

# Jin-Yuan Mathematics and Quanzhen Taoism

金元数学与全真道

Guo Shuchun 郭书春

Chinese Mathematics during the period of Jin (1115–1234) and Yuan (1271–1368) is an integral part of the high achievements of traditional mathematics during the Song (962–1279) and Yuan dynasties, which is another peak in the history of Chinese mathematics, following the footsteps of the high accomplishments during the Warring States period (475–221 BCE), the Western Han (206 BCE–24 ADE), Three Kingdoms (220–280 AD), Jin dynasty (265–420 AD), and Southern and Northern Dynasties (420–589 AD). During the Jin-Yuan period, Quanzhen Taoism was a dominating branch in Taoism. It offered certain political protection and religious comforts to many during troubled times; it also provided a relatively stable environment for intellectual development. Li Ye (1192–1279), Zhu Shijie (fl. late 13th C to early 14th C) and Zhao Youqin (fl. late 13th C to early 14th C), the major actors and contributors to the Jin-Yuan Mathematics achievements, were either heavily influenced by the philosophy of Quanzhen Taoism, or being its followers. In certain Taoist Classics, Li Ye read the records of the relations of a circle and nine right triangles which has been known as Dongyuan jiu rong 洞渊九容 of Quanzhen Taoism. These relations made significant contributions in the study of the circles inscribed in a right triangle, the reasoning of which directly led to the birth of the Method of Celestial Elements (Tianyuan shu 天元术), which further developed into the Method of Two Elements (Eryuan shu 二元术), the Method of Three Elements (Sanyuan shu 三元术) and the Method of Four Elements (Siyuan shu 四元术).

*Keywords:* Jin-Yuan Mathematics, Quanzhendao, Li Ye, Zhu Shijie, Zhao Youqin, Dongyuanjiurong, theory of inscribed circles of right triangles, tianyuanshu, eryuanshu, sanyuanshu, siyuanshu; 金元数学, 全真道, 李冶, 朱世杰, 赵友钦, 洞渊九容, 勾股容圆, 天元术, 二元术, 三元术, 四元术.

MSC: 00A30, 01A25, 01A99

## 1 金元数学概况

金元数学是中国传统数学继战国西汉、魏晋南北朝两个高潮之后的第三个高潮宋元数学的重要部分。它的主要成就是勾股测圆, 天元术, 二元术, 三元术, 四元术, 垛

积招差以及改进筹算乘除捷算法等等。它们超前其他文化传统几个世纪。金元数学的前期是宋元数学的两个中心之一——北方的太行山两侧的勾股测圆研究和天元术研究，后期则是综合两个中心的长处的进一步发展，从而达到了中国筹算数学的最高峰。

