한국학교수학회논문집 제 19 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 19, Number 4, 357-371, December 2016

수학적 모델링의 과제공간에서 과제복잡성의 평가척도(rating scheme)설정 - 예비수학교사를 대상으로

신현성[1] · 최희선[2]

본 연구는 수학적 모델링의 과제공간을 설정하고 이를 기반으로 모델링 과제의 복잡성을 나타내는 평가척도(rating scheme)를 설계하여 예비 수학교사를 대상으로 두 가지의 실험연구 결과를 얻었다. 첫째는 종전의 문제구조를 표현한 문제공간을 발전시켜 모델링 과제에 맞는 과제공간을 설정하고, 모델링 과제의 복잡성을 수치로 나타내는 계량적인 평가척도를 설계하여 의미 있는 타당도를 확인하였다. 둘째는 모델링의 과제 복잡성에 대한 평가척도, 학생 성취수준, 과제 특수 발견 전략의 개수 사이의 일관된 패턴이 있음을 발견하였다.

주요용어 : 수학적 모델링의 과제공간, 과제복잡성, 과제복잡성의 평가척도, 과제 특수 발견 전략

Ⅰ. 서 론

급변하는 세계 속에서 필요한 인재양성을 위해 수학교육에서는 수학적 모델링을 적극적으로 반영해야 한다고 주장하는 연구가 계속적으로 진행되어 왔다(Blum, 1993; Kaiser, 2013; Lesh & Fennewald, 2010). 학생들은 수학적 모델링을 통하여 수학을 실세계에 활용하는 방법을 배우고 미래의 진로를 위한 지식을 얻으며 그 과정에서 자연스럽게 수학을 이해하는 능력을 기를 수 있기 때문이다(Galbraith, Henn, & Niss, 2007). National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)과 Common Core State Standards for Mathematics(CCSSM: National Governors Association (NGA), 2010)에서도 수학적 모델링을 통하여 수학의 내·외적인 상황에서 문제해결 전략을 적절히 사용할 수 있어야 하고 수학적 모델을 이용하여 관계를 이해할 수 있어야 한다고 강조하고 있다.

그러나 학교 현장에서는 아직까지 수학적 모델링이 대수, 기하 등과 같이 학교수학의 중심이 되어야 한다는 생각이 다소 부족한 것이 사실이다. 수학교사들은 모델링 과제의 난이도와 모델링의 절차가 복잡하기 때문에 교수-학습과정에서 수학적 모델링이 전통적인 내용만큼 중요하지 않다고 생각했다(Niss, 2001). 그럼에도 많은 교육학자들은 '수학적 빅 아이디어'로써의 모델링 지도를 강조해야 한다고 한다(Blum, 1993; Kaiser, 2013; Lesh & Fennewald, 2010).

---

* MSC2010분류: 97D99
1) 강원대학교 (hsshin@kangwon.ac.kr)
2) 한국교육방송공사 (heesun0205@gmail.com), 교신저자

미국과 한국의 학교에서 사용되는 수학교과서와 수업자료를 비교한 연구에서 미국의 경우는 수학적 모델링 과제를 실생활 문제의 해결로 도입하고 특히 교재가 탐구활동으로 사용되는 것을 확인하였다(신현성, 한혜숙, 2009). 또한 미국의 학교 수업자료는 복잡한 모델링 과제를 단순화하여서 각 학년에 알맞게 수정하여 사용하였으나 한국의 경우는 과제의 열린 정도를 수정하여 실생활 문제의 해결 수준으로만 수정하여 사용하였다. 이는 한국의 학교에서 수학적 모델링 교육의 중요성을 인정하지만 과제의 복잡성에 어려움을 가지고 있다는 의미로도 볼 수 있다. 신현성과 이명화(2011)의 예비 수학교사들과 면담한 결과에 따르면 중등학교의 모델링 과제가 학생들이 수학을 이해하는 능력을 기르기 위해서는 폭넓게 활용되어야 하나 모델링 과제의 복잡성이 문제가 된다고 하였고, 교사의 관점에서는 모델링 과제의 복잡성과 과제의 다양한 풀이방법이 수학적 모델링 수업과 평가를 어렵게 만든다고 하였다.

