한국학교수학회논문집 제 19 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 19, Number 4, 373-394, December 2016

GeoGebra를 활용한 논증기하와 연결된 해석기하 수업자료 개발 및 적용

김은혜[1)] 이수진[2)]

현 고등학교 1학년 기하교육 실제를 보면 도형의 방정식에 대한 개념 이해와 그와 관련된 문제를 대수적인 방법에 치중하여 해결하도록 지도하고 있는데, 이러한 접근방법은 좌표평면이 도입되는 해석기하의 특성을 고려하더라도 개념을 처음 다루는 학생들에게 자연스럽지 않으며 너무 추상적이다. 본 연구에서는 학생들이 중학교에서 경험한 논증기하 중심의 사고를 고등학교에서 자연스럽게 연결하여 사용할 수 있도록 문헌연구를 토대로 논증기하와의 연결성을 강조한 GeoGebra 기반 해석기하 수업자료를 개발하고 이를 실제 학교 수업 현장에 적용하여 그 안에서 나타나는 학생들의 특징을 관찰하였다. 분석 결과, 학생들은 자신들의 직관적인 이해를 기반으로 중학교에서 학습한 삼각형 닮음의 성질을 이용하여 직선의 기울기가 일정하다는 성질을 유도해 낼 수 있었으며, 학생 주도적인 정당화 활동을 하는 모습을 보였다. 물론 그 안에서 교사의 적절한 발문과 GeoGebra의 활용이 중요한 역할을 하였다. 본 연구결과를 토대로 향후 중・고등학교 기하 영역 수학교과서의 변화 방향을 제시하고 이를 통해 고등학교 1학년 학생들이 도형의 방정식 단원에서 배우게 될 해석기하의 수학적 의미를 좀 더 깊이 이해하고, 기하 영역 내 연결성을 인식하여 수학적 사고력을 길러주는데 도움을 줄 것으로 기대한다.

주요용어 : 논증기하, 해석기하, GeoGebra

Ⅰ. 서론

학교수학에서 기하는 논증기하, 해석기하, 변환기하 등 다양한 접근이 가능한 영역이다. 기하교육의 중요성에 대해서는 많은 연구에 의해서 제기되어져 오고 있는데, 이중 도형의 성질을 대수적 문제로 번역하여 생각하는 해석기하는, 내용을 단순화 시켜 문제해결을 용이하게 해주는 측면이 있다. 2009, 2015 개정 교육과정을 포함한 최근 교육과정에서는 해석기하를 고등학교 1학년에서 집중적으로 다루고 있다. 고등학교 1학년에서는 중학교 3학년까지 익힌 도형에 관한 여러 성질과 관계를 Descartes의 해석기하적인 관점에서 대수적인 방법으로 접근하여 기하학을 새롭게 조명해보고, 직관적인 사고에서 논리적이고 창조적인 사고로

---

* MSC2010분류 : 97U50
1) 여도중학교 (kimeunhye@hanmail.net)
2) 한국교원대학교 (sjlee@knue.ac.kr), 교신저자

발전시키는 것을 목적으로 한다(교육과학기술부, 2008). 그러나 현 고등학교 1학년 기하교육 실제를 보면 도형의 방정식에 대한 개념 이해와 그와 관련된 문제를 대수적인 방법으로만 해결하도록 지도되고 있으며, 이러한 접근 방법은 개념을 처음 다루는 학생들에게 자연스럽지 않으며 너무 추상적이다. 또한, 기하학을 대수적인 방법으로 접근만 할 뿐 해석기하학을 새롭게 조명해보거나, 기하학의 여러 가지 접근 방법을 제시하지 않아 서로 다른 안목을 제공하지 못하는 실정이다(우정호, 1998). 이러한 현상의 원인은 여러 가지로 생각해 볼 수 있을 것이다. 교사들 자체가 그러한 연결성에 대하여 인식하지 못하고 있을 수 있고, 인식하고 있더라도 교과서의 구성 방식이나 교사가 수업에서 사용하는 교수학습 자료가 학생들이 중학교에서 배운 논증기하를 활용할 수 있는 기회를 충분히 제공하지 못하는 것이 원인일 수도 있다. 실제로 도형의 방정식 단원은 학생들이 중학교에서 배운 논증기하를 적극적으로 활용 할 수 있는 부분임에도 불구하고, 규칙과 절차를 적용한 단순한 기계적 처리를 하는 방법론의 지도가 되기 쉽고 이러한 영향으로 학생은 도형의 방정식 단원을 학습할 때 기하적인 부분이 대수적인 부분에 가려 도형의 성질에 관한 개념 이해가 제대로 되지 못할 수 있다. National Council of Teachers of Mathematics(이하 [NCTM])(2000)의 과정규준인 연결성 규준에 따르면 학생들은 서로 다른 영역의 수학 사이의 연결성을 이해할 수 있을 때, 수학을 통합된 전체로 생각할 수 있다고 한다. 그리고 수학에서 가장 중요한 연결은 기하와 대수 사이의 연결이라고 제시하면서, 학생들은 논증기하와 해석기하를 분리하여 학습하지만 각 체계 사이를 비교하여 번역하는 가능한 많은 기회가 제공되어야 한다고 제안하고 있다. 도형의 방정식 단원에 대한 연구들은 다양한 관점으로 진행되었는데, 기하의 상호 번역의 필요성에 관한 연구로 이수진(2005)은 해석기하 학습에서도 대수적 접근방법과 함께 기하적 직관력과 개념과의 상호관련성을 길러주도록 지도해야 한다고 주장하였고 유정윤(2005)은 초 · 중 · 고등학교에 걸친 연계성을 고려한 연구에서 해석기하와 논증기하, 변환기하 간의 상호번역의 필요성을 지적하였다. 공학적 도구를 통한 효과적인 지도 가능성에 대하여 윤인준·고상숙(2012)은 탐구형 소프트웨어를 사용한 학습 환경에서 학습부진학생들의 논증기하와 해석기하의 관계적 이해를 통한 해석기하의 개념형성을 지도할 수 있음을 제시하였고, 도정철·손홍찬(2015)은 기하수업에서 GSP를 활용하여 역동적으로 변하는 모습을 관찰하면서 기하문제를 논증기하적으로 재구성했을 때 문제를 해결하는데 있어 더 자신감을 갖고 해결할 수 있었다고 보고하고 있다. 한편, 고등학교 도형의 방정식단원에서 논증기하 활용의 필요성을 주장한 이론적 연구나 수학 부진 학생을 지도하기 위한 방안으로 논증기하를 활용한 교수학습자료를 개발하고 적용한 연구는 있으나, 도형의 방정식 전반적인 부분 즉, 개념의 도입부터 적용까지 논증기하를 활용한 교수·학습 과정을 개발하고 적용하여 학생들의 특징을 심도 깊게 살펴본 연구는 부족한 실정이다. 이에 본 연구에서는 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원에서 논증기하와의 연결성을 강조한 해석기하 교수·학습 자료를 개발하고 이를 실제 학교 수업에 적용하였을 때에 수업에 참여한 학생들에게 나타난 특징을 면밀하게 살펴보았다.

구체적인 연구문제는 다음과 같다.

1) 도형의 방정식 단원에서 논증기화와의 연결성을 강조한 해석기하 수업 자료는 무엇인가?

2) 기하 수업 모형을 활용한 도형의 방정식 학습 과정 중 나타나는 학생들의 특징은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학교수학에서 논증기하(유클리드 기하)와 해석기하

기원 전 3세기경에 확립된 유클리드 기하는 《Euclid 원론》에서 기본적인 수학적 대상을 정의로서 기술하고, 직관적으로 자명한 진리를 공리와 공준으로 상정하였다. 그리고 정의(23개), 공리(9개), 공준(5개)으로부터 수학의 모든 명제들을 체계적·연역적으로 전개하였다. 책의 서두에 서술되어 있는 정의, 공준, 공리로부터 모든 명제가 연역되며, 원칙적으로 어떤 추가적인 가설도 허용되지 않는 방법을 적용하였다(김남희 외, 2011). 유클리드 기하는 좌표를 사용하지 않고 주어진 그림에 보조선이나 그 밖의 보조물을 만들어 도형의 성질을 탐구하여 왔는데, 이는 그리스 이래 수학 학문의 전형으로 여겨져 왔으며 지금까지 수학교육의 주요 내용으로 자리 잡고 있다. 한편, 유클리드 기하는 수학의 논리적 구성 방법과 학문의 이론적 구성을 배우기에는 훌륭한 교재로 여겨져 왔으나, 수학교육학적 측면에서는 수학적 성질의 발견 과정이 숨겨져 있어 학생의 수준에 비해 너무 형식적이고 엄밀하여 기하교육을 형식적 교육에 머물게 만든다는 점에서 비판이 제기되어왔다. 이는 18세기 이후 유클리드 기하를 학교수학에서 다루는 것의 적절성에 대한 논의와 함께 학교수학에서 다룰 때에 유의해야 할 점 등 그 개선점에 대한 활발한 연구로 이어졌다(우정호, 1998). 우리나라의 경우, 유클리드 기하는 중학교 2학년에서부터 다루게 되는데 이는 학생들이 가장 어려워하고 기피하여 학업성취도가 낮은 분야 중 하나이며(류성림, 1998), 이는 실제 교육과정 개발에도 영향을 미쳐 2007 개정 수학과 교육과정을 비롯하여 현재까지 점점 약화하여 강조하고 있는 추세이다. 예를 들면 7차 교육과정의 8-나 단계의 '닮음의 응용'편에서 '평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 증명하고, 이를 활용할 수 있다'와 '삼각형의 중점연결 정리를 증명하고 이를 활용할 수 있다'(교육부, 1997)는 2007 개정 교육과정의 중학교 2학년 '닮음의 활용'에서 '평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다'(교육인적자원부, 2007)와 같이 '증명', '삼각형의 중점연결 정리'등의 용어를 삭제하였다. 2009 개정 교육과정에서도 중학교 1~3학년 군의 '닮음의 활용'에서는 '평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다'와 '닮은 도형의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다'(교육과학기술부, 2011)와 같이 더욱 약화되어 서술되었는데, 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)에서는 이 규준마저도 삭제하고 교수학습과정상의 유의점에 실생활 문제를 다루더라도 약화하여 다루도록 권장하고 있다. 또한, 연역적 증명보다는 학생들이 다양한 방법으로 자신이 이해한 것을 정당화할 수 있는 능력을 지향하고 있다.