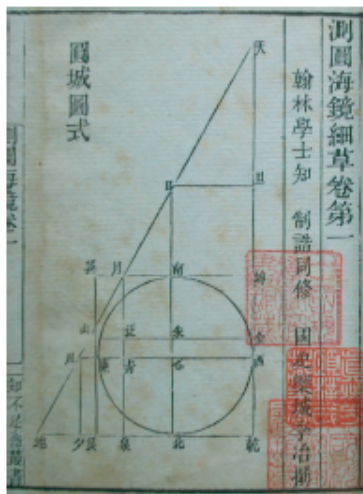


Figure 1. Figure of circular fortress ; 圆城图式

勾股测圆以洞渊九容为核心，讨论了圆与勾股形的 9 种相容关系。它源于西汉成书的《九章算术》 [1] 勾股章中一个已知勾股形的勾、股，求其内切圆的直径的问题。勾股容圆术给出的圆径公式是  $d = \frac{2ab}{a+b+c}$ 。宋元时代，勾股容圆成为重要的研究专题，人们考虑了勾股形的各种容圆情况，称为洞渊九容。李冶在此基础上撰《测圆海镜》， [2] 讨论了勾股形与圆的 10 种关系。除上述者外还有：圆心在勾上而圆切于股、弦，称为勾上容圆，圆径  $d = \frac{2a_1b_1}{b_1+c_1}$ ；同样，股上容圆  $d = \frac{2a_2b_2}{a_2+c_2}$ ，弦上容圆  $d = \frac{2a_3b_3}{a_3+b_3}$ ；圆心在勾股交点（垂足）而圆切于弦，称为勾股上容圆， $d = \frac{2a_4b_4}{c_4}$ ；圆切于勾及股、弦的延长线，称为勾外容圆， $d = \frac{2a_5b_5}{b_5+c_5-a_5}$ ；同样，股外容圆  $d = \frac{2a_6b_6}{a_6+c_6-b_6}$ ，弦外容圆  $d = \frac{2a_7b_7}{a_7+b_7-c_7}$ ；圆心在股的延长线上而圆切于勾、弦的延长线，称为勾外容圆半， $d = \frac{2a_8b_8}{c_8-a_8}$ ；同样，股外容圆半  $d = \frac{2a_9b_9}{c_9-a_9}$ 。以上 10 种容圆关系中，哪 9 种是“洞渊九容”的内容，哪一种李冶的补充，自清中叶以来，学术界有不同意见。无论如何，洞渊九容是金元数学关于勾股容圆这一专题研究的核心。这些成就在明朝虽未失传，然而在清末李善兰在《九容图表》 [3] 补充了另外 3 种容圆的情况， [4] 从而与贾宪的“勾股生变十三名图” [5] 中关于勾、股、弦三事全部可能的 13 种和差关系一一对应之前，约 600 年间关于这一课题的研究没有突破性的进展。

天元术是设未知数为天元一而列方程的方法。现今求方程<sup>1)</sup>的正根，中国古代称为开方术，是中国传统数学最为发达的分支。宋金元时期已能解 4 次及以上次数的方程，但如何从实际问题列出方程，一直难为着数学家。天元术的创立，使列方程的工

1) 古代的“方程”，现在称为线性方程组。《九章算术》有方程章，专门讨论线性方程组解法。

作程序化了。李冶对天元术的完善做出了贡献。后来数学家们又发展到含有天、地二元的二元术即二元高次方程组解法，含有天、地、人三元的三元术即三元高次方程组解法，朱世杰对天元术、二元术、三元术都有深入研究，进而创立含有天、地、人、物四元的四元术即四元高次方程组解法。这些成就明朝数学家看不懂，直到清中叶传统数学复兴，才被中国数学家重新关注。

垛积术是高等等差级数求和问题，招差术是以高阶等差级数求和研究为基础的高次插值法，朱世杰使其达到从未有的高度，超前欧洲同类成就 300 多年。

改进筹算乘除捷算法本来是适应商业发展的民间活动，它的发展和完善导致珠算盘和珠算术的产生，促进其发展，并逐渐取代了算筹和筹算。朱世杰等大数学家也关心这一课题。朱世杰的许多口诀与当今珠算中的口诀毫无二致。

以上这些成就，尤其是勾股容圆和天元术、二元术、三元术和四元术都与道教和道教思想尤其是全真道有着密切的关系。全真道是金元时期尤其是元初相当盛行的道教教派，它在金末元初的乱世对人们起到政治庇护与宗教慰藉的作用，也为知识分子特别是数学家提供了相对稳定的学术环境。自然，全真道的教义必然影响到他们。而上述数学成就的创造者、发展者李冶、朱世杰、赵友钦等或者受到道教思想，尤其是全真道的极大影响，或者就是全真道教徒。

## 2 李冶、朱世杰与全真道

现有著作传世而且成就最大的金元数学家是李冶（1192–1279）、朱世杰（活动于 13 世纪 70 年代 14 世纪初）、赵友钦（活动于南宋末年元朝初年）。赵友钦是师承确凿的全真道士，此不赘述。这里主要讨论李冶、朱世杰与道家、道教的关系。