따라서 수학적 모델링을 학교수학에서 활용할 수 있도록 모델링의 과제구조를 밝히는 것이 중요하므로 본 연구에서는 학교에서 활용 가능한 모델링 과제의 구조를 분석할 수 있는 과제공간을 설정하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1. 수학적 모델링의 과제공간에서 과제 복잡성의 평가척도(rating scheme)는 어떻게 정의하는가?

연구문제 2. 수학적 모델링의 과제 복잡성, 학생의 성취수준, 과제의 특수 발견 전략의 개수 사이의 관계는 어떠한 특징이 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제의 난이도와 구조

1970년대 초부터 문제해결 영역에서 문제의 난이도를 결정하려는 연구가 활발히 시작되었다. Linville(1969)은 문제 구문의 난이도가 학생들의 문제해결 성취수준을 결정하는 핵심요소라고 주장하면서 구문의 난이도가 높을수록 문제가 어렵다고 보았다. 그러나 Knifong와 Holtan(1976)은 학생들의 문장제 문제의 해결과정을 분석한 후 문제해결 실패를 문제읽기 수준으로 판단하는 것은 적절하지 않고 계산능력의 부족으로 보아야 한다고 하였다.

Lester(1978)의 MPSP(Mathematics Problem Solving Project)에서는 6~8학년 학생들이 문제를 어렵게 생각하는 요인을 4가지(문제 상황, 수학적 개념, 문제구조의 복잡성, 문제에 적용 가능한 발견전략)로 나누고 어떤 요인 때문에 문제를 어렵게 느끼는지를 학생들과 면담형식으로 조사하였다. 예를 들면 8학년 학생들은 문제의 상황이나 문제 속에 있는 수학내용(개념, 원리, 법칙)등은 쉽다고 하였으나 문제구조의 복잡성 또는 문제에 적용 가능한 발견전략을 생각할 때는 어려움이 많다고 하였다. 또한 학생들과의 심층면담에서는 계산 또는 읽기 능력은 어려운 문제를 결정하는 요인이 될 수 없고 해결과정의 복잡성이 결정적인 요인이 될 수 있으며 일반화하는 능력도 하나의 요인이라고 보았다.

학생의 문장제 문제해결에서 오류발생의 예언요소를 발견하기 위해 Jerman(1974)은 회기분석 연구를 통해 문제의 언어적 구조(문장 길이, 마침표와 쉼표의 개수 등)가 오류발생의 절대적인 예언요소는 아니지만 나이와 학년수준에 따라 변한다는 점을 발견했다. 다시 말해

서 계산능력은 학년이 높아짐에 따라 문제해결에 큰 영향을 주지 않기 때문에 초등학생들에게는 좋은 예언요소이지만 대학생들에게는 꼭 그렇지만은 않다는 것이다.

한편 Caldwell과 Goldin(1979)은 문장제 문제의 유형을 추상적, 구체적, 사실적, 가설적인 유형으로 설정한 후 각각 대립적인 관계인 추상적인 문제유형 대 구체적인 문제유형, 사실적인 문제유형 대 가설적인 문제유형의 상대적인 난이도를 조사하였다. 대부분의 학생들은 구체적인 문제보다 추상적인 문제를 어려워하였고 구체적이면서 사실적인 문제를 가장 쉽게 생각하였다. 그러나 일부 학생들은 사실적인 문제보다 가설적인 문제를 쉽게 생각하는 경향도 보였다. 또 초등학생과 중학생들은 추상의 수준과 사실적인 정도 사이에 유의미한 상호효과가 있었으나 고등학생들은 그런 점이 발견되지 않았다.

