92	1.37	2.78	1.17	1.89	0.83	137.65	0.61
		12	3	1.85	0.15	2.30	2.94	1.20	139.51	8	14	1	1.69	0.14	0.05	3.68	1.58	3.43	1.36	1.33	0.63	139.82	0.31
	0.7	50	20	2.75	1.00	2.18	2.03	0.80	133.16	50	50	11	3.35	0.50	0.55	3.20	1.62	2.69	0.71	0.45	0.45	134.91	1.75
		26	7	2.39	0.35	2.56	2.27	0.76	137.95	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02	1.07
		8	3	1.63	0.15	2.61	2.78	1.13	139.94	5	8	1	1.49	0.08	0.05	4.00	1.70	3.72	1.42	0.46	0.46	140.29	0.35
	0.9	50	12	2.68	0.60	2.84	1.21	0.39	134.77	31	49	1	2.80	0.49	0.05	3.49	1.53	3.13	1.07	0.01	0.01	137.37	2.60
		28	1	2.54	0.05	3.56	0.01	0.01	138.95	9	20	1	1.75	0.20	0.05	3.94	1.55	3.72	1.56	0.01	0.01	139.62	0.67
		9	1	1.69	0.05	3.91	0.01	0.01	140.22	4	6	1	1.42	0.06	0.05	4.00	1.88	3.84	1.64	0.62	0.62	140.53	0.31
4	0.5	50	41	0.81	2.05	1.94	3.11	1.36	135.04	1	50	43	1.98	0.84	2.15	0.55	0.01	1.83	0.01	3.18	1.40	135.34	0.30
		35	10	0.75	0.50	2.59	3.09	1.18	139.90	1	50	8	0.84	0.84	0.40	2.21	0.01	3.06	0.01	2.73	0.95	140.30	0.40
		14	3	0.58	0.15	2.79	3.36	1.17	141.66	1	23	2	0.70	0.70	0.10	2.81	0.01	3.65	0.01	2.65	0.70	141.81	0.15
	0.7	1	50	1.98	2.50	0.01	3.44	1.41	135.15	50	50	20	0.87	0.50	1.00	3.57	2.28	2.64	0.76	1.84	0.94	137.31	2.16
		39	5	0.76	0.25	3.84	1.86	0.59	140.66	1	50	1	1.16	1.16	0.05	3.50	0.01	4.00	0.01	0.01	0.01	141.22	0.56
		10	2	0.49	0.10	3.56	2.74	0.79	141.89	5	9	1	0.50	0.09	0.05	4.00	1.74	3.82	1.50	2.12	0.75	142.07	0.18
	0.9	50	10	0.50	0.50	3.78	1.37	0.50	138.05	50	50	1	1.17	0.50	0.05	4.00	2.50	3.25	1.03	0.01	0.01	139.91	1.86
		34	1	1.17	0.05	4.00	0.01	0.01	141.25	1	33	1	0.87	0.87	0.05	3.59	0.01	4.00	0.01	0.01	0.01	141.40	0.15
		9	2	0.52	0.10	4.00	2.29	0.73	142.06	5	6	1	0.51	0.06	0.05	4.00	2.15	3.81	1.50	2.06	0.91	142.20	0.14
6	0.5	1	20	3.19	1.00	0.01	2.16	0.98	7.35	1	50	14	2.48	1.16	0.7	1.28	0.01	1.74	0.01	1.82	0.74	8.35	1.00
		24	7	1.02	0.35	1.92	2.46	0.95	17.13	20	34	4	1.10	0.34	0.20	2.74	1.36	2.59	1.03	1.78	0.71	18.12	0.99
		7	3	0.58	0.15	1.94	3.09	1.36	22.46	5	11	1	0.53	0.11	0.05	3.37	1.42	3.08	1.22	1.90	0.65	23.03	0.57
	0.7	50	1	1.20	0.05	2.71	0.01	0.01	12.75	1	50	1	1.67	0.50	0.05	3.35	0.01	2.82	0.95	0.01	0.01	14.83	2.08
		23	4	0.92	0.20	2.79	1.78	0.51	18.90	10	37	1	0.77	0.37	0.05	3.67	1.41	3.63	1.78	0.01	0.01	21.12	2.22
		6	2	0.53	0.10	2.57	2.67	0.88	23.28	3	9	1	0.43	0.09	0.05	4.00	1.52	3.81	1.71	0.58	0.46	24.10	0.82
	0.9	50	1	1.35	0.05	2.95	0.01	0.01	16.16	32	50	1	1.40	0.50	0.05	3.22	1.57	2.97	1.06	0.01	0.01	17.76	1.60
		24	1	1.05	0.05	3.49	0.01	0.01	21.37	6	19	1	0.58	0.19	0.05	3.86	1.45	3.64	1.57	0.01	0.01	22.50	1.13
		7	1	0.57	0.05	3.85	0.01	0.01	23.93	2	5	1	0.37	0.05	0.05	4.00	1.54	3.78	1.56	0.87	0.67	24.67	0.74
8	0.5	1	25	1.16	1.25	0.01	2.16	0.90	22.10	1	50	14	1.15	0.50	0.70	1.20	0.01	1.97	0.01	1.60	0.79	23.20	1.10
		50	1	0.57	0.05	3.11	0.01	0.01	31.09	1	50	1	0.51	0.51	0.05	2.48	0.01	3.22	0.01	0.01	0.01	32.42	1.33
		21	1	0.54	0.05	3.47	0.01	0.01	33.58	1	31	1	0.58	0.58	0.05	2.96	0.01	3.90	0.01	0.01	0.01	34.36	0.78
	0.7	1	25	1.16	1.25	0.01	2.16	0.90	22.10	1	50	1	0.74	0.50	0.05	2.28	0.01	2.82	0.01	0.01	0.01	29.28	7.18
		36	1	0.58	0.05	3.32	0.01	0.01	32.56	1	50	1	0.55	0.55	0.05	2.76	0.01	3.71	0.01	0.01	0.01	33.82	1.26
		14	1	0.53	0.05	3.69	0.01	0.01	34.20	10	10	1	0.54	0.10	0.05	3.76	2.31	3.66	1.61	0.01	0.01	34.37	0.17
	0.9	50	1	0.53	0.05	3.03	0.01	0.01	30.42	1	50	1	0.50	0.50	0.05	2.42	0.01	3.10	0.01	0.01	0.01	31.68	1.26
		26	1	0.56	0.05	3.46	0.01	0.01	33.32	1	40	1	0.60	0.60	0.05	2.95	0.01	3.96	0.01	0.01	0.01	34.23	0.91
		10	1	0.52	0.05	3.85	0.01	0.01	34.50	1	12	1	0.49	0.49	0.05	3.15	0.01	4.00	0.01	0.01	0.01	34.76	0.26