한편 해석기하학 개념의 핵심은 기하학의 정리를 증명할 때 명확하게 드러난다. 즉 방정식 $f(x,y)=0$ 의 대수적이고 해석적인 성질은 그에 대응하는 곡선의 기하학적인 성질 사이에서 평면의 곡선과 두 개의 변수를 갖는 방정식의 대응을 가능하게 한다. 따라서 기하학의 정리를 증명하는 일은 대수학이나 해석학에서 그에 대응하는 정리로 자연스럽게 이전하게 되어 예상하지 못했던 새로운 기하학적인 결과들을 발견하게 된다. 이처럼 해석기하학은 기하학에서 많은 문제들을 해결하고 새로운 결과들을 발견해내는데 고도로 생산적인 방법으로 여겨지고 있다(이수진, 2005). NCTM(2000)에서도 학교수학의 기하에 대한 관점을 종합적 관점과 대수적 관점 두 가지로 제시하고 있는데. 종합적 관점에서의 기하는 종합기하[3]의 개

3) Descartes의 해석기하(또는 좌표 기하)와 대비되는 관점에서 유클리드 《원론》의 기하학을 종합 기하(또는 논

념적 기초위에서 해석기하, 벡터 기하 등이 도입되어야 하며, 학생들은 일상생활과 교과 활동에서 필요한 공간기능을 발달시키기 위해 도형을 시각화하고 학습하는 기회를 가져야 한다고 제시하고 있다. 구체적인 모델과 다른 실세계의 대상은 학생들로 하여금 추상적인 개념을 학습하게 한다. 즉, 구체적인 모델과 다른 실세계의 대상을 활용한 경험은 추상적인 개념을 학습하는데 필요한 기하학적 직관을 개발하기 위한 토대가 되어야 한다고 제시하고 있다. 한편, 대수적 관점에서의 기하를 취급함으로써 종합적(synthetic)인 표상과 좌표적(coordinate)인 표상 사이를 번안(translation)하는 활동을 통해 도형의 성질을 유도할 수 있어야 한다. 또한 변환(transformation)을 사용하여 합동과 닮음도형을 확인할 수 있고, 유클리드 변환의 성질을 분석하고 벡터와 관련시킬 수 있어야 한다(황금일, 2006).

2. 기하학습에서 논증기하와 해석기하의 결합

윤인준·고상숙(2012)은 Skemp이론에 기반을 두고 학습 부진 학생들의 해석기하 개념의 이해를 도울 수 있도록 해석기하의 학습에 있어서 논증기하와의 결합을 시도하였다. 학습부진학생들의 해석기하 개념에 대한 관계적 이해를 돕기 위해 탐구형 소프트웨어(GSP와 Excel)를 활용하여 중학교의 논증기하에 대한 개념과 결합하여 지도할 수 있음을 주장하고, 학습부진학생들의 스키마 구성을 위해 수준이 낮은 직관기하에서부터 경험하게 하여 스스로 실험을 통하여 자신의 예측에 맞춰가는 활동은 관계적 이해(relational understanding)를 하게 할 수 있는 적합한 활동임을 제시하였다. 특이할 만한 것은 학습부진학생들이 탐구형 소프트웨어를 활용하여 논증기하를 결합한 개념의 관계적 이해가 되었더라도 관련된 다음 개념학습에 대한 연결이 잘 이루어 지지 않아 필요에 따라 도구적 이해가 효과적일 수 있음을 제시하였다. 도정철·손홍찬(2015)은 탐구형 소프트웨어(GSP)를 활용하여 수준별 집단의 기하에 관한 문제해결에 있어서 논증기하를 활용할 수 있음을 사례연구를 통해 제시하였다. 이와 관련해서 GSP를 활용하여 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 도움을 준 측면으로, 대수식으로 풀 수 없는 문제를 기하학적으로 해석하며 GSP의 화면에 구현해봄으로써 문제 해결의 실마리를 찾을 수 있었던 경우와 평소에 대수식의 계산, 변형이 의미하는 바를 기하적, 또는 동적으로 이해하지 못하고 '무슨 공식을 이용해서 어떻게 풀까'에만 관심을 기울인 것에 대한 한계를 인식하는 기회로 작용하였음을 제시하였다. 이는 해석기하와 논증기하의 결합을 통해 문제 해결의 유연한 접근을 도울 수 있음을 보여주고 있다. 권영인·서보억(2007)은 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원을 학습한 학생들의 문제해결 방법에 대한 분석을 토대로 해석기하에서 논증기하의 활용가능성을 높이기 위한 다음의 네 가지 접근방법을 제시하였다.

- 개념 도입의 활용
- 문제해결을 위한 정보의 수집에서의 활용
- 문제해결을 위한 정보의 처리에서의 활용
- 문제해결 후 정보의 파지에서의 활용 (p. 457)

즉, 이들은 해석기하개념의 도입에 있어서 관련 논증기하 내용과 결합을 이루어 지도할

증 기하)로 명명하기도 한다(김남희 외, 2011).

수 있으며, 문제해결에 있어서 Krutetskii(1976)가 제시한 정보수집, 정보처리, 정보파지의 과정에 따라 논증기하를 해석기하와 결합할 수 있음을 강조하였다. 먼저 정보수집에 있어서 문제해결 상황에서 '문제에서 주어진 정보 찾기', '구해야 할 것 찾기', '주어진 정보와 구해야 할 것으로부터 관련성 찾기' 등을 논증기하의 활용을 통해 가능함을 제시하고, 정보처리에 있어서 문제해결 과정에서 논증기하와 해석기하의 결합을 통해서 다양한 풀이 방법의 탐색이 가능함을 제시하였다. 마지막으로 정보파지라는 것은 문제를 해결한 후 문제에서 어떤 정보를 기억할 것인가와 관련되는데 문제를 해결하는 과정에서 논증기하와 해석기하의 결합을 통해 의미 있는 수학적인 풀이과정과 풀이방법의 기억에 도움을 줄 수 있다.

Ⅲ. 논증기하를 활용한 해석기하 지도 수업자료 개발

논증기하와의 연결성을 강조한 도형의 방정식 단원에서의 해석기하 수업자료를 개발(연구문제 1)하기 위하여 먼저 자료 개발 목표와 방향을 설정하고, 그에 따른 5차시 수업 자료를 개발하였다. 본 절에서는 연구진이 개발한 수업자료의 개발 원리 4가지를 설명한 후에, 각 차시별 학습주제와 학습목표가 무엇이었고, 차시별 학생들의 구체적인 활동은 무엇이었는지 논의하고자 한다.

1. 자료 개발 목표 및 개발 방향

본 연구에서 개발하고자 하는 '도형의 방정식' 단원의 학습자료 및 수업 모형의 목적은 학생들이 중학교에서 배운 논증기하를 통해 해석기하의 기하학적 의미를 올바르게 이해하고 해석기하와 논증기하의 연결성을 스스로 발견하는 능력을 기르고자 함이다. 이를 위해 개발된 자료의 주요 개발 방향은 다음과 같다.

1) 해석기하의 기하학적 의미와 관련된 논증기하 내용 탐구기회 제공

'도형의 방정식' 단원에서 배우게 되는 대수식을 공식으로만 이용하는 것이 아니라 관련된 논증기하 요소를 결합하여 기하학적 의미를 탐구할 수 있도록 먼저 단원에서 학습하게 될 개념의 기하학적 의미와 연결되는 논증기하 요소를 추출하고 각 차시별로 필요한 논증기하 요소를 배치하여 본시학습에서 학습하게 될 해석기하 개념의 기하학적 의미와 관련된 논증기하 내용을 발문하거나 직접 탐구 하는 기회를 제공하였다. 다음은 '도형의 방정식' 단원의 구성과 '단원 내용의 기하학적 의미의 바탕이 되는 논증기하 내용(중학교 내용)과의 관계를 권영인·서보억(2007)에서 제시한 내용을 참고하여 보다 세부적으로 제시한 것이다.