Goldin과 Luger(1975)는 문제구조가 '복잡하다' 또는 '단순하다'를 파악하기 위하여 대수학의 개념인 동형과 준동형을 도입하여 파악하였다. 그들은 문제구조를 문제공간(state space)으로 정의하였는데 이 표현은 Newell과 Simon(1972)이 주장하는 정보처리 접근, 컴퓨터 프로그램을 인간 사고의 모형으로 활용하고자 제안하는 관점에서 나온 개념이다. 이들은 문제 해결에서 목표에 직접적으로 달성할 수 없을 때 하위 목표를 수립한다는 수단-목표분석(Means-ends analysis)전략을 강조한다. 다시 말해서 유능한 문제 해결자는 자신들의 현재 상태를 고려하여 목표 상태에 이르는 단계를 비교하고 현재 상태와 목표 상태 사이에 존재하는 문제들을 제거하는 방법을 찾는다. 즉, 주어진 상태에서 목표 상태로의 이동하는 경로를 포함하는 문제공간을 개발하는 것이다. 학생들은 문제 진술이 언어적으로 표현된 문장제 형태이거나 기호, 그림 등으로 표현된 문제 형태이어도 문제를 해결하는 동안 자신의 머릿속에 존재하는 지식 망에 새로운 정보를 연결한다. 대부분의 학생들은 전에 보지 못한 새로운 유형의 문제를 보고 당황하지만 관련성을 구축하여 처음보다 수정된 문제의 모델을 만들어간다. 이러한 개념으로 문제 속에 있는 논리적인 구조를 다이어그램으로 나타내면 문제해결 행위를 쉽게 파악할 수 있는데, 두 문제가 동형이라고 하는 것은 두 문제에 대한 다이어그램이 서로 같다는 뜻이다. 반면에 두 문제의 준동형 관계를 정의하는 문제는 명확하게 정리되지 못했지만 교실에서는 준동형인 두 문제를 유사 문제로 분류하고 있다.

고등학교 학생들을 대상으로 수학 문제 24개를 관련 있는 문제들끼리 분류하도록 한 Silver(1981)에 의하면 우수한 학생들은 수학적 구조의 유사성을 가지고 문제를 분류하였고 그 외의 학생들은 문제를 분류할 때 문제 상황, 문맥의 표면적인 유사성, 질문의 형태에 관심을 보인 것을 확인하였다. 비슷한 결과로 Stavy와 Tirosh(1993)는 초보자들이 두 문제의 유사한 구조를 찾지 못하고 표면적인 유사성(문제에 주어진 상황, 기호, 단어 등)에만 집중하는 경향이 발견하였다.

이와 같이 문제변인의 연구에서 많은 연구결과가 문제의 난이도를 결정하는 요인으로 수학내용, 문제 상황, 구조의 복잡성(예로써 구문의 수준, 계산 구조, 문제정보의 관계망 등), 문제 해결자의 태도, 문제에 담긴 발견전략을 들고 있다.

2. 수학적 모델링 과제의 복잡성

수학적 모델링이란 Blum(1993)은 실세계 상황으로부터 수학적 모델의 구성 과정이라 하고, Varaki와 Earl(2006)는 시스템의 역동성을 바탕으로 미래 결과를 예측하는 하나의 기술로 정의한다. 또한 많은 연구자들이 수학적 모델링은 수학의 핵심일 뿐만 아니라 과학적 구

성을 이해하는 효과적인 도구로 이해하기도 하고 학생들의 삶, 공동체 활동에서 제기되는 중요한 이슈를 분석하는 비판적인 도구로 이해하기도 한다(Greer, Verschaffel, & Mukhopadhyay, 2007; Romberg, Carpenter, & Kwako, 2005).

이러한 수학적 모델링을 다루는 과제는 Zawojewski와 McCarthy(2007)에 의하면 문제 해결자가 일상적인 학교 경험을 넘어 수학적인 생각에 집중할 수 있는 것이어야 하며 또 일반화하려는 결과물은 목표달성에 필요한 개념적 도구 또는 복합적인 가공물을 포함하는 실제적인 상황이어야 한다고 하였다.