Table 3. (Continued)

Example No.	β_1	two-stage $\overline{X}$ chart								three-stage $\overline{X}$ chart													(B) −(A)
		n_y	n_x	h_y	h_x	L_y	L_x	W_x	EA (A)	n_{y_1}	n_{y_2}	n_x	h_{y_1}	h_{y_2}	h_x	L_{y_1}	W_{y_1}	L_{y_2}	W_{y_2}	L_x	W_x	EA (B)	
18	0.5	50	29	2.88	1.45	1.69	2.52	1.13	31.50	1	50	30	4.20	2.70	1.50	1.25	0.01	1.72	0.01	2.54	1.17	31.67	0.17
		35	9	2.74	0.45	2.10	2.74	1.03	36.78	1	40	9	2.74	2.74	0.45	1.49	0.01	2.23	0.01	2.71	1.01	36.94	0.16
		12	3	1.84	0.15	2.32	3.08	1.19	38.97	8	15	1	1.69	0.15	0.05	3.83	1.59	3.57	1.43	1.36	0.62	39.24	0.27
	0.7	50	22	2.74	1.10	2.21	2.20	0.85	33.19	49	50	10	3.24	0.50	0.50	3.41	1.69	2.80	0.69	0.38	0.38	34.83	1.64
		26	8	2.41	0.40	2.57	2.47	0.86	37.57	13	32	1	1.99	0.32	0.05	3.95	1.51	3.71	1.54	0.01	0.01	38.53	0.96
		8	3	1.63	0.15	2.64	2.92	1.12	39.34	5	8	1	1.50	0.08	0.05	4.00	1.70	3.72	1.40	1.00	0.70	39.65	0.31
	0.9	50	11	2.53	0.55	2.96	1.36	0.37	34.57	33	50	1	2.87	0.50	0.05	3.65	1.60	3.23	1.05	0.01	0.01	37.02	2.45
		21	7	2.21	0.35	3.00	2.12	0.70	38.09	9	21	1	1.79	0.21	0.05	4.00	1.54	3.83	1.61	0.01	0.01	39.06	0.97
		9	1	1.70	0.05	4.00	0.01	0.01	39.58	3	6	1	1.36	0.06	0.05	4.00	1.65	3.91	1.70	0.96	0.83	39.85	0.27
20	0.5	1	37	1.95	1.85	0.01	2.92	1.21	33.85	1	50	32	2.46	0.91	1.60	0.01	0.01	1.65	0.01	2.68	1.17	34.07	0.22
		30	8	0.72	0.40	2.31	2.72	1.02	36.97	27	45	3	0.86	0.45	0.15	3.35	1.70	3.05	1.04	1.66	0.48	37.20	0.23
		12	3	0.57	0.15	2.45	3.11	1.22	38.20	1	16	2	0.59	0.59	0.10	2.01	0.01	2.96	0.01	2.72	0.78	38.29	0.09
	0.7	1	38	1.92	1.90	0.01	2.93	1.23	33.85	1	50	23	1.20	0.69	1.15	1.85	0.01	2.63	0.01	2.08	0.97	34.94	1.09
		44	1	0.92	0.05	3.84	0.01	0.01	37.74	1	49	1	0.88	0.88	0.05	3.18	0.01	3.98	0.01	0.01	0.01	38.04	0.30
		10	2	0.53	0.10	3.28	2.45	0.75	38.38	4	10	1	0.46	0.10	0.05	4.00	1.54	3.92	1.72	1.41	0.61	38.52	0.14
	0.9	50	1	0.65	0.05	3.53	0.01	0.01	36.62	1	50	1	1.05	0.50	0.05	3.65	0.01	3.51	1.10	0.01	0.01	37.01	0.39
		30	1	0.80	0.05	3.97	0.01	0.01	38.05	8	25	1	0.59	0.25	0.05	4.00	1.40	4.00	1.78	0.01	0.01	38.21	0.16