<table>
<tr><th>구분</th><th>‘도형의 방정식’ 학습내용</th><th>관련된
논증기하 요소</th><th>문제 해결에
자주 등장하는
논증기하 요소</th></tr>
<tr><td rowspan="2">평면
도형</td><td>두 점 사이의 거리</td><td>피타고라스의 정리의
활용(중3)</td><td rowspan="6">·수직이등분선의
성질 (중2)
·각의이등분선의
성질 (중2)
·삼각형의 내심
(중2)
·삼각형의 외심
(중2)</td></tr>
<tr><td>선분의 내분점과 외분점</td><td>닮음과 삼각형의 닮음의
성질(중2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">직선의
방정식</td><td>직선의 방정식</td><td>도형의 기초(중1)</td></tr>
<tr><td>두 직선의 평행과 수직,
점과 직선 사이의 거리</td><td>도형의 위치관계(중1)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">원의
방정식</td><td>원의 방정식</td><td>원의 성질(중3)</td></tr>
<tr><td>원과 직선의 위치관계</td><td>평면도형의 성질(중1)</td></tr>
</table>

[그림III-1] 도형의 방정식 단원의 구성과 논증기하 내용(중학교 내용)과의 관계

2) 학습 순서의 재구성

해석기하에서의 직선의 방정식은 중학교 1학년에서 다루었던 도형으로서의 직선을 좌표평면상에서 기울기를 이용하여 대수적으로 표현하는 과정에서 시작된다(윤인준, 2011). 여기서 도형으로서의 직선은 초등학교에서 ‘선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선’으로 정의하고 중학교에서는 한 점을 지나는 직선은 무수히 많으며, 두 점을 지나는 직선은 단 하나로 결정됨을 학습한다. ‘도형의 방정식’ 단원에서 직선의 방정식을 학습할 때, 두 점에 의해 단 하나로 결정된 직선을 대수적으로 표현하는 과정에서 시작되는 것이 논증기하와의 연결성 입장에서는 자연스럽다고 볼 수 있다. 따라서 직선의 방정식의 학습 순서를 ‘두 점을 지나는 직선의 방정식’ 을 먼저 학습하고 두 점을 지나는 직선의 대수적 표현 결과 자연스럽게 ‘한 점을 지나는 직선의 방정식’까지 학습자가 깨달을 수 있도록 학습 순서를 재구성하였다. [그림 III-3]과 같은 이러한 학습과정은 도형으로서의 직선(논증기하적 요소)과 직선의 방정식(대수식)개념 연결의 어려움을 완화시켜줄 수 있을 것으로 기대하였다.

순서 재구성

내용		내용
도형으로서 직선이 유일하게 결정되기 위한 최소의 조건이 두 점이 주어졌을 때라는 사실을 고려하여 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	↔	③일차방정식 $ax+by+c=0$ ($a\neq 0$또는 $b\neq 0$) 의 그래프가 나타내는 도형이 직선임을 이해한다.
↕		
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.	↔	

[그림III-2] 논증기하와의 연결성을 강조한 해석기하 수업 모형에서 직선의 방정식 학습 순서

3) 기하학적 의미를 용이하게 탐구하기 위한 GeoGebra의 활용

동적 기하 소프트웨어(DGS; Dynamic Geometry Software)인 GeoGebra는 기하적 영역과 대수적 영역을 서로 연결시켜 함께 탐구하는데 매우 용이한 프로그램이다. 사용자가 특별한 프로그램 언어를 배우지 않고도 쉽게 기하적 대상과 대수적 대상을 바꿀 수 있고 한 가지 대상을 바꾸면 자동적으로 다른 대상이 함께 그에 따라 바뀌기 때문에 학습자인 학생은 기하적 대상과 대수적 대상이 서로 연결되어 있으며 마치 하나의 대상을 조작하는 것처럼 생각할 수 있다. 본 연구에서도 기하와 대수사이의 상호 연결을 자유롭게 하고 학습자가 주체적으로 도형을 다룰 수 있도록 환경을 조성해 주어 학생들의 기하 개념 형성에 도움이 될 수 있도록 개념 이해부터 문제 해결에 이르기까지 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra를 활용하는 수업을 구상하였다. GeoGebra는 개발한 기하 수업 모형에 활용할 보조적인 공학적 도구로서 학습자들의 논증기하와 해석기하(대수)를 결합하여 탐구하는 기하 학습을 더욱 원활하게 도와 줄 수 있을 것으로 판단하였다.

4) 문제 해결에 있어 다양한 접근법 장려

기본예제부터 응용문제까지 주어진 문제의 기하학적 의미를 결합한 풀이 방법을 탐구하도록 장려하였다. 문제를 이해를 할 때 기하학적 의미를 인식하여 문제의 깊은 이해를 돕거나, 문제를 해결할 때 관련된 개념을 학습하기 위해 탐구했던 개념과 관련된 기하학적 요소와 결합을 시도해봄으로써 문제 해결의 보다 다양한 접근이 가능하도록 도왔다. 또한 문제를 해결한 후에도 구한 답의 수학적 의미를 재해석 할 수 있는 기회를 제공하고자 하였다. 즉 문제를 해결하고 난 후 구한 답이 주어진 문제에서 수학적으로 어떤 의미를 함의하고 있는지 생각해 볼 수 있도록 하여 주어진 문제의 해결 과정 및 수학적 의미를 다양한 문제에 전이 시킬 수 있는 능력을 길러주고자 하였다.

2. 차시별 학습 주제 및 학습 목표 선정

이상에서 제시한 개발 목표 및 주요 개발 방향에 따라 5차시 분량의 도형의 방정식 학습자료를 개발하였다. 차시별 학습주제에 따른 세부 학습 목표는 [표III-1]과 같다.

<표III-1> 차시별 학습주제와 학습목표

차시	학습 주제	학습 목표
1	두 점 사이의 거리	·수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. ·피타고라스 정리를 이용하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. ·두 점사이의 거리를 구하는 방법을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
2	좌표평면 위의 선분의 내분과 외분	·직각삼각형의 닮음을 이용하여 좌표평면 위에서 선분의 내분과 외분을 이해하고, 좌표 평면 위의 선분의 내분점, 외분점의 좌표를 구할 수 있다. ·내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.

3	직선의 방정식	·서로 다른 두 점에 의해 직선이 유일하게 결정됨을 이해하고, 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다. ·한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다. ·일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형이 직선임을 알 수 있다.
4	두 직선의 평행과 수직	·두 직선이 평행할 조건과 수직일 조건을 이해한다. ·주어진 직선과 평행한 직선, 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.
5	점과 직선 사이의 거리	·좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리의 의미를 이해한다. ·점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이해하고, 이를 이용하여 한 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

3. 차시별 활동내용 및 활동목표 설정: 직선의 방정식, 두 직선의 평행과 수직

각 차시의 학습목표에 맞게 교과서를 중심으로 대표문항을 선정하고 윤인준(2011)이 개발한 탐구활동지를 본 연구의 기하 수업 모형에 맞추어 수정, 보완하였고 이를 토대로 '두 점 사이의 거리, 좌표평면위의 선분의 내분과 외분, 직선의 방정식, 두 직선의 평행과 수직, 점과 직선 사이의 거리' 5개의 활동지를 개발하였다. 본 논문에서는 '직선의 방정식', '두 직선의 평행과 수직'의 주요 활동내용을 소개한다.[4]

1) 직선의 방정식

① 논증기하와의 연결성을 바탕으로 한 개념이해

- 직선의 고유한 성질인 '곧음'을 수학적 의미인 기울기로 연결시키기 위해 논증기하 요소인 직각삼각형의 닮음의 성질을 이야기 해보게 한다. 이를 통해 학생들은 닮은 직각삼각형의 '밑변과 높이의 비가 항상 일정함'은 '직선의 기울기가 일정함'으로 자연스럽게 연결시킬 수 있을 것이다.
- 도형으로서의 직선이란 '두 점을 이은 선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선'으로 이러한 정의를 바탕으로 GeoGebra의 기하창에 두 점을 지나는 직선을 작도해 본다. 작도한 직선의 고유한 성질인 '곧음'은 직선 위의 임의의 두 점을 택하여 기울기를 구하더라도 기울기가 일정하다와 같은 의미임을 아래의 [그림III-3] '직선의 방정식' 탐구활동지③의 탐구활동문항2-②,③을 통해 직관적으로 알 수 있을 것이다.

4) 지면의 한계로 본 논문에서는 개발된 5차시 분량의 활동내용 중 이후 소개될 적용사례의 학습 주제인 '직선의 방정식', '두 직선의 평행과 수직'에 한하여 소개하도록 한다 (전체 차시의 내용은 김은혜(2015)참고).

탐구활동2. 직선의 기하학적 의미에 대해 토의하기

① GeoGebra를 이용하여 점 $A(1,2)$와 $B(2,4)$를 지나는 직선을 작도해 보자.

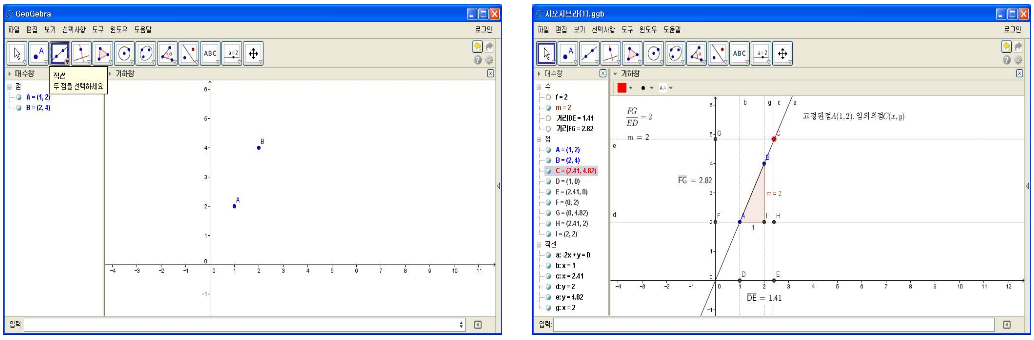
② 직선 위의 임의의 한 점 C를 찍고, 점 A와 C에서 각각 y축과 x축에 평행한 직선을 그어 축과 만나는 교점을 D, E, F, G라하고 $\dfrac{FG}{DE}$를 측정해보자.