한편 학교수학에서 사용하는 수학적 모델링 과제를 그 구성과정에서 탐구활동을 목표로 하는 탐구적인 접근방법과 문제설정이나 새로운 문제해결 방법의 발견과 같은 창의적인 접근방법으로 분류하는데, Blum(1993)이 제시한 모델링 과정도 각 단계에서 창의적인 새로운 아이디어를 창출하는 세부 모델링 과정을 구성한다는 의미에서 창의적인 접근방법으로 생각한다. 일반적으로 창의적인 접근방법보다 전 단계인 탐구적인 접근방법을 강조하는데 이것은 학생의 창의성을 강조하는 창의적인 작업보다 모델링의 훈련과정으로 탐구적인 작업을 교육과정에 두는 것이 바람직하다는 연구들이 많기 때문이다(Graumann, 2002; Blum & Leiss, 2005; Ferri, 2006). 예를 들면 NCTM의 모델링 과제 '정원의 잔디 손질하기'에서 목표는 상황에 알맞은 변수들을 정하고 불연속 함수를 개념화하여 탐구적인 접근방법으로 다음을 제시하였다.

단계1: 표를 만들어 연간 매출액을 식으로 나타내어라.
단계2: 최대 매출액은 얼마인지 예측하여라.
⋮
단계n-1: 두 개의 변수를 정하여 불연속 함수식을 정하여라.

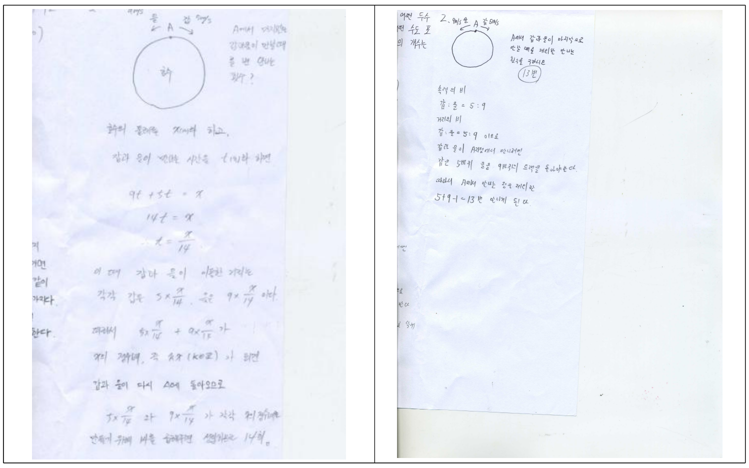
수학적 모델링 과제를 설정하거나 해결방법을 탐구하는 활동을 할 때 탐구적, 창의적인 접근방법은 교사에게 구체적인 교수-학습의 방법을 제시하므로 수학적 모델링 과제의 효과적인 활용을 위해서는 먼저 모델링 과제의 복잡한 수준을 정하는 기준이 필요하다. 이전에는 과제의 복잡성을 정하는 방법으로 이분법적인 척도(dichotomous rating)를 사용했지만 열린 대답의 형태인 모델링 과제는 이분법적인 척도가 적합하지 않다. 새로운 척도의 연구로 Cohors-Fresenborg, Sjuts, 와 Sommer(2004)는 과제의 텍스트를 분석하는 기법을 정의하였고 실제로 PISA 2000 문항을 조사하여 다양한 과제의 복잡성을 결정하는 척도 모델을 만들었다. 이 척도는 학생들의 풀이과정을 분석한 결과를 바탕으로 모델링 과제에 대한 학생의 풀이과정에서 수학적 모델을 분석하면서 해(solution)의 길을 발견하는 것만이 아니라 같은 수학적 모델을 사용하였더라도 단계에 따라 생각의 과정이 다른 구조를 가지는 사실까지 포함하여 설계되었다.