### 2.1 李冶与道教

乱世堵塞了知识分子读经入仕的道路，儒家经典从个人发展的敲门砖变成了一种知识；同样，乱世本身和个人的遭遇也会使读书人反思过去的信仰，所走过的道路和作为。李冶身处金元交替的乱世，金亡后过了一段颠沛流离，粥饘不继，人所不堪的生活，以后又长期过着恬淡的“木石与居，麋鹿与游”的隐居生活，使他的思想与老庄和道教发生了共鸣。这类思想的阐发在他的《敬斋古今甞》[6]中占有相当大的比重。李冶熟悉全真道等内丹派的气功、胎息等养生内容，并身体力行。笔者曾经指出，他与元好问的诗作唱和“无异于谈论玄机的道人”。[7]洪万生先生指出：“无论李冶与全真道士的交往是否密切，他的‘天元术’研究以及其支撑的社会条件，离不开全真教所参与、经营的学术环境。”[8]2004 年，笔者撰《李冶的数学造诣与道家思想》一文，从李冶对道家的胎息法、摄养之道的实践，对“三一说”等的理解，对技与道的关系的论述，“推自然之理，以明自然之数”的数学研究方法的主张，以及从洞渊处接受勾股容圆的知识等方面，得出“李冶深受道家思想的熏陶，或者说李冶是一位有深刻道家思想的大儒”的看法。[9]

在写本文的提纲时，笔者进一步提出：“他流落忻、崞间十几年，很可能寓居于全

真道观，与全真道士的来往应该十分密切。”李冶“隐于崞山之桐川，聚书环堵中，闭关却埽”，[10]但笔者对“环堵”二字一直不甚了了。近读盖建民先生的《道教科学思想发凡》，其中关于“环堵”的解释，使笔者豁然开朗。盖先生说：

这“环堵”是何场所？现今一般不为人所知晓，其实乃是古代道门中人修炼隐居之所，是道教静室的一种。南北朝时期陶弘景所编撰的道教上清派经典《真诰》卷十八云：“所谓静室者，一曰茅屋，二曰方溜室，三曰环堵。”[11]环堵是道人闭关修行的场所。中起一屋，筑圜墙闭之，别开小门以通饮食，使人送也。居于这种环堵之中，可以和外界隔绝，专意修行。《庄子·庚桑楚》有一段话谈及“环堵之室”，“庚桑子曰：‘弟子何异于予？夫春气发而百草生，正得秋而万宝成。夫春与秋，岂无得而然哉？天道已行矣。吾闻至人，尸居环堵之室，而百姓猖狂不知所如往。’”疏云：四面环各一堵，谓之环堵也，所谓方丈室也。如死尸之寂泊，故言尸居。[12]金元全真道士热衷坐环，将住环者称为坐环先生。《盘山栖云王真人语录》记载了全真道士王志谨论道言论，其中多处讨论了坐环修行问题。“师云：古人学道，心若未通，不远千里求师参问。倘若针芥相投，心地明白，更无疑虑，然后或居环堵，或寄林泉，或乞市中，或立宫观，安心守道，更无变，此修真之上士也。”[13]坐环者长期居于环中，空对四壁，需要有极强的毅力和恒心，所以“人所不堪”，然而“冶处之如裕也”。由此可以窥见李冶聚书环堵安心学问的境界。[14]

可见，“环堵”是道士修行的方丈。当时北方更流行全真道。那么，李冶与全真道士有着密切的交往，并且就在全真道观中的“环堵”中聚书苦读，是确凿无疑的。他“老大以来得‘洞渊九容’之说”，亦当在某个全真道观中。

李冶晚年在自述自己一生的思想历程时说：

李子年二十以来，知作为文章之可乐，以为外是无乐也；三十以来，知攀取声华之可乐，以为外是无乐也；四十以来，知究竟名理之可乐，以为外是无乐也。今五十矣，覆取二十以前所读《论》、《孟》、六经<sup>2)</sup>等书读之，乃知囊诸所乐，曾夏虫之不若焉。[15]