		9	1	0.59	0.05	4.00	0.01	0.01	38.52	4	6	1	0.47	0.06	0.05	4.00	1.92	3.85	1.59	1.35	0.77	38.62	0.10
22	0.5	50	17	2.84	0.85	1.60	1.86	0.81	66.44	1	50	16	3.31	0.50	0.80	4.00	0.01	1.94	0.82	1.62	0.86	66.78	0.34
		26	7	2.06	0.35	1.88	2.32	0.94	69.35	19	32	3	1.95	0.32	0.15	2.96	1.36	2.62	1.01	1.31	0.57	69.68	0.33
		8	3	1.19	0.15	1.96	2.89	1.34	70.79	5	9	1	0.98	0.09	0.05	3.31	1.40	2.87	1.07	1.76	0.71	70.95	0.16
	0.7	50	10	2.49	0.50	2.35	1.05	0.39	67.47	47	49	1	3.10	0.49	0.05	2.95	1.50	2.55	0.77	0.01	0.01	68.83	1.36
		23	5	1.86	0.25	2.54	1.82	0.60	69.85	10	23	1	1.39	0.23	0.05	3.58	1.42	3.20	1.28	0.01	0.01	70.47	0.62
		6	2	1.00	0.10	2.46	2.54	0.87	71.02	3	6	1	0.78	0.06	0.05	3.87	1.49	3.38	1.24	0.87	0.63	71.24	0.22
	0.9	50	2	2.72	0.10	2.76	0.01	0.01	68.98	29	43	1	2.44	0.43	0.05	3.16	1.47	2.83	1.02	0.01	0.01	69.57	0.59
		23	1	1.96	0.05	3.29	0.01	0.01	70.47	6	15	1	1.08	0.15	0.05	3.78	1.43	3.37	1.34	0.01	0.01	70.82	0.35
		7	1	1.10	0.05	3.66	0.01	0.01	71.18	2	4	1	0.67	0.04	0.05	4.00	1.53	3.56	1.31	0.59	0.59	71.40	0.22
24	0.5	50	38	1.31	1.90	1.79	2.83	1.30	64.43	1	50	43	2.09	1.18	2.15	1.21	0.01	1.76	0.01	2.91	1.42	64.50	0.07
		50	9	1.33	0.45	2.82	2.46	1.04	66.58	1	49	9	1.17	1.17	0.45	2.33	0.01	2.89	0.01	2.49	1.07	66.69	0.11
		23	3	1.24	0.15	3.34	2.37	1.06	67.37	17	21	1	1.30	0.21	0.05	4.00	2.18	3.83	1.64	0.58	0.58	67.47	0.10
	0.7	50	26	1.07	1.30	2.62	2.28	1.01	64.99	49	50	21	1.44	0.50	1.05	3.30	1.88	2.63	0.72	1.63	0.97	65.43	0.44
		50	1	1.37	0.05	4.00	0.01	0.01	67.16	35	40	1	1.49	0.40	0.05	4.00	2.30	3.76	1.52	0.01	0.01	67.27	0.11
		17	1	1.32	0.05	4.00	0.01	0.01	67.53	11	12	1	1.24	0.12	0.05	4.00	2.38	3.90	1.78	0.70	0.70	67.58	0.05
	0.9	50	1	0.84	0.05	3.69	0.01	0.01	66.09	49	49	1	1.46	0.49	0.05	3.90	2.28	3.17	0.94	0.01	0.01	66.70	0.61
		36	1	1.40	0.05	4.00	0.01	0.01	67.35	22	30	1	1.40	0.30	0.05	4.00	2.17	4.00	1.87	0.01	0.01	67.42	0.07
		11	1	1.29	0.05	4.00	0.01	0.01	67.58	6	7	1	1.19	0.07	0.05	4.00	2.24	3.92	1.75	0.77	0.77	67.62	0.04