③ GeoGebra의 기울기 메뉴도구를 이용하여 직선 AB 기울기를 측정해보고 점 C를 직선을 따라 움직여보며 ②에서 구한 측정값과 비교해보자.
이때, 직각삼각형의 닮음의 성질과 관련하여 이야기 해보자.
($\triangle CAH$와 $\triangle BAI$의 관계를 닮음의 성질을 이용하여 이야기)
이때, 점 C를 움직이더라도 $\triangle CAH$와 $\triangle BAI$의 관계에서 항상 변하지 않는 것은 무엇인가?

④ 위③에서 얻은 결론을 식으로 표현해보자.

[그림III-3] '직선의 방정식' 탐구활동지③의 탐구활동 문항2

즉, 두 점 A, B를 이은 선분의 기울기는 직선 위의 임의의 점 C와 점 A를 이은 기울기와 같음을 직각삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 탐구하고 그 결과를 식으로 표현하게 한다. 이를 통해 학생들은 직선의 기하학적 의미인 기울기가 일정함을 대수적으로 표현한 결과가 직선의 방정식임을 스스로 이끌어 낼 수 있을 것이다.



[그림III-4] 탐구활동 2번 문항에 대한 활동 예시(탐구활동지③)

② 논증기하와의 연결성을 바탕으로 한 문제해결

- 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식과 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하는 문제로 교과서에서 제시된 풀이에 의존하지 않고 직선의 방정식을 유도하기 위한 탐구활동을 그대로 지필환경에서 재실현하여 주어진 문제를 풀도록 유도한다. 즉, 직선을 구했다고 가정하고 노트에 직선을 그려 직선의 고유한 성질인 기울기가 일정함을 발문을 통해 유도하고 이를 이용하여 직선 위의 임의의 점을 $C(x,y)$을 설정하고 주어진 점과 임의의 점의 기울기를 구하는 식을 세워 구한 식을 변형한 것이 직선의 방정식임을 알게 한다. 이를 통해 학생들은 직선의 방정식을 도구적 지식으로만 습득하지 않고 도형으로서 직선의 고유한 성질인 기울기가 일정함을 대수적으로 표현한 결과라는 것을 자연스럽게 이해할 수 있을 것이다.

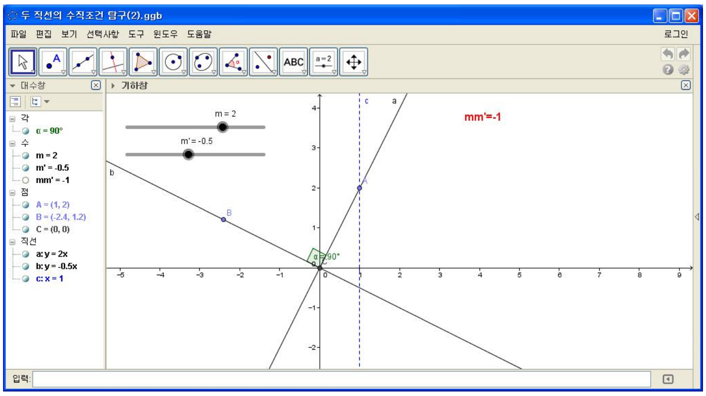
[문제1] 점$(4,1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.
① 점$(4,1)$을 지나고 기울기가 3인 직선을 구해 그렸다고 가정하고 임의로 직선을 노트에 그려보자.
② 직선 위에 임의의 점 $C(x,y)$를 찍고 점$(4,1)$과 기울기 식을 세워보자.
③ ②에서 구한 식을 y에 관해 정리하자.
[문제2]
① 두 점을 $(3,\ -2)$, $(1,\ 4)$ 지나는 직선의 방정식을 구하여라.
② 구한 직선의 방정식이 맞는지 GeoGebra를 이용하여 두 점을 지나는 직선을 작도해보고 대수창의 직선의 방정식과 비교해보자.

[그림III-5] '직선의 방정식' 탐구활동지문제

2) 직선의 평행과 수직

① 논증기하와의 연결성을 바탕으로 한 개념이해

- 두 직선이 평행할 조건과 수직일 조건을 기하학적 의미를 바탕으로 한 이해를 돕기 위해 이와 관련된 기하적 요소인 두 직선의 평행과 수직의 의미를 자유롭게 이야기 해보도록 하고 발문을 통해 앞 차시에서 배운 직선의 대수적 표현으로서의 직선의 방정식의 입장에서 직선의 위치관계인 평행과 수직을 표현할 수 있을지 호기심을 유발한다.
- GeoGebra를 이용하여 평행인 두 직선과 수직인 두 직선을 직접 작도하여 각각의 경우 GeoGebra의 대수창에 표현된 식과 비교해보게 한다. 이를 통해 학생들은 자신이 직접 작도한 두 직선의 특수한 위치관계는 '직선의 방정식에서 x, y의 계수조건과 관련이 있을 것'이라고 직관적으로 추측할 수 있을 것이다.
- 두 직선이 수직관계에 있을 때 직선의 방정식 x, y의 계수조건에 대한 추측을 바탕으로 GeoGebra 대수창에 $y = mx$ 와 $y = m'x + 1$을 입력하여 m과 m'의 슬라이더 바를 구성하고 슬라이더 바를 움직여 m과 m'가 어떤 관계에 있을 때 두 직선의 위치관계가 수직이 되는지 m과 m'값을 순서쌍으로 나열해 봄으로써 직관적으로 m과 m'의 관계를 추측할 수 있을 것이다. 이후 발문을 통해 mm'값이 -1로 일정함을 학생들 스스로 이끌어 낼 수 있도록 한다. 이를 통해 직선의 방정식의 x, y의 계수 변화와 기하창의 직선의 변화를 동시에 관찰하여 해석기하의 기하학적 의미에 기반을 둔 직관 형성을 도와줄 수 있을 것이다.
- 두 직선이 수직관계에 있을 때 직선의 방정식 x, y의 계수조건에 대해 추측한 성질을 논증기하를 이용하여 정당화 하는 활동을 실시한다. 탐구활동3에서 탐구했던 기하창에서 직선 a위의 점A에서 y축에 평행한 직선인 보조선을 그어 학생들 스스로 추측한 성질을 정당화 할 수 있도록 돕는다. 이때, 보조선을 그은 후 만들어진 직각삼각형의 성질인 피타고라스 정리를 발문을 통해 상기시키고 이러한 성질을 주어진 상황에 적용하여 대수적으로 표현할 수 있도록 한다. 이를 통해 학생은 기하에서 증명활동의 어려움을 극복하고 더 나아가 기하적 의미와 대수적 의미의 연결성을 인식한 증명을 할 수 있을 것이다.



[그림III-6] 탐구활동 예시2

2) 논증기하와의 연결성을 바탕으로 한 문제해결

- 문제[그림III-7]에서 제시된 기하학적 의미를 지닌 논증기하 요소 '수직이등분선, 삼각형의 넓이를 구하기 위해 필요한 밑변과 높이'라는 정보를 수집하여 노트에 주어진 요소들을 그려보게 하고, 이러한 정보들을 처리하기 위해 주어진 두 점을 지나는 직선과 수직인 직선의 방정식 즉, 수직이등분선을 구하여 삼각형의 밑변은 원점으로부터 x절편까지 거리, 높이는 원점으로부터 y절편까지 거리가 되므로 이 직선의 x절편과 y절편을 구하게 한다.

두 점 A(1, 5), B(7, -3)을 이은 선분 AB의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하여라. (단, O는 원점이다.) ① 두 직선의 수직조건을 이용하여 풀어보자. ② 수직이등분선의 성질을 이용하여 풀어보자.

[그림III-7] '직선의 평행과 수직' 탐구활동지문제

- 직선의 방정식을 구하기 위해 필요한 직선을 지나는 한 점은 '수직이등분선'위의 한 점이 되고, 수직이등분선의 성질에 의해 주어진 두 점의 중점임을 인식함으로써 학생은 기하학적 의미와 결합을 통해 정보를 처리하게 한다.
- 문제를 해결한 다음 학생들에게 점P와 점Q는 수직이등분선위의 점임을 발문을 통해 확인하게 하고 이러한 사실에 착안하였을 때 수직이등분선의 성질인 '수직이등분선위의 점은 주어진 선분의 양 끝점으로부터 같은 거리에 있다'를 이용하여 두 점을 직접 구할 수 있음을 알게 한다.

Ⅳ. 기하 수업 자료 적용 사례 분석

본 절에서는 앞서(Ⅲ절) 소개한 논증기하와의 연결성을 강조한 도형의 방정식 단원의 수업 자료를 적용한 사례(연구문제 2) 중 특히, '논증기하와의 연결성' 측면에서 학생들에게 두드러지게 나타난 특징 중심으로 논의하고자 한다.