李冶 40 岁是 1232 年，蒙古破钧州，他微服北渡，流落到忻、崞间。这之前二年，他考中了词赋科进士，在钧州（治今河南禹县）代理知事；之后二年，蒙古灭金。可见，从幼年到 40 余岁，李冶研读《论语》、《孟子》和“六经”，作文章，究名理，成长为“经为通儒，文为名家”的大学者，并从中得到乐趣。到他 50 岁的时候，已经度过了约十年的艰苦生活，其思想和人生观发生了重大变化，认为以往那些读经的乐趣，还不如夏天的虫子。这种变化一方面源于颠沛流离生活的切身体验，另一方面是身居道观中，耳濡目染的结果。当然，李冶没有皈依道教，也没有这方面的任何资料，但

2) 六经指六部儒家经典。《庄子·天运》云：“孔子谓老聃曰：‘丘治《诗》、《书》、《礼》、《乐》、《易》、《春秋》六经。’”

是，他的思想受到道家 and 道教的极大影响，则是无疑的。因此，在他生活安定之后，甚至受到元主忽必烈多次召见，并在 1261 年被任命为翰林学士，修国史，但只做了一年，便重新归隐山林。

李冶自幼喜爱数学，但前半生热衷于为文、声华、名理，他关注数学，但未见有什么作为。在李冶人生历程、思想发生这个大转变之后，也就是他 40-50 岁之间，所谓“老大以来”之时，他又在道观中发现了洞渊九容，遂致力于数学研究，在勾股容圆和天元术的研究中，做出重大贡献，先后著《测圆海镜》（1248 年）、《益古演段》（1259 年），[16] 成为现存最早的以天元术为主要方法的数学著作<sup>3)</sup>。

## 2.2 朱世杰和道家

朱世杰，燕（今北京市或其附近）人，生平不详。他在元统一中国之后，以数学名家周游湖海二十余年，是中国古代少见的职业数学家和数学教育家。他集 13 世纪南北两个数学中心之大成，先后著《算学启蒙》（1299 刊刻）[17]、《四元玉鉴》（1303 年刊刻）[18]，在前人的天元术、二元术、三元术基础上创造四元术，系统解决了高阶等差级数求和问题和高次招差法，是宋元数学高潮的最后一位大数学家，也是中国古代水平最高的数学家。

朱世杰的朋友祖颐在解释《四元玉鉴》（1303 年）的书名时说：“玉者，比汉卿之德术：动则其声清越以长，静则孚尹旁达而不有隐翳。鉴者，照四元之形象：收则其缊昭彻而明，开则纵横发挥而曲尽妙理矣。”[19] 祖颐以“玉”比拟朱世杰的德术：动则其声音清越而悠长，静则晶莹剔透而没有阴霾；鉴者，照耀四元之形象，收则其渊奥透彻而明亮，开则纵横捭阖尽情发挥而曲尽妙理。显然，这不是儒者的形象，而是道家的风采。在下面将看到，四元术的某些术语源于道教典籍。他在全中国游历，教授数学，应该以道观为各地的寓所。

## 3 数学成就与道教思想

正如前面所指出的，金元数学创造性的工作是以洞渊九容为核心的勾股测圆和天元术、二元术、三元术、四元术。他们与道教和道家思想都有密切的关系。

### 3.1 洞渊九容

“洞渊”的含义，一直困惑着中国数学史界：“‘洞渊’是人名或书名都已不可考”。[20] 洞渊实际上指洞天水府。据唐代道教学者杜光庭序称，晋代金坛马迹山道士王纂撰《太上洞渊神咒经》。入唐以后，以洞渊经系为传法系统形成洞渊一派，颇有声势，出现了韦善俊、叶法善等知名高道。[21] 洞渊派道教在宋元更加发展。历史上题目中有“洞渊”二字的道教经典很多。北宋虔州（今赣州）大中祥符宫道士李思聪有

3) 许多著述认为《测圆海镜》、《益古演段》是“对天元术进行系统叙述”的著作。此说似是而非。实际上，李冶在自序中没有一个字提到天元术。前者是为了解决勾股测圆问题，后者是为了解决田积问题，天元术只是其中的工具和方法。