* 각 단의 1, 2, 3행은 c 값이 각각 0.5, 1, 2인 경우를 나타냄.

5. 민감도 분석

이 절에서는 여러 종류의 비용모수와 시간모수의 변화에 따라서 본 논문에서 제안한 성능변수와 대용변수를 이용한 3단계 $\overline{X}$ 관리도 경제적 모형의 설계모수와 단위 시간당 기대 순수입의 민감도를 알아보기로 한다. 제안된 모형의 설계모수 민감도 분석을 위해 <Table 2>의 예 2에서 $\beta_1 = 0.7$인 경우를 기준값으로 하고, 대용변수의 고정추출비용 및 변동추출비용은 성능변수의 10%에 해당한다고 가정하였다. 나머지 비용모수와 시간모수는 <Table 4>와 같이 변화시켜 설계모수 값과 단위 시간당 기대 순수입의 변화를 살펴보았다. <Table 5>에 정리되어 있는 민감도 분석 결과를 종합해 보면 다음과 같이 요약할 수 있다.

Table 4. Cost and time parameter values for sensitivity analysis

Parameter	Variations	Base
i_1	100, 125, 175, 200	150
i_2	0, 25, 75, 100	50
a_1	200, 275, 425, 500	350
a_2	250, 375, 625, 750	500
a_3	1.25, 2.5, 7.5, 10	5
a_4	0.25, 0.5, 1.5, 2	1
b_1	1.5, 6, 9	3.05
b_2	2, 8, 12	4.05
b_3	0.025, 0.1, 0.2	0.05
λ	0.002, 0.005, 0.02, 0.05	0.01

첫째, 단위 시간당 기대 순수입 $E(A)$에 가장 민감한 영향을 주는 모수는 관리상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 이상원인 발생률 λ이고 나머지 모수들은 영향이 작거나 별로 없다.