1. 연구대상 및 자료수집

본 연구에서 개발된 학습 자료를 실제로 적용해보기 위해 세종시의 S고등학교 인문계 1학년 중 성취도 수준이 골고루 분포된 한 학급(18명)을 선정하여 5차시의 수업을 진행하였다. S고등학교는 인문계와 예술과가 있는 종합 고등학교로서 1학년은 인문계 5개 학급, 예술과 4개 학급으로 구성되어 있다. 적용 대상인 인문계 1학년 학생들은 소속되어 있는 학교가 종합고등학교임을 감안하여 볼 때 다른 인문계 고등학교에 비해 학업 성취도 수준이 상대적으로 낮다고 볼 수 있다. 또한 기하 수업에 참여한 학생들은 대부분 도형의 방정식에 대한 선수학습을 하지 않았다는 것을 사전 질문을 통해 파악하였다. 또한, 본 연구에서 개발한 기하 수업 모형은 도형의 방정식 단원의 5차시의 자료로 정규 수업시간(1차시 50분 기준)에 교사이자 연구자인 제1저자가 직접 적용하였고, 1차시 수업 전 GeoGebra의 원활한 활용을 위해 GeoGebra에 대한 간단한 사용법 및 기본도형 작도수업을 0차시로 진행하였다. 공학 자료를 기반으로 한 수업자료를 적용하는 과정에서 나타난 학생들의 특징을 분석하기 위하여 실험수업 내용 및 학생들의 토의활동 등을 녹음한 녹취 및 전사자료, 학생들이 수업시간 중 작성한 활동지, 수업을 진행하는 동안 나타나는 학생들의 특징을 관찰하여 연구자에게 떠오르는 생각을 기록하기 위한 현장 기록 등의 데이터를 수집하였고, 모든 분석결과는 저자들 간의 논의 및 합의 과정을 거쳐 그 분석 결과의 타당도와 신뢰도를 높이고자 하였다.

2. 적용 사례 분석: 직선의 방정식, 두 직선의 평행과 수직

이 절에서는 본 연구에서 개발된 기하 학습 자료를 적용한 5차시 수업 중 '논증기하와의 연결성 강조'라는 특징이 잘 드러난 '직선의 방정식'과 '두 직선의 평행과 수직' 단원을 분석해 봄으로써 적용 시 드러난 학생들의 실제 학습활동을 분석하고 개발된 자료의 실제 적용 가능성을 논하고자 한다.

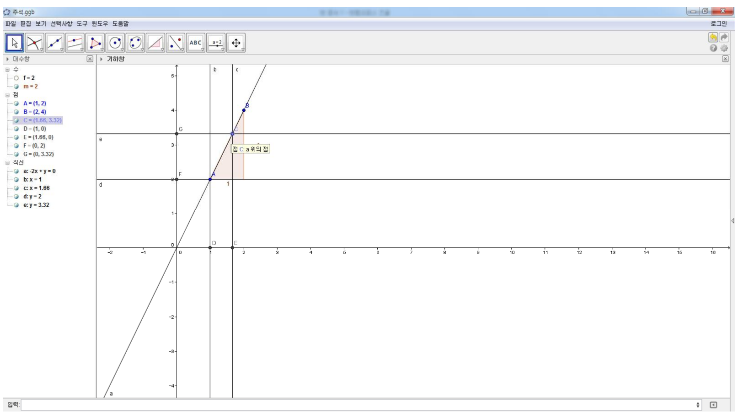
1) 직선의 방정식

① 직각삼각형의 닮음의 성질을 이용한 직선의 기울기에 대한 직관적 이해

직선의 방정식 활동지에서 탐구활동문항 2번은 직선의 기하학적 의미인 기울기가 일정함을 바탕으로 직선의 방정식을 이끌어내는 활동을 담은 문항이다. 중학교 때 학습한 직각삼각형의 닮음의 성질에 대한 충분한 경험을 제공하여 이를 바탕으로 학생들은 닮은 직각삼각형의 '밑변과 높이의 비가 항상 일정함'은 '직선의 기울기가 일정함'으로 자연스럽게 연결시킬 수 있는 기회를 갖을 수 있었다.

에피소드1 : 직선의 방정식 활동지의 탐구활동2번에 대한 반응

1. 선생님(연구자) : GeoGebra의 기하창에 두 점을 찍어 두 점 $A(1,2)$, $B(2,4)$를 지나는 직선을 작도해보세요.
2. 학생5 : 직선이 하나 만들어졌어요. 옆에 이상한 식도 있네요?
3. 선생님 : 그건 직선을 식으로 표현한 결과인데, 오늘 학습 목표이기도 해요.
   이제 직선 위의 임의의 한 점 C를 찍고, 점A와 C에서 각각 y축과 x축에 평행한 직선을 그어 축과 만나는 교점을 D, E, F, G라하고 $\dfrac{FG}{DE}$를 측정해보세요.
4. 다같이 : $\dfrac{FG}{DE}$값이 2예요.
5. 학생4 : 선생님!! 임의의 한 점이 뭔가요? 그냥 직선 위에 아무점이나 찍으면 되나요?
6. 선생님 : 네. 이때 찍은 점을 끌어보세요. 어때요? 직선 위를 따라 움직이지요?
   그래서 선생님이 고정되지 않는 점, 즉 임의의 점이라고 표현한 것입니다.
7. 학생4, 5 : 아..
8. 선생님 : 기울기 메뉴를 이용하여 기울기 값과 비교해보세요. C점을 클릭하여 직선 위를 드래그 해보면서 $\dfrac{FG}{DE}$와 기울기를 비교해보세요. 어떤가요?
9. 다같이 : 기울기 값과 같아요!
10. 선생님 : C를 움직여도 $\dfrac{FG}{DE}$의 값이 변하지 않는 이유는 무엇 때문일까요?
11. 학생3 : (점C를 끌어본후) 아! C를 움직일 때마다 생기는 직각삼각형들은 다 닮음 이예요... 음... 그러니깐 닮음비...
12. 선생님 : 맞아요, C를 움직일 때마다 정해지는 $\dfrac{FG}{DE}$의 값은 직각삼각형의 닮음의 성질로 대응하는 변의 길이의 비가 같았었기 때문입니다.
13. 학생2: 아.. 그러면, $\dfrac{FG}{DE}$는 직선의 기울기이네요!!.
14. 선생님: 그렇지. 그럼 C를 움직여도 항상 기울기가 일정한 이유가 무엇일까??
15. 학생2 : C를 움직일 때 마다 생기는 직각삼각형들의 $\dfrac{(\text{높이})}{(\text{밑변})}$가 다 같아요.
16. 선생님 : 그렇지요. 그럼 직선 위의 임의의 점을 잡을 때마다 그러한 비는 다 같은가요?
17. 다같이 : 네!
18. 선생님 : 그런 비를 우린 기울기라고 합니다. 위에서 탐구한 것을 바탕으로 결론을 내리면 직선은 항상 기울기가 일정하다고 할 수 있겠지요?



[그림Ⅳ-1] 탐구활동 2번에 대한 학생3의 반응

위의 에피소드1은 학생들이 GeoGebra를 이용하여 두 점 $A(1,2)$, $B(2,4)$를 이용하여 직선을 만들고 직선 위의 임의 점을 택할 때마다 기울기가 일정한 이유를 탐구하는 장면이다. 학생들은 기울기 측정 메뉴를 이용하여 기울기 값 구하기를 실행하면 대수창에는 기울기 값이 표현되고($m=2$), GeoGebra의 기하창에는 기울기를 구하기 위해 GeoGebra에서 직선 위에 두 점을 빗변으로 하는 직각삼각형을 하나 생성함을 확인하게 된다. 이후 교사는 학생들에게 직선 위의 임의의 점C를 택하여 A점과 C점에서 x축과 y축에 평행한 보조선을 긋도록 힌트를 제공하면 $\overline{AC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 만들 수 있다. 학생들은 직선 위를 따라 C점을 끌어보며 만들어지는 직각삼각형들끼리도 닮음임을 확인하고 기울기를 구하기 위해 생성된 직각삼각형과 C점을 끌어 생긴 직각삼각형이 닮음임을 확인하였다.(1-11) 이때 C점을 끌어 생긴 직각삼각형들 끼리 닮음이므로 대응하는 변의 비(밑변에 대한 높이의 비)가 2로 일정함과 기울기 측정메뉴를 이용하여 구한 기울기 값 2를 비교하여 이러한 결과를 바탕으로 직관적으로 직선의 기울기가 일정한 이유에 대하여 학생 스스로 이끌어 내는 장면이다(1-11,13,15). 이는 탐구활동1번 문항에서 이와 관련된 직각삼각형의 닮음의 성질에 대한 충분한 논의가 밑바탕이 되었을 것이라 판단된다. 또한 학생들 대부분 직선 위의 임의의 점 C를 움직일 때마다 생기는 비의 값이 직각삼각형의 닮음에 의해 동일하고, 그 값이 기울기임을 확인하는 장면에서 신기해하였다. 이는 그동안 기울기의 개념과 직선의 '곧음'에 대해 연결 짓지 못하다가 논증기하 요소인 직각삼각형의 닮음의 성질로 그에 대한 연결고리를 찾아주었기 때문이라고 판단된다.

② 두 점을 지나는 직선의 기울기가 일정함을 이용하여 학생들 스스로 직선의 방정식 유도

현행 교육과정을 바탕으로 한 대부분의 교과서에서는 직선 위를 지나는 한 점$A(x_1, y_1)$과 기울기m가 주어진 경우 직선 위의 임의의 한 점P를 (x,y)라고 정하고, 직선 위의 임의의 한 점P가 A와 일치하지 않을 때, 직선 AP의 기울기는 $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$으로 점 P의 위치에 관계없이 일정함을 이용하여 직선의 방정식 $y-y_1=m(x-x_1)$을 지도한다. 이는 직선은 서로 다른 두 점으로 유일하게 결정된다는 중학교의 학습 경험과 무관하게 직선 위의 한 점과 기울기를 가지고 직선의 방정식을 학습하도록 하고 있어 학습자가 가지고 있는 직선의 개념과 직선의 방정식간의 자연스러운 연결고리의 형성에 미흡하다고 할 수 있다. 또한 기울기를 정의하기 위해 두 점을 설정하는 과정 중에 주어진 한 점 이외의 직선 위의 임의의 한 점P를 의미 없이 가정하고 있어 학습자에게 직선의 방정식을 형식적으로 받아들이는 결과를 초래하고 있다고 할 수 있다. 따라서 다음의 활동들은 두 점을 이용하여 유일하게 결정된 직선의 기울기를 이용하여 직선 위의 임의의 점 C를 택하여 끌어 생기는 직각삼각형의 밑변에 대한 높이의 비들이 일정함을 학생들에게 식으로 유도해보게 하여 기존의 학습경험으로부터 자연스럽게 직선의 방정식으로 확장될 수 있도록 하는데 주목적이 있다.