《洞渊集》5卷，金元全真道士长笏子所著《洞渊集》五卷，还有《太上洞神洞渊神咒治病口章》、《太上上帝天蓬护命消灾神咒妙经》、《太上洞渊三昧神咒斋忏谢仪》、《太上洞渊三昧神咒斋清旦行道仪》、《太上洞渊三昧神咒十方忏仪》、《太上洞渊三昧帝心光明正印太极紫微伏魔制鬼拯救恶道集福吉祥神咒》等。[14]值得注意的是《冲妙先生李思聪集》中的《洞渊集》，其卷一有1050年撰写的《三界咏序》，曰：

夫三界者，应三才也。列八十一章者，应九九之数。玉清咏赞，三清旋象之神化；洞天咏著，五岳洞天之胜概；海山咏述，蓬壶阆苑之仙景。三才备矣，九数生焉。[22]

九九常常被作为数学的代称，九数是以《九章算术》为代表的数学的九个分支。可见李思聪是一位精通数学的道士。洞渊九容很可能是李思聪或其所在的洞渊派道教总结出来的，以后在道观中流传。因此，李迪先生认为“‘洞渊’大概为北宋虔州的洞渊大师李思聪”[23]，是有道理的。李思聪，号妙冲先生，北宋仁宗时人。其他有“洞渊”字样的道教经典都与数学了不相干，当然不会研究勾股容圆问题。李冶在道观中发现“洞渊九容”，补充了一种容圆方法，设计了170个勾股容圆问题，并以天元术为工具，列出方程解决之，遂成为《测圆海镜》。这个题目是李冶的一位朋友命名的，盖“取夫天临海镜之义”[2]。这个超凡脱俗的书名也有道教思想的影子。

### 3.2 天元术、四元术

李冶发现的《东平算经》是一部天元术的早期著作，它用19个汉字分别表示未知数的不同幂次。[6]其中以仙、明、霄、汉等符号来表示天元，以逝、泉、暗、鬼等符号来代表地元，明显受到道教的影响，带有浓厚的道教色彩。[14]同时，这种表达方式暗示着道教数学在本质上的宇宙图式功能，是道教对宇宙结构的数学表达。<sup>4)</sup>

后来人们简化天元术的表示，只用天元表示未知数的正幂，地元表示未知数的负幂。李冶说：“予遍观诸家如积图式，皆以天元在上，乘则升之，除则降之。”只有太原彭泽彦材法“立天元在下”。李冶说：

立法与古相反者，其意以为天本在上，动则不可复上。而必置于下，动则徐上，亦犹易卦乾在下，坤在上，二气相交而为太也。[6]

李冶说，彭泽彦才法是受《周易》八卦“乾在下，坤在上，二气相交而为太”[23]思想的影响。《周易》是道家思想的主要源泉之一。

天元术发展成熟后，以及二元术、三元术、四元术中，均用“太”表示常数项。“太”即太极，是道教中的术语。太极是最原始的混沌之气，源于《周易·系辞上》：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。”[23]天元术中表示未知数的天元，二元术中表示未知数的天元、地元，三元术中表示未知数的天元、地元、人元，四元