둘째, 1단계 표본크기 n_{y_1}은 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2에 의해, 그리고 성능변수 변동추출비용 a_4가 매우 낮을 때와 성능변수 추출시간 b_3가 매우 높을 때에 민감한 영향을 받고, 2단계 표본크기 n_{y_2}는 성능변수 변동추출비용 a_4에 의해 민감한 영향을 받으나, 3단계 표본크기 n_x에 민감한 영향을 주는 모수는 없다.

셋째, 1단계 표본추출간격 h_{y_1}은 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2, 성능변수 고정 및 변동추출비용 a_3와 a_4, 그리고 이상원인 발생률 λ에 의해 민감한 영향을 받고, 2단계 표본추출간격 h_{y_2}는 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2에 의해, 그리고 성능변수 변동추출비용 a_4가 매우 낮을 때와 성능변수 추출시간 b_3가 매우 높을 때에 민감한 영향을 받으나, 3단계 표본추출간격 h_x에 민감한 영향을 주는 모수는 없다.

넷째, 1단계 경고한계선과 조치한계선, 그리고 2단계 경고한계선은 모두 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2에 의해, 그리고 성능변수 변동추출비용 a_4가 매우 낮을 때와 성능변수 추출시간 b_3가 매우 높을 때에 민감한 영향을 받고, 2단계 조치한계선은 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2가 매우 낮을 때에 민감한 영향을 받는다. 3단계 경고한계선과 조치한계선은 관리상태 및 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_1과 i_2에 의해, 그리고 이상원인 발생률 λ가 매우 낮을 때와 거짓경보 확인 시간 b_2가 비교적 클 때에 민감한 영향을 받는다.