에피소드2 : 직선의 방정식 활동지의 탐구활동2번에 대한 추가반응

1. 선생님(연구자) : GeoGebra의 기하창에 두 점을 찍어 두 점 $A(1,2)$, $B(2,4)$를 지나는 직선을 작도해보세요.
2. 학생5 : 직선이 하나 만들어졌어요. 옆에 이상한 식도 있네요?
3. 선생님 : 그건 직선을 식으로 표현한 결과인데, 오늘 학습 목표이기도 해요. 이제 직선 위의 임의의 한 점 C를 찍고, 점A와 C에서 각각 y축과 x축에 평행한 직선을 그어 축과 만나는 교점을 D, E, F, G라하고 $\frac{FG}{DE}$를 측정해보세요.

(이하 중략)

4. 선생님 : 그런 비를 우린 기울기라고 하고 직선은 항상 기울기가 일정해요. 그럼 우리가 활동한 것을 식으로 한번 표현해볼까?
5. 다같이 : ....
6. 선생님 : 어렵게 생각 하지 말고, 방금 우린 A점과 임의의 C점을 가지고 $\frac{FG}{DE}$값을 관찰했지요? 어떤 결과였었지요?
7. 다같이 : $\frac{FG}{DE}$가 항상 일정했어요.
8. 선생님 : $\frac{FG}{DE}$가 무엇을 뜻하죠?
9. 학생3 : 기울기요..음 그러니깐 x증가량분에 y증가량이요.
10. 선생님 : 방금 말한 것을 식으로 써봅시다.
11. 다같이 : 음..
12. 학생3 : C점이 정해지지 않아서 식으로 표현하기 어려워요.
13. 학생2, 5 : 맞아요...
14. 선생님 : 그렇지요. C는 정해지지 않는 점이였어요. 그러면 C좌표를 무엇으로 두어야하죠?
15. 학생3 : 음,, C는 (a,b)로 둘 수 있어요?
16. 선생님 : 그렇지요! C를 (a,b)라 두고, 그럼 다시 $\frac{FG}{DE}$를 식으로 표현해봅시다.
17. 학생2 : $\frac{FG}{DE}=2$ 이니깐..
18. 학생3 ; $2=\frac{b-2}{a-1}$
19. 선생님 : 그렇지요. 그럼 a가 1이 아니라 가정하고 $a-1$을 양변에 곱하면?
20. 학생 2,3,4 : $b-2=2(a-1)$
21. 선생님 ; 그렇지요.. 이 식이 우리가 그린 직선을 식으로 표현한 것입니다.
22. 학생2 : 와, 신기하네요..

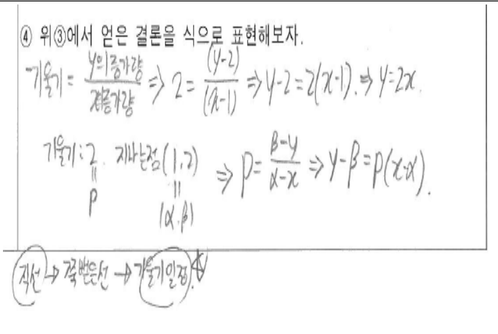
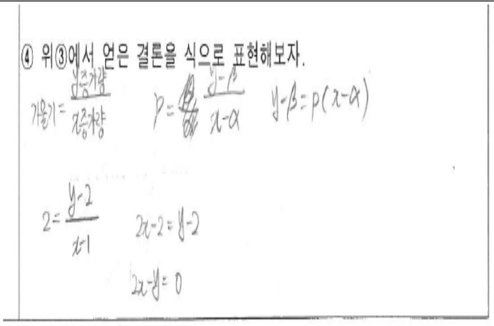
서로 다른 두 점을 이용하여 그린 직선 위의 C점을 끌어보며 확인했던 직각삼각형의 밑변에 대한 높이의 비 $\frac{FG}{DE}$가 기울기와 같음을 식으로 표현하도록 유도하였을 때 학생들은 어색해 하였지만 학생들 스스로 직선 위의 임의의 점 C를 (a,b)로 설정해야한다는 것에 대한 필요성을 인식하고(2-12,13,15) 직각삼각형의 밑변에 대한 높이의 비 $\frac{FG}{DE}$를 식으로 표현하여 직선의 방정식을 유도하였다(2-17,18,20).

③ GeoGebra의 그래프와 대수식의 동시 표현기능으로 학생의 변수개념에 대한 오류 수정 기회 제공

전통적으로 학교수학에서는 학생들이 형식적인 대수언어를 잘 다룰 수 있도록 훈련시키는 것에만 치중해왔으며 의미 있는 문제를 해결하기 위해 대수의 언어가 어떻게 사용될 수 있는지를 이해시키는 것에는 소홀했던 것이 사실이다. Freudenthal(1983)은 교사가 수업 중에 a, b, x, y등의 문자를 사용할 때 문자의 복합적인 다양한 사용법에 대한 설명 없이 그것들을 거의 자동적인 방식으로 다루고 있음을 비판한다. 실제로 직선의 방정식의 지도에 있어서 학생들에게 $ax+by+c=0$에서 a, b, x, y의 문자선택의 기회를 제공해주지 못하고 형식적인 문자사용으로 문제해결에만 치중하고 있는 실정이다. 이러한 학습경험은 학생들이 상위학습으로 진행됨에 따라 대수 학습에서 겪는 주된 어려움이 변수 의미에 대한 이해 자체부터 발생되고 있음을 지적하기도 한다(김남희 2001). 다음 에피소드3은 두 점 A, B를 지나는 직선을 작도 한 후, 직선 위의 임의의 점C 찍고 A에서 x축에 평행선을 긋고, A와 C에서 y축에 평행선을 그어 C점을 마우스로 끌어보는 활동을 통해 A, C점의 x증가량에 대한 y증가량의 비가 $\frac{FG}{DE}=2$로 일정함을 확인하고 이를 식으로 표현함에 있어서 문자사용의 필요성을 인식하고 학생들 스스로 문자를 선택하는 모습을 보여주고 있다.

<u>에피소드3 : 직선의 방정식 활동지의 탐구활동2번에 대한 추가반응-2</u>

1. 학생 2,3,4 : <u>$b-2=2(a-1)$</u>
2. 선생님(연구자) : 그렇지요. 이 식이 우리가 그린 직선을 식으로 표현한 것입니다.
3. 학생1 : <u>선생님! 그런데 GeoGebra 대수창에 나와 있는 식하고 다른데요?</u>
4. 선생님 : 그렇네요? 무엇이 문제라고 생각하나요?
5. 학생1,5 : <u>문자가 a, b가 아니고 x, y예요.</u>
6. 선생님 : 네. 수학에서는 고정되지 않은 임의의 점을 부를 때 (x, y)라고 해요. 우리가 탐구한 이 직선에서도 임의의 점C를 택하여 기울기와 닮은 직각삼각형의 변의 비를 조사했었지요? 즉, 직선 위의 C점을 마우스로 끌어보며 생긴 무수히 많은 닮은 직각삼각형의 밑변에 대한 높이의 비가 기울기와 같음을 식으로 표현하 위해 이용된 직선 위의 점C는 고정되지 않은 점인 임의의 점이므로 (x, y)로 두는 것입니다.
7. 다같이 : 네..
8. 학생4 : <u>$b-2=2(a-1)$에서 a, b를 x, y로 바꾸니 대수창에 나와 있는 식과 같아졌어요.</u>
9. 학생1,5 : <u>와. $y-2=2(x-1)$을 전개한 식과 같네요!!</u>
10. 선생님 : 이러한 식을 직선의 방정식이라고 합니다. 여러분이 기하창에 그린 직선을 식으로 표현한 것입니다. 이때, 직선 위의 임의의 점C는 이 식을 만족하는 점입니다. 그런 의미에서 직선위의 임의의 점C는 이 방정식의 해라고 부를 수 있겠죠? 그럼 위의 결과들을 일반화 해볼까요?

	
학생2의 답안	학생3의 답안

[그림Ⅳ-2] 탐구활동 2-④번에 대한 학생의 답안

GeoGebra의 대수창에 표현된 직선의 방정식 $2x-y=0$와 학생들이 표현한 식 $b-2=2(a-1)$을 비교하고 확인할 수 있어서 학생들은 본인이 선택한 문자사용의 문제점을 인식하고 이를 수정하는 과정을 확인할 수 있었다(3-1,3,5,8,9). 이러한 경험은 이후 학생들의 주도적인 문자사용과 선택에 있어서 도움을 줄 것으로 기대한다.

2) 직선의 평행과 수직

① GeoGebra의 슬라이드 기능을 통해 귀납추론의 기회제공

학생들은 GeoGebra의 작도기능을 통해 주어진 직선과 특수한 위치관계인 평행인 직선과 수직인 직선을 작도해보고 동시에 대수창에 표현된 직선의 방정식의 관찰을 통해 직관적으로 두 직선의 특수한 위치관계는 직선의 방정식에서 x,y의 계수조건인 기울기와 관련이 있을 것이라고 추측하였다. 이후 교사는 이러한 추측을 좀 더 정돈된 지식으로 이끌기 위해 두 직선의 방정식 x의 계수를 정하지 않고 x의 계수 슬라이드를 구성하도록 하여 학생들 스스로 두 직선의 수직 조건을 이끌어 내도록 하였다.