수학 연산활동의 구조를 순서도로 나타내었던 Winter와 Ziegler(1969)처럼 Reit와 Ludwig(2015)도 사고연산을 한 개 또는 여러 개의 아이디어로부터 바로 얻는 활동의 결과로 정의하고 이들을 순서도 형식으로 나타내어 과제의 해결과정이 얼마나 복잡한지를 판단하였다. Graumann(2002)에 의하면 과제의 복잡성은 수학적 아이디어를 원으로 표시할 때 그 원의 개수와 이 원들의 연결 패스(nesting)의 개수로 결정된다고 하였다. 학생들은 자신의 문제 해결에서 다양한 수학적인 아이디어들이 서로 관련되어 있는 상태를 동시에 이해하

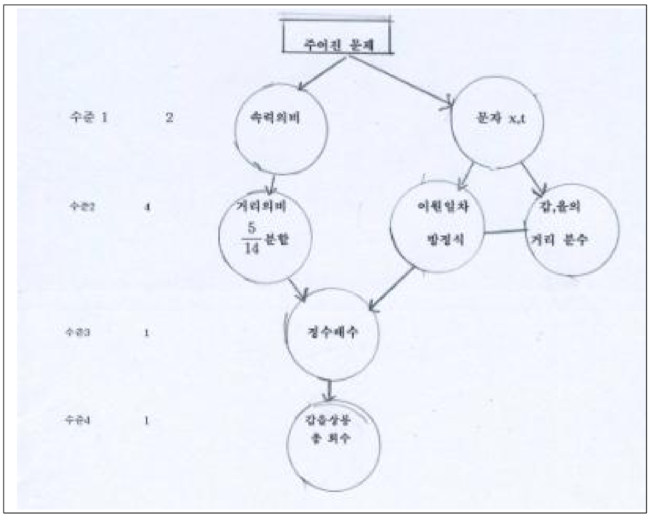
는데 Piaget의 용어인 조작활동을 연산활동 대신 사용하면 평행한 조작활동(연산활동)이 해결 과정에 있을 때는 문제의 복잡성이 가중된다고 볼 수 있다. 문제의 해결방법이 하나일 때는 다양한 수학적 아이디어들이 서로 관련되어 있어도 2개 이상의 평행한 조작활동이 있는 문제해결보다 쉽게 해의 길을 찾을 수 있다. 그런데 2개 이상의 평행한 조작활동이 있는 문제의 경우에는 문제의 복잡성이 크게 증가하여 학생들의 해결과정이 복잡하다. 이 점을 계량적으로 나타내기 위하여 Reit 외(2015)는 가중치를 주는 방법을 도입하였는데, 그들의 가중치를 주는 계량적인 방법인 평가척도를 설명하기 위해 다음의 문제(호수주변 산책하기)를 예비 수학교사들에게 풀어보게 하였다.

A신도시는 주민들의 여가활동을 위해 원형의 호수를 만들었다. 갑, 을 두 사람은 호숫가의 한 지점 A에서 서로 다른 방향으로 동시에 출발했다. 이때 갑의 속력은 5m/s이고 을의 속력은 9m/s이다. 두 사람이 출발한 후, A지점에서 다시 만날 때까지 계속 돌기로 약속했다. A지점에서 출발한 후 다시 A지점에서 만나서 멈추었을 때 만나는 횟수는? (단, A지점에서 만나는 것을 제외한다.)

[그림Ⅱ - 1]은 두 모둠에서 제출한 풀이이고, Graumann(2002)이 제안한 순서도에서는 문제에 있는 수학적 아이디어를 원으로 표현하고 연산활동을 아이디어 간의 연결인 화살표로 나타내면 [그림Ⅱ-2]와 같고 수학적 과제의 복잡성은 원으로 표시된 아이디어의 개수와 이들의 연결 패스의 개수로 결정된다.