Table 5. Sensitivity analysis results

Parameter	Value	n_{y_1}	n_{y_2}	n_x	h_{y_1}	h_{y_2}	h_x	L_{y_1}	W_{y_1}	L_{y_2}	W_{y_2}	L_x	W_x	EA
i_1	100	1	25	5	2.72	2.72	0.25	2.34	0.01	2.74	0.01	2.10	0.58	90.89
	125	12	23	1	2.21	0.23	0.05	3.82	1.47	3.41	1.19	0.01	0.01	115.24
	150	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	175	12	24	2	1.69	0.24	0.10	3.81	1.47	3.44	1.22	0.01	0.01	162.64
	200	12	28	1	1.55	0.28	0.05	3.80	1.46	3.54	1.40	0.01	0.01	186.6
i_2	0	1	26	5	1.53	1.53	0.25	2.19	0.01	2.82	0.01	2.04	0.58	136.84
	25	12	25	2	1.69	0.25	0.10	3.78	1.46	3.45	1.27	0.01	0.01	138.39
	50	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	75	12	29	1	2.26	0.29	0.05	3.84	1.45	3.57	1.46	0.01	0.01	139.53
	100	12	25	2	2.84	0.25	0.10	3.89	1.46	3.48	1.28	0.01	0.01	140.08
a_1	200	12	29	1	1.91	0.29	0.05	3.80	1.45	3.56	1.45	0.01	0.01	140.43
	275	12	20	3	1.87	0.20	0.15	3.74	1.49	3.26	1.03	0.37	0.37	139.45
	350	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	425	12	23	3	1.91	0.23	0.15	3.78	1.47	3.38	1.18	0.18	0.18	138.07
	500	15	33	1	2.13	0.33	0.05	3.78	1.57	3.61	1.57	0.01	0.01	137.60
a_2	250	13	30	1	1.99	0.30	0.05	3.73	1.48	3.53	1.49	0.01	0.01	139.04
	375	12	29	1	1.93	0.29	0.05	3.77	1.45	3.54	1.46	0.01	0.01	139.02
	500	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	625	13	28	2	1.98	0.28	0.10	3.82	1.50	3.54	1.39	0.01	0.01	138.91
	750	12	29	1	1.92	0.29	0.05	3.85	1.46	3.59	1.44	0.01	0.01	138.98
a_3	1.25	9	20	3	1.43	0.20	0.15	3.69	1.40	3.20	1.11	1.12	0.53	139.01
	2.5	11	30	1	1.70	0.30	0.05	3.84	1.45	3.60	1.52	0.01	0.01	139.18
	5	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	7.5	14	24	2	2.16	0.24	0.1	3.76	1.53	3.41	1.19	0.01	0.01	138.74
	10	15	27	1	2.35	0.27	0.05	3.74	1.54	3.46	1.32	0.01	0.01	138.72
a_4	0.25	1	47	1	1.64	1.64	0.05	3.11	0.01	3.79	0.01	0.01	0.01	139.86
	0.5	16	33	1	1.71	0.33	0.05	3.83	1.58	3.66	1.52	0.01	0.01	139.54
	1	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	1.5	10	19	3	2.01	0.19	0.15	3.75	1.41	3.21	1.04	0.38	0.38	138.29
	2	10	23	1	2.29	0.23	0.05	3.77	1.40	3.36	1.25	0.01	0.01	138.21
b_1	1.5	13	36	1	1.97	0.36	0.05	3.80	1.49	3.70	1.72	0.01	0.01	141.09
	3.05	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	6	13	29	2	2.03	0.29	0.10	3.79	1.49	3.55	1.44	0.01	0.01	135.14
	9	12	26	1	2.00	0.26	0.05	3.81	1.46	3.49	1.32	0.01	0.01	131.56
b_2	2	12	25	1	1.91	0.25	0.05	3.73	1.45	3.41	1.29	0.01	0.01	139.03
	4.05	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	8	11	18	5	1.82	0.18	0.25	3.41	1.41	3.00	1.00	1.69	0.89	138.55
	12	12	23	4	1.90	0.23	0.20	3.68	1.47	3.30	1.18	1.26	0.69	138.62
b_3	0.025	12	26	2	1.90	0.13	0.05	3.96	1.45	3.55	1.32	0.01	0.01	139.24
	0.05	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	0.1	1	31	2	2.19	2.19	0.20	2.84	0.01	3.39	0.01	0.01	0.01	137.88
	0.2	1	50	1	4.51	2.00	0.20	2.41	0.01	2.93	0.01	0.01	0.01	132.68
λ	0.002	11	23	4	3.93	0.23	0.20	3.67	1.39	3.27	1.22	1.39	0.69	147.00
	0.005	11	23	3	2.52	0.23	0.15	3.86	1.42	3.43	1.20	0.27	0.27	143.71
	0.01	13	35	1	1.99	0.35	0.05	3.80	1.49	3.68	1.68	0.01	0.01	139.02
	0.02	13	29	1	1.49	0.29	0.05	3.71	1.49	3.49	1.43	0.01	0.01	130.34
	0.05	16	24	1	1.19	0.24	0.05	3.57	1.65	3.26	1.17	0.01	0.01	108.82

6. 결 론

본 논문에서는 고장시간의 분포가 지수분포를 따를 경우 성능변수와 대용변수를 교대로 사용하는 3단계 $\overline{X}$ 관리도의 경제적 설계 모형을 다루었다. 본 논문에서 제안한 모형은 먼저 1단계에서 대용변수를 사용하여 공정을 관리하다가, 만약 경고신호가 감지되면 계속 대용변수를 사용하되 표본의 크기는 늘리고 표본의 추출간격은 줄이는 2단계로 전환하며, 조치신호가 감지될 경우에는 성능변수를 사용하는 3단계로 전환한다. 그리고 만약 2단계와 3단계에서 경고신호나 조치신호가 감지되지 않으면 각각 1단계와 2단계로 전환한다. 마코프 연쇄를 이용하여 제안된 모형의 비용함수인 단위 시간당 기대 순수입의 수식을 유도하고, 다양한 수치 예에 대하여 이를 최대화하는 설계모수의 값을 유전자 알고리즘과 패턴서치 알고리즘을 사용하여 구하였다. Panagos 등(1985)에서 사용한 예를 확장한 24개의 수치 예에 대해 제안된 3단계 $\overline{X}$ 관리도 모형의 최적해를 2단계 $\overline{X}$ 관리도 모형인 Costa 모형의 최적해와 비교한 결과, 제안된 3단계 $\overline{X}$ 관리도 모형의 단위 시간당 기대 순수입 $E(A)$가 Costa 모형에 비해서 모두 더 높게 나타났는데, 특히 대용변수와 성능변수와의 상관관계가 비교적 높고($\beta_1 = 0.7$ 또는 0.9), 이상원인 발생에 따른 공정 변동이 미세한 경우($c = 0.5$)에 Costa 모형보다 3단계 $\overline{X}$ 관리도를 사용하는 것이 단위 시간당 기대 순수입 면에서 더 유리한 것으로 나타났다.