에피소드1 : 기울기 슬라이드를 이용하여 수직조건 이끌어 내기

1. 교사 : 이번에 활동할 내용은 탐구활동2번에서 추측한 사실을 바탕으로 두 직선이 수직일 조건을 탐구하려고 합니다. GeoGebra에 $y=mx$와 $y=m'x+1$를 입력해보세요.
2. 학생다같이 : 어,, 선생님 슬라이더 m,m'를 만들라는데요?
3. 학생3 : 오.. m을 움직이니깐 직선이 움직여요..!!
4. 교사 : 자. 두 직선에 각각 임의의 점 A,B를 찍고 두 직선의 교점에 C를 찍어 각도 측정메뉴를 이용하여 각도를 측정해보세요.
5. 학생2 : m슬라이더를 움직이니깐 두 직선의 사잇각이 변해요!!
6. 교사 : 기본적으로 GeoGebra는 m의 범위가 -5부터 5로 설정되어있는데 그러면 m, m'의 변화는 무엇을 뜻할까요?
7. 학생1 : m,m'의 변화시키니깐 직선도 변해요..
8. 교사 : 그렇지요?
9. 학생4 : $m.m'$는 직선의 기울기를 뜻해요.!!

10. 교사 : 그럼 우리의 목표였던 두 직선의 수직조건을 찾기 위해 슬라이더 바를 적당히 잘 움직여서 직선이 수직이 되도록 만들어봅시다.
11. 학생3 : $m=-5$이고 $m'=0.2$일 때 수직 이예요.
12. 교사 : 또 다른 학생들은 mm'값이 무엇일 때 수직인가요? 옆의 친구와 수직이 되는 mm'값을 찾고 순서쌍으로 정리해보세요. m과 m'는 어떤 관계에 있나요?
13. 학생1 : 부호가 반대예요.
14. 선생님 : 또 다른 특징은 없나요?
15. 학생3 : $(1,-1),(5,-0.2)$... 5와 0.2는 $\frac{1}{5}$니깐, 역수관계인가요??
16. 교사 : 네. 잘 발견했네요. 그럼 학생1과 학생3이 발견한 사실을 종합해보면?
17. 학생4 : 부호가 반대고 역수다??
18. 교사 : 음... 잘했어요. 그럼 어떤 두 수를 우리는 역수라고 하나요?
19. 학생2 : 분모와 분자가 서로 반대인 수. 아.. 곱해서 1이 되는 수입니다.
20. 교사 : 그러면 다시 정리해볼까요? 두 직선이 수직일 때는 m,m'의 관계는 어떻다고 정리할 수 있을까요?
21. 학생3 : 부호가 반대고, 역수니깐... 곱하면 -1이 되는 수입니다.
22. 교사 : 네 잘했어요..!!

두 직선의 특수한 위치관계는 직선의 방정식에서 x,y의 계수조건인 기울기와 관련이 있을 것이라는 추측을 바탕으로 학생들에게 기울기를 자유롭게 변화시킬 수 있는 직선($y=mx, y=m'x+1$)을 구성하도록 돕고 m, m'슬라이더 바를 움직여 두 직선이 수직이 되도록 하는 m,m'값들을 나열하여 그 관계를 찾도록 유도하였다. 학생들은 두 직선이 수직이 되는 m,m'값들의 순서쌍을 관찰하여 규칙성을 발견해 귀납적으로 두 직선의 수직 조건을 찾는 모습을 보였다 (1-11,15,17,21행). GeoGebra의 슬라이드 기능은 지필환경에서 구현할 수 없는 직선의 역동적 움직임의 경험을 제공함과 동시에 그에 따른 귀납추론의 활동의 기회를 제공하는데 도움이 되었다고 판단된다.

② 논증기하 요소 결합을 통한 발문의 제공으로 학생 주도적인 정당화 활동 유도

교사는 학생들에게 경험적 정당화 활동을 풍부하게 제공하여 학생들의 직관력을 향상시키고 교사의 적절한 발문을 통한 경험적 정당화 활동이 학생들의 사고 수준을 형식적 연역수준으로 이끄는 다리 역할을 할 수 있도록 지도해야 한다고 한다(한혜숙, 신현성, 2008). 즉 학생 수준에 따른 교사의 적절한 발문은 학생들의 경험적 정당화 활동에 의한 추론과 연역적 정당화 과정을 연결하고 학생들이 연역적 정당화의 필요성을 인식하는데 중요한 역할을 한다(류희찬, 조완영, 1999). 두 직선의 평행과 수직조건에 대한 경험적 정당화를 이끌어 낸 위의 탐구활동에 이어 교사는 학생들이 경험적 정당화 활동을 통해 얻어낸 두 직선이 수직이 되기 위한 조건을 연역적 정당화로 연결할 수 있도록 다음 탐구활동을 진행하였다.

에피소드2 : 두 직선의 평행과 수직 활동지의 탐구활동4번에 대한 반응

1. 교사 : 탐구활동3에서 슬라이드 m과 m'를 움직여 두 직선의 위치관계가 수직이 되도록 만들어 보세요. 자 이제 우리가 증명해야 할 결론은 무엇이지요?
2. 학생3 : $mm'=-1$, 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 보여야합니다.
3. 교사 : 네. 이러한 등호가 들어있는 식 등식을 만들기 위해 우리도 등식을 세워 보려고 해요.

4. 학생1,2,5 : 어떻게요??
5. 교사 : 자, 아까 각도를 만들기 위해 직선 위에 찍은 A점에서 y축에 평행한 선을 작도해 보세요. 어때요? 이 평행선이 다른 직선과 만나면서 어떤 도형이 생겼나요?
6. 학생2,3 : 직각삼각형이요.
7. 교사 : 직각삼각형을 생각하면 떠오르는 정리가 있나요? 두 점 사이의 거리구하기 공부할 때 탐구했던 내용예요.
8. 학생4 : 아.. 피타고라스 정리요.
9. 교사 : 그렇지요. 피타고라스 정리가 무엇이지요?
10. 학생4 : 직각삼각형에서 빗변의 제곱은 밑변제곱 더하기 높이제곱입니다.
11. 교사 : 다른 친구들은 다 기억나나요?
12. 다같이 : 네..!!
13. 선생님 : 그럼 GeoGebra 기하창에 표현된 직각삼각형을 보고 피타고라스 정리를 적용할 수 있을까요?
14. 학생3 : 네, 선생님 그럼 밑변과 높이와 빗변은 두 점사이의 거리 식을 이용해서 구하나요??
15. 교사 : 그렇지요. 자 우리는 기울기 m, m'의 관계식을 만들어야 하므로 m, m'과 관련된 식을 세워야 합니다. 두 점사이의 거리 식을 이용하여 각 변의 길이를 정하려면 좌표를 정해야 합니다. 그러기 위해서는 한 점이라도 원점이 되면 편리하겠지요?
16. 학생3 : 선생님.. 기하창에 만들어진 직각삼각형의 세 점 중 어느 것도 원점인 것이 없어서 세 변을 결정하기가 좀 복잡합니다.
17. 교사 : 그럼 한 직선을 평행이동 시켜봅시다. 어떤 직선을 평행이동 시키는 것이 좋을까요?
18. 학생4 : $y=m'x+1$을 원점과 만나도록 평행이동 시키면 좋겠어요.
19. 학생3 : 그럼 이 식을 $y=m'x$로 바꾸면 됩니다. 왜냐면 지나는 점이 (0,0)이 되려면 +1이 사라져야해요.
20. 교사 : 그렇지요? 그럼 다른 친구들도 대수창에서 $y=m'x+1$를 클릭해서 식을 $y=m'x$으로 수정해봅시다. 그리고 직각삼각형을 이루는 세 점의 좌표를 결정 해보세요.
21. 학생3 : 선생님 A점의 좌표가 $(1.27, 1.27m)$이고.. 으..
22. 교사 : 자 상황을 최대한 단순하게 만들어 놓고 증명해도 일반성을 잃지 않아요. A의점을 끌어서 x좌표를 1로 만듭시다. 즉 y축과 평행선을 $x=1$로 둡니다. 그래도 직각삼각형임에는 변함이 없지요?
23. 학생3 : 네.. 그럼 A좌표가 $(1, m)$, 다른 점도 좌표를 정해보면 $(1, m')$ 그리고 $(0, 0)$이예요,
24. 교사 : 다른 친구들은 학생3이 이렇게 좌표를 정한 것에 대해 어떻게 생각하나요?
25. 학생1 : 선생님 여기에는 A점이 $(1, 2)$인데 왜$(1, m)$으로 두나요?
26. 교사 : GeoGebra 기하창에는 두 직선이 수직되는 특수한 경우인 $m=2$인 경우로 슬라이드 바가 놓여져 있어서 그래요. 그런데 슬라이드 바를 움직이면서 수직인 여러 경우가 있었지요? 그래서 일반적으로 이 직선을 $y=mx$라 놓고 A점을 정한거예요..
27. 학생1 : 아..
28. 교사 : 그럼 학생3이 둔 좌표로 피타고라스 정리를 적용하여 활동지에 식으로 표현해 보세요.
29. 학생3 : 선생님, $mm'=-1$라는 식이 나왔어요. 와...