4) 这是笔者修改《李冶的数学造诣与道家思想》时汲取姜生教授的意见。

术中表示未知数的天元、地元、人元、物元，也都是道教术语。三元是道教的一个重要术语和思想概念。道教的三元思想渊源于周易的天、地、人三才说，《周易·说卦》云：“昔者圣人之作《易》也，将以顺性命之理。是以立天之道曰阴与阳，立地之道曰柔与刚，立人之道曰仁与义。兼三才而两之，故《易》六画而成卦。”[23]道门人士将《周易》的三才引入道教，泛指三种相互关联且意义重点的事物，称三元。[14]当然，对“三元”，道教不同的教派不同的著作有不同的解说，但以天元、地元、人元解释“三元”是相当普遍的一种。元代李鹏飞的《三元延寿参赞书》，以道教三元之说为全书的论述总纲，“人之寿，天元六十，地元六十，人元六十，共一百八十岁。”[24]“天”、“地”、“人”三元与“物”并列，在道教典籍《阴符经》[25]有一个经典的表达：“天地，万物之盗；万物，人之盗；人，万物之盗。三盗既宜，三才既安。”盖建民认为，这是说，天、地、人与万物之间存在着相互“盗取”互相依存的生态群落关系，强调要正确处理好天、地、人、万物之间的系统关系。那么作为天元术发展高峰的四元术，朱世杰的《四元玉鉴》天、地、人与物并列的“四象会元”方法极有可能也受到道教思想的影响。[14]总之，将天元、地元、人元、物元引入数学，表示未知数，应该说是受道教思想，特别是全真道思想影响的产物。

祖颐在概述天元术和四元术的发展史时说：

平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《铃经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之[3]，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之曷，索《九章》之隐，按天、地、人、物立成四元。[18]

这里提到的对天元术、四元术的发展做出贡献的数学家，包括李冶在内，都活动在太行山两侧，是全真道盛行的地方。无论这些数学家是不是全真道道士，他们与全真道道士的关系是不是密切，不仅全真道观在战乱中为许多数学家提供了相对安定的学术环境，而且道教特别是全真道教的思想直接催生了天元术，并发展为二元术、三元术和四元术，则是无疑的。

### 3.3 圆周率密率的验证

全真道道士赵友钦著《革象新书》，其卷五的“勾股测天”、“乾象周髀”两节是数学问题。“乾象周髀”介绍了历代各家的圆周率值，认为以祖冲之的 $\frac{355}{113}$ 最为精密。他从直径为1000寸的圆的内接正方形开始割圆，利用勾股定理，求出圆内接正8, 16, 32, …, 16384边形的边长，计算出圆内接正16384边形的周长为3141寸5分9厘2毫强，以113乘之，“果得三百五十五尺”，从而验证了祖冲之密率的精确性。他进而指出，“若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”[26]这是刘徽极限思想千年之后的再现。

不过，赵友钦的方法与刘徽稍有不同。刘徽是在用极限思想和无穷小分割方法完成《九章算术》圆面积公式的证明之后，从圆内接正六边形开始割圆，利用勾股定理，求出圆面积的近似值。然后代入《九章算术》的圆面积公式，反求出圆周长的

近似值，与圆直径相约，求得圆周率。[27] 赵友钦因为是验证祖冲之的密率，没有求圆面积的近似值，只求出某一正多边形的边长，进而算出其周长，以密率的分母乘之，恰为密率的分子，从而完成验证。