한편 $\beta_1 = 0.7,\ c = 1$로 가정하고 대용변수 추출 고정비용 및 변동비용은 성능변수의 10%에 해당하는 경우로 고정한 채 비용 및 시간 모수들을 변화시켜 민감도 분석을 수행한 결과, 단위 시간당 기대 순수입에 가장 민감한 영향을 주는 모수는 관리상태 하에서의 순수입 i_1과 이상원인 발생률 λ이었고, 그 밖의 설계모수에 비교적 민감한 영향을 주는 모수는 i_1과 λ 이외에도 이상상태 하의 단위 시간당 순수입 i_2, 성능변수 변동추출비용 a_4, 거짓경보 확인 시간 b_2, 그리고 성능변수 추출시간 b_3 등이었다. 따라서 모형의 최적해를 구하기 위해서는 이들 모수의 값을 정하는 데 특별히 신중해야 함을 알 수 있었다.

본 논문에서 제안한 모형에서는 $\overline{X}$ 관리도에 성능변수와 대용변수를 교대로 사용하는 방법을 사용했으나 추후의 연구에서는 T^2 관리도나 EWMA 관리도에도 동일한 방법론을 적용한 모형의 개발이 가능할 것으로 생각된다.

REFERENCES

Cinlar, E. 1975. Introduction to Stochastic Processes. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Costa, A. F. B. 1994. "$\overline{X}$ Charts with Variable Sample Size." Journal of Quality Technology 26: 155-163.

Costa, A. F. B. 1997. "$\overline{X}$ Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals." Journal of Quality Technology 29:197-204.

Costa, A. F. B., and De Magalhães, M. S. 2005. "Economic Design of Two-Stage $\overline{X}$ Charts : The Markov Chain Approach." International Journal of Production Economics 95:9-20.

Duncan, A. J. 1956. "The Economic Design of $\overline{X}$ Charts Used to Maintain Current Control of a Process." Journal of the American Statistical Association 51:228-242.

Fuller, W. A. 1987. Measurement Error Models. New York: Wiley.

Ho, C., and Case, K. E. 1994. "Economic Design of Control Charts: A Literature Review for 1981-1991." Journal of Quality Technology 26(1):39-53.

Holland, J. H. 1975. Adaptation in Natural and Artificial systems. Ann Arbor: University of Michigan PressI.

Hooke, R., and Jeeves, T. A. 1961. "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems." Journal of the Association for Computing Machinery 8:212-229.

Lee, J. H., and Kwon, W. J. 1999. "Economic Design of a Two-Stage Control Chart Based on both Performance and Surrogate Variables." Naval Research Logistics 46:958-977.

MATLAB. 2015. Global Optimization Toolbox. 2015. Natick: The Math Works, Inc.

Montgomery, D. C. 1980. "The Economic Design of Control Charts : A Review and Literature Survey." Journal of Quality Technology 12(2):75-87.

Montgomery, D. C. 2004. Introduction to Statistical Quality Control, 5th Edition. New York: Wiley.

Panagos, M. R., Heikes, R. G., and Montgomery, D. C. 1985. "Economic Design of $\overline{X}$ Control Charts for Two Manufacturing Process Models." Naval Research Logistics 32:631-646.

Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B. 1993. "An Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Chart." International Journal of Production Research 31:2895-2909.

Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. 1994. "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval $\overline{X}$ Control Scheme." Journal of Quality Technology 26:164-176.

Reynolds, M. R. Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C., and Nachlas, J. A. 1988. "$\overline{X}$ Charts with Variable Sampling Interval." Technometrics 30:181-192.

Ross, S. M. 1983. Stochastic Processes. New York: Wiley.

Saniga, E. M. 1989. "Economic Statistical Control Chart Designs with an Application to $\overline{X}$ and R Charts." American Society for Quality 31(3):313-320.

Yu, F. J., Rahim, M. A., and Chin, H. 2007. "Economic Design of VSI $\overline{X}$ Control Charts." International Journal of Production Research 45:5639-5648.

부록. 사용 기호의 정의

X: 제품의 주품질 특성치 또는 성능변수
Y: 성능변수와 상관관계가 있는 대용변수
n_x: 성능변수의 표본크기 ($\overline{X}$ 관리도)
n_{y_1}: 대용변수의 1단계 표본크기 ($\overline{Y}_{(1)}$관리도)
n_{y_2}: 대용변수의 2단계 표본크기 ($\overline{Y}_{(2)}$ 관리도)
h_x: 성능변수의 표본추출구간 길이 ($\overline{X}$ 관리도)
h_{y_1}: 대용변수의 1단계 표본추출구간 길이 ($\overline{Y}_{(1)}$ 관리도)
h_{y_2}: 대용변수의 2단계 표본추출구간 길이 ($\overline{Y}_{(2)}$ 관리도)
L_x: $\overline{X}$ 관리도의 조치한계선 계수
L_{y_1}: $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도의 조치한계선 계수
L_{y_2}: $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도의 조치한계선 계수
W_x: $\overline{X}$ 관리도의 경고한계선 계수
W_{y_1}: $\overline{Y}_{(1)}$ 관리도의 조치한계선 계수
W_{y_2}: $\overline{Y}_{(2)}$ 관리도의 조치한계선 계수
σ_X: 성능변수의 표준편차
σ_Y: 대용변수의 표준편차
μ_X: 관리상태 하에서의 성능변수의 평균
μ_Y: 관리상태 하에서의 대용변수의 평균
β_1: X와 Y간의 공분산에 비례하는 계수
λ: 이상원인 발생률
a_1: 이상원인의 발견 및 제거 비용
a_2: 거짓경보 확인 비용
a_3: 성능변수 고정추출비용
a_4: 성능변수 변동추출비용
a_3': 대용변수 고정추출비용
a_4': 대용변수 변동추출비용
b_1: 이상원인의 발견 및 제거 시간
b_2: 거짓경보 확인 시간
b_3: 성능변수 추출 시간

$b_3^{'}$: 대용변수 추출 시간

i_1: 관리상태 하에서의 단위 시간당 순수입

i_2: 이상상태 하에서의 단위 시간당 순수입

$E(T)$: 기대 주기 시간

$E(I)$: 주기당 기대 순수입

$E(FA)$: 주기당 평균 거짓경보 횟수

$E(A)$: 단위 시간당 기대 순수입

AT: 공정의 시작부터 이상상태가 발생하고 이를 감지할 때까지의 평균시간

AS: 평균 표본추출시간

m_x: 이상상태 하에서의 성능변수의 평균 표본추출횟수

m_{y_1}: 이상상태 하에서의 대응변수의 1단계 평균 표본추출횟수

m_{y_2}: 이상상태 하에서의 대응변수의 2단계 평균 표본추출횟수

$m_x^{'}$: 관리상태 하에서의 성능변수의 평균 표본추출횟수

$m_{y_1}^{'}$: 관리상태 하에서의 대응변수의 1단계 평균 표본추출횟수

$m_{y_2}^{'}$: 관리상태 하에서의 대응변수의 2단계 평균 표본추출횟수

p_{ij}: 상태 i에서 상태 j로 전이될 확률