처음에 학생들은 증명이라는 말에 거부반응을 보였지만, 교사는 경험적 정당화 활동을 했던 GeoGebra 화면 y축에 평행한 보조선을 그어보도록 하여 논증기하 요소인 직각삼각형을 발견할 수 있도록 돕고, 이후 발문을 통해 직각삼각형의 성질인 피타고라스 정리를 떠올릴 수 있도록 유도하였다. 학생들은 기존에 알고 있는 사실인 피타고라스로 증명해나간다는 사실에 자신감을 보였다 (2-6,8,10,14). 학생3과 학생4를 제외한 다른 학생들은 증명의 아이디어인 직각삼각형의 성질인 피타고라스 성질을 이용할 수 있다는 사실까지는 적극적으로 반

응하였으나, 직각삼각형의 세 점을 좌표로 설정하는 과정은 다소 어려워하였다. 이는 두 직선이 수직이기 위한 성질을 증명하기 위해 경험적 정당화 활동을 했던 상황에서 조건을 단순화 하는 과정에 대한 충분한 시간이 제공되지 못했기 때문이라 판단된다. 학생3과 학생4는 연역적 정당화 활동을 위해 제공한 교사의 발문에 적극적으로 반응하며 주도적으로 증명을 구성해 나가는 모습을 보였다 (2-16,19,23).

Ⅴ. 요약 및 제언

본 연구에서는 해석기하를 처음 다루는 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원에서 학생들이 중학교에서 배웠던 논증기하 요소를 활용하여 도형의 방정식 단원에서 다루는 해석기하를 자연스럽게 이해할 수 있도록 논증기하와의 연결성을 강조한 해석기하 수업 자료를 개발하였다. 개발된 수업 자료는 실제 고등학교 1학년 정규 수업시간에 투입되었으며, 이를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 첫째 두 점을 지나는 직선의 기울기가 일정함을 이용하여 학생들 스스로 직선의 방정식 유도할 수 있었다. 학생들은 GeoGebra를 이용하여 두 점을 찍어 직선을 작도하고 두 점을 지나는 직선은 유일하게 결정됨을 시각적으로 확인한 후, 기울기 측정메뉴를 이용하여 두 점을 지나는 직선의 기울기 값을 측정하도록 하였다. 이후 직선 위의 임의의 점C를 택하여 마우스로 끌어보며 생기는 직각삼각형의 밑변에 대한 높이의 비들이 일정하고 이 값은 기울기와 같음을 학생들에게 식으로 유도해보게 하여 기존의 학습경험으로부터 자연스럽게 직선의 방정식으로 확장될 수 있도록 하였다. 둘째 학생들은 '두 직선의 평행과 수직 조건'에 대한 해석기하 성질을 정당화 하는 과정 중에 논증기하 요소를 결합하여 주도적인 정당화 활동을 할 수 있었다. 교사는 적절한 발문을 통해 두 직선의 평행과 수직 조건에 대한 경험적 정당화 활동을 유도하여 학생들 스스로 두 직선이 평행과 수직이 되기 위한 조건을 찾고, 이러한 결과에 대해 연역적 정당화 활동의 필요성을 느낄 수 있도록 의미 있는 발문 계획을 세워 학생들에게 적절한 발문을 제공하였다. 경험적 정당화 활동을 했던 GeoGebra 화면에 그려놓은 수직인 두 직선 $y=mx$, $y=m'x+1$에서 y축에 평행한 보조선을 그어보도록 하여 학생들은 논증기하 요소인 직각삼각형을 발견하였다. 이후 교사의 발문을 통해 학생들은 피타고라스 정리를 이용하여 두 직선이 수직이기 위해 $mm'=-1$임을 주도적으로 정당화 해나가는 모습을 보였다. 셋째 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra기능 중 그래프와 대수식의 동시 표현기능으로 학생의 변수개념에 대한 오류 수정 기회를 제공할 수 있었다. 학생들은 GeoGebra를 이용하여 두 점 A,B를 지나는 직선을 작도 한 후, 직선 위의 임의의 점C 찍고 A에서 x축에 평행선을 긋고, A와 C에서 y축에 평행선을 그어 C점을 마우스로 끌어보는 활동을 통해 A,C점의 x증가량에 대한 y증가량의 비가 일정함을 확인하고 이를 식으로 표현함에 있어 문자사용의 필요성을 인식하고 학생들 스스로 문자를 선택하는 모습을 보여주었다. 이때 학생은 자신이 세운 식과 GeoGebra의 대수창에 표현된 직선의 방정식을 비교, 확인 할 수 있어서 본인이 선택한 문자사용의 문제점을 인식하고 이를 수정하는 과정을 확인할 수 있었다. 본 연구의 적용사례는 세종시의 S고등학교 인문계 1학년 한 학급만을 대상으로 한 것이므로 결론에서 제시한 기하 개념 이해 과정 중 나타난 학생들의 특징을 일반화하기에 한계가 있을 것이다. 하지만 제시한 결론에서 확인할 수 있듯이 논증기하와의 연결성을 강조한 해석기하 수업을 통해 학생들은 기존에 알고 있던 논증기하 요소를 바탕으로 도형의 방정식 단원의 기하 개념 탐구 과정을 자연스럽게 받아들이고 해석기하 개념에 대한 수학 내적 연결성을 바탕으로 개념을 확장해 나가는 모습

을 보였다. 한편, 기하 성질의 정당화 과정에 있어서 경험적 정당화 과정까지는 학생 전반적으로 적극적인 모습을 보이다가 연역적 정당화 과정은 몇몇 학생(학생3, 학생4)만 주도적으로 정당화 과정 활동에 참여하는 모습을 보이기도 하였는데 이 때 가장 큰 연결 고리 역할을 했던 것은 교사의 발문이었다. 이것은 반대로 이야기하면 교사의 적절하지 못한 발문은 학생의 주도적인 정당화 활동을 저해할 수 있는 가능성도 있다고 볼 수 있으므로, 더 나은 학습 자료 수정 및 개발과 동시에 학습자의 기하 개념 이해 과정에서 교사의 발문에 초점을 둔 연구도 후속연구 필요하리라 생각한다.

참고문헌

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정** (교육인적자원부 고시 제2007-79호 [별책8]).

교육과학기술부(2008). **고등학교 교육과정 해설서**(교육과학기술부 고시).

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**(교육과학기술부 고시 제 2011-36 1호 [별책8]).

교육부(2015). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]).

권영익, 서보억(2007). 고등학교 도형의 방정식 단원에서 논증기하의 활용에 대한 연구. **한국학교수학회논문집, 21**(3), 451-466.

김남희(2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. **수학교육학연구, 14**(3), 305-325.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2011). **수학교육과정과 교재연구.** 서울 : 경문사.

김은혜(2015). **논증기하와의 연결성을 강조한 해석기하 수업 모형 개발 및 적용 사례 연구 - 고등학교 1학년 도형의 방정식 중심으로**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

도정철, 손홍찬(2015). GSP를 활용한 기하수업에서 수준별 학생의 논증기하와 해석기하의 연결에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 18**(4), 411-429.

류성림(1998). **피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색.** 한국교원대학교 박사학위 논문.

류희찬, 조완영(1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어의 활용, **수학교육학연구, 9**(2), 419-438.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울 : 서울대학교출판부.

유정윤(2005). **7차 수학과 교육과정에서 도형지도의 연계성에 관하여**. 인제대학교 석사학위 논문.

윤인준(2012). **탐구형 소프트웨어를 활용한 학습부진학생의 해석기하 개념형성에 관한 연구 : Skemp의 이론을 중심으로**. 단국대학교 석사학위 논문.

윤인준, 고상숙(2012). 탐구형 소프트웨어를 활용한 해석기하에서 학습부진학생들의 개념형성에 관한 연구 : 관계적・도구적 이해를 중심으로. **한국학교수학회논문집, 15**(4), 643-672.

이수진(2005). **해석기하 문제해결 과정에서의 오류 유형과 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구 -10-나 「도형」단원을 중심으로-**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

장혜진(2012). **중학교 도형지도에서 GeoGebra 활용의 효과에 관한 연구.** 국민대학교 석사학위 논문.

한혜숙, 신현성(2008). 증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 299-314.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*, Chicago: The University of Chicago Press.

NCTM (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. 류희찬 외 5인 역(2014).학교수학을 위한 원리와 규준. 서울 :경문사.

Designing and Implementing High School Geometry Lessons Emphasizing the Connections between Euclidean and Analytic Geometries

Kim Eun Hye[5] · Lee Soo Jin[6]

Abstract

The 「Figure Equation」 chapter of current high school curriculum prevents students from relating the concept with what they studied in middle school Euclidean geometry. Woo(1998) concerns that the curriculum introduces the concept merely in algebraic ways without providing students with opportunities to relate it with their prior understanding of geometry, which is based on Euclidean one. In the present study, a sequence of GeoGebra-embedded-geometry lessons was designed so that students could be introduced to and solve problems of the Analytic Geometry by triggering their prior understanding of the Euclidean Geometry which they had learnt in middle school. The study contributes to the field of mathematics education by suggesting a sequence of geometry lessons where students could introduce to the coordinate geometry meaningfully and conceptually in high school.

Key Words : Euclidean geometry, Analytic geometry, GeoGebra

Received September 20, 2016
Revised November 15, 2016
Accepted November 21, 2016

＊ 2010 Mathematics Subject Classification : 97U50

5) Yeodo Middle School (kimeunhye@hanmail.net)
6) Korea National University of Education (sjlee@knue.ac.kr), corresponding author