## 参考文献

1. Guo Shuchun, *Jiuzhang Suanshu Huijiao* (A critical edition of the Jiuzhang Suanshu), Shenyang: Liaoning jiaoyu chubanshe, 1990. Revised, 2004. Also printed in Taipei by Jiuzhang chubanshe. 九章算术. 郭书春汇校. 沈阳: 辽宁教育出版社.1990. 汇校 《九章算术》增补版. 沈阳: 辽宁教育出版社、台北: 九章出版社.2004.
2. Li Ye, *Ceyuan Haijing*, Vol. 4, Guo Shuchun (Ed.), *Zhōngguó kēxué jìshù diǎnjí tōng huì*, Shùxué juǎn, Book 1. Zhèngzhōu: Zhèngzhōu Hénán jiàoyù chūbǎnshè. 1993. [元] 李冶. 测圆海镜, 第4卷. 郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷, 第1册. 郑州: 郑州河南教育出版社.1993.
3. Li Shanlan, *Jiurong Tubiao*, *Gǔjīn Suànxué Cóngshū*, Book 48, 1898. [清] 李善兰. 九容图表. 古今算学丛书, 第48册.1898.
4. Qian Baocong, *About problems of Ceyuan Haijing*, Song yuan shuxueshi lunwenji, Beijing, Kesue chubanshe, 1965. In *Li Yan, Qian Baocong Kexueshi Quanji*, vol. 9, edited by Guo Shuchun, Liu Dun. Shenyang: Liaoning jiaoyu chubanshe, 1998, 703–706 钱宝琮. 有关《测圆海镜》的几个问题. 钱宝琮等. 宋元数学史论文集. 北京: 科学出版社.1965: 271–274. 郭书春、刘钝等主编. 李俨钱宝琮科学史全集, 第9卷. 沈阳: 辽宁教育出版社.1998: 703–706.
5. Yang Hui, *Xiángjiě Jiūzhāng Suànfǎ*, *Yijiatang Congshu Ben*. Guo Shuchun (ed.) *Zhōngguó Kēxué Jìshùshǐ · Shùxué Juǎn*, Book 1. Zhèngzhōu: Hénán jiàoyù chūbǎnshè, 1993, p. 974. [南宋] 杨辉. 详解九章算法. 宜稼堂丛书本. 郭书春主编. 中国科学技术史·数学卷, 第一册. 郑州: 河南教育出版社.1993: 974.
6. Li Ye, *Jìngzhāi Gǔjīn Tǒu*, Beijing, Zhōnghuá shūjú, 1995, p. 186–187. 李冶. 敬斋古今魁. 北京: 中华书局.1995:186–187.
7. Guo Shuchun, *Li Ye, Zhōngguó kēxué jìshùshǐ · Rénwù juǎn*, Beijing, Kesue chubanshe, 1998. 郭书春. 李冶. 中国科学技术史·人物卷. 北京: 科学出版社.1998.
8. Horng Wansheng, *Quánzhēnjiào and jīn yuán mathematics—Li Ye as an example*. Ed. Wáng Qiūguì, Proceedings of International Symposium on Jin Yong's Novels, Taipei, Yuǎn liú chūbǎn shìyè gǔfèn yǒuxiàn gōngsī, 1999, 67–83. 洪万生. 全真教与金元数学——以李冶(1192–1279)为例. 王秋桂主编. 金庸小说国际学术研讨会论文集. 台北: 远流出版事业股份有限公司.1999: 67–83.
9. Guo Shuchun, *Li Ye's Achievement in Mathematics and Taoism*. 郭书春. 李冶的数学造诣与道家思想.
10. Sū Tiānjué, *Guócháo míngchén shǐlüè*. [元] 苏天爵. 国朝名臣事略.
11. Táo Hóngjǐng, Zhēngào, Vol. 18, Daozang, Ming Wanli Edition, Photocopy of Shànghǎi Hánfēnlóu, 1923–1926. [晋] 陶弘景. 真诰, 卷十八. 道藏. 明万历刊本. 上海函芬楼影印.1923–1926.
12. Guōqìngfān, *Zhuāngzǐ Jìshì*, Book 4, Zhōnghuá Shūjú, 1961, 771–772. 郭庆藩. 庄子集释, 第4册. 北京: 中华书局.1961:771–772.



13. *Pánshānqīyún Wáng Zhēnrén Yǔlù*, *Dàoàng*, Ming Wanli Edition, Photocopy of Shànghǎi Hánfēnlóu, 1923–1926. 盘山栖云王真人语录, 道藏. 明万历刊本. 上海函芬楼影印. 1923–1926.
14. *Gài Jiàn mǐn, Dàojiào Kēxué Sīxiǎng Fāfán*, Beijing, Shèhuì Kēxué Wénxiàn Chūbǎnshè, 2005. 盖建民. 道教科学思想发凡. 北京: 社会科学文献出版社. 2005.
15. Yi Ye, *Fànshuō*, Quoted from [6]. [元] 李冶. 泛说. 转引自 [6].
16. Yi Ye, *Yigu Yanduan*, Ed. by Guo Shuchun, *Zhōngguó Kēxué Jìshù Shǐ* (History of Science and Technology in China), Mathematics, Book 1, Zhèngzhōu: Hénán jiàoyù chūbǎnshè, 1993, 873–941. [元] 李冶. 益古演段. 郭书春主编. 中国科学技术史·数学卷, 第1册. 郑州: 河南教育出版社. 1993: 873–941.
17. Zhu Shijie, *Suanxue Qimeng*, Ed. by Guo Shuchun, *Zhōngguó Kēxué Jìshù Shǐ* (History of Science and Technology in China), Mathematics, Book 1, Zhèngzhōu: Hénán jiàoyù chūbǎnshè, 1993, 1123–1200. [元] 朱世杰. 算学启蒙. 郭书春主编. 中国科学技术史·数学卷, 第1册. 郑州: 河南教育出版社. 1993: 1123–1200.
18. Zhu Shijie, *Siyuan Yujian*, Ed. by Guo Shuchun, *Zhōngguó Kēxué Jìshù Shǐ* (History of Science and Technology in China), Mathematics, Book 1, Zhèngzhōu: Hénán jiàoyù chūbǎnshè, 1993, 1205–1280. Also, *Siyuan Yujian in Chinese and English*, Modern translation by Guo Shuchun, Shenyang: Liaoning jiaoyu chubanshe, 2005. [元] 朱世杰: 四元玉鉴. 郭书春主编. 中国科学技术史·数学卷, 第1册. 郑州: 河南教育出版社. 1993: 1205–1280. 又, 中英文对照本 《四元玉鉴》. 郭书春今译, 陈在新英译. 沈阳: 辽宁教育出版社. 2005.
19. Zu Yi, *Postface of Siyuan Yujian*, See [18] 祖颐. 《四元玉鉴》后序. 见 [18].
20. Qian Baocong, *Zhōngguó Shùxuéshǐ* (History of mathematics in China), Beijing, Kexue Chubanshe, 1964, p. 175. Also Guo Shuchun, Liu Dun (Eds.) *Li Yan, Qian Baocong Kexueshi Quanji*, Book 5, Shenyang: Liaoning jiaoyu chubanshe, 1998, p. 194. 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京: 科学出版社. 1964: 175. 又: 郭书春、刘钝主编: 《李俨钱宝琮科学史全集》, 第5册. 沈阳: 辽宁教育出版社. 1998: 194.
21. Quoted from [14]. 转引自 [14].
22. Li Sicong, *Dong Yuanji*, Daozang, Ming Wanli Edition, Photocopy of Shànghǎi Hánfēnlóu, 1923–1926. [北宋] 李思聪. 洞渊集. 道藏. 明万历刊本. 上海函芬楼影印. 1923–1926.
23. Li Di, *Li Ye, A Mathematician of China in 13<sup>th</sup> century*, *Shuxue Tongbao*, 1979, 3. 李迪. 十三世纪我国数学家李冶. 数学通报. 1979, 3.
24. Li Pengfei, *Sānyuán Yǎnshòu Cānzàn Shū*, 1291, Daozang, Ming Wanli Edition, Photocopy of Shànghǎi Hánfēnlóu, 1923–1926. 李鹏飞. 三元延寿参赞书自序. 1291. 道藏. 明万历刊本. 上海函芬楼影印. 1923–1926.
25. Huángdì Yīnfújīng, Daozang, Ming Wanli Edition, Photocopy of Shànghǎi Hánfēnlóu, 1923–1926. 黄帝阴符经, 道藏. 明万历刊本. 上海函芬楼影印. 1923–1926.
26. Zhao Youqin, *Géxiàng Xīnshū*, Siku Quanshu Wenyuange Printing, Taipei, Photocopy of Shāngwùyīnshūguǎn, 1986. [元] 赵友钦. 葑象新书. 四库全书文渊阁本. 台北: 商务印书馆影印. 1986.
27. Guo Shuchun, *Liu Hui, the Master of Mathematics in Ancient Times*, Jinan: Shandong Kexue Jishu Chubanshe, 1992, 222–226. Revised and printed in traditional chinese, Taipei, Mingwen Shuju, 1995, 222–226. 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南: 山东科学技术出版社. 1992: 222–226. 繁体字修订本. 台北: 明文书局. 1995: 222–226.