[그림 Ⅱ−1] 원형의 호수산책에 대한 예비 수학교사들의 문제풀이 방법



[그림 Ⅱ-2] Graumann이 제안한 문제구조의 순서도

[그림Ⅱ-2]는 문제 구조의 복잡성을 한 눈에 볼 수 있는 모델이지만 여러 개의 구조모델을 두고 한 눈에 복잡성을 판단하는 것은 쉬운 일이 아니며, 모델의 타당도나 신뢰도를 산출하는데 어려움이 많으므로 타당도나 신뢰도를 계산할 수 있는 계량적인 모델이 필요하다. Reit 외(2015)이 제안한 모델은 세부 수준을 설정하고 각 수준에서 연산활동의 개수를 센 다음에 모든 수준의 개수에 가중치를 두어 모두 합하였다. 그들의 방법을 적용하면 우선 모델은 [그림Ⅱ-2]와 같이 4개의 수준을 가지고 각 수준의 조작활동은 계량적인 수치 2, 4, 1, 1로 표현이 된다. 가중치를 주어 합을 구하면 2!+4!+1!+1!=28이고 28은 이 문제의 복잡성을 나타내는 값이다.

Ⅲ. 연구설계

수학적 모델링 과목을 수강한 B대학교 수학교육과 학생 38명을 대상으로 실험을 진행하였다. 먼저 2013년에 수학적 모델링 과목을 수강한 학생들이 발표하고 정리한 과제에서 5개를 선별한 후, 2014년 3월부터 3개월간 2, 3학년 38명의 학생들이 모델링 과제해결에 참여하였다. 수학적 모델링 과제의 선별기준은 Zawojewski 외(2007)의 관점인 실세계의 관계와 현실적인 사실여부이고 진정성을 가진 수학적 모델링 과제의 해법을 발견하는 것이었다. 전형적인 교과서의 문장제 문제와 같은 모델링 과제는 학생들이 비슷한 풀이 방법을 연습하여 적용하는 상황이었기 때문에 배제하였다.

<표Ⅲ-1> 선별된 수학적 모델링 과제

기호표시	과제명	과제설정 대상
Ts	티셔츠 가게 주인의 선택	모둠활동
Ds	우편배달의 고민	NCTM
Es	국립공원 호수 생태계	모둠활동
Ab	농사대행 업체의 홍보	모둠활동, NCTM
Pt	시내주차장 설치	모둠활동, NCTM

<표Ⅲ-1>의 과제는 실험에 참여한 학생들이 이전에 경험하지 못한 것으로써 자신의 수준에 맞게 수학적 모델을 만들고 실생활에서 흔히 접할 수 있는 질문을 수학적인 질문으로 바꾸는 열린 과제였다. 이 과제의 열린 환경은 질문, 과제공간에서 생략된 정보 및 데이터로 구성되고 열린 풀이방법도 하나의 환경으로 포함시켰다. 학생들이 <표Ⅲ-1>의 과제공간을 만든 후에 연구자를 포함한 5명의 전문가들이 각각의 과제공간에 대한 타당도를 분석하였다. 여기서 과제공간은 Goldin과 Luger(1975)의 연구에서 문제해결의 문제공간과 유사한 개념으로 모델링 과제의 구조를 정하는 것이다. 이 문제공간은 문제의 구조를 판단하기 위해 활용될 때 문제의 복잡성을 이해하는 첫 단계가 될 수 있다.

학생들이 과제당 평균 20분 안에 해결하고 연구자는 학생들의 과제 풀이과정을 보고 성취도와 과제 특수 발견 전략을 분석하였다. 과제 해결의 전략도 포함한 성취도는 백분율로 나타내는 점수로 정의하고 모델링 과제공간의 설정, 과제의 복잡성을 측정하는 평가척도의 설계, 설계된 평가척도의 타당도를 학생들의 성취도를 통해 조사하였다.

이 연구에서 모델링 과제의 복잡성을 계량화하기 위하여 실험연구를 한 이유는 교육과정의 설계에서 모델링 과제의 중요성, 과제설정의 어려움, 열린 질문의 생성 등과 같은 교육적인 가치를 학생들이 체험하여 미래의 수학교사가 준비해야 할 것이 무엇인지를 알게 하는 목적이 있었기 때문이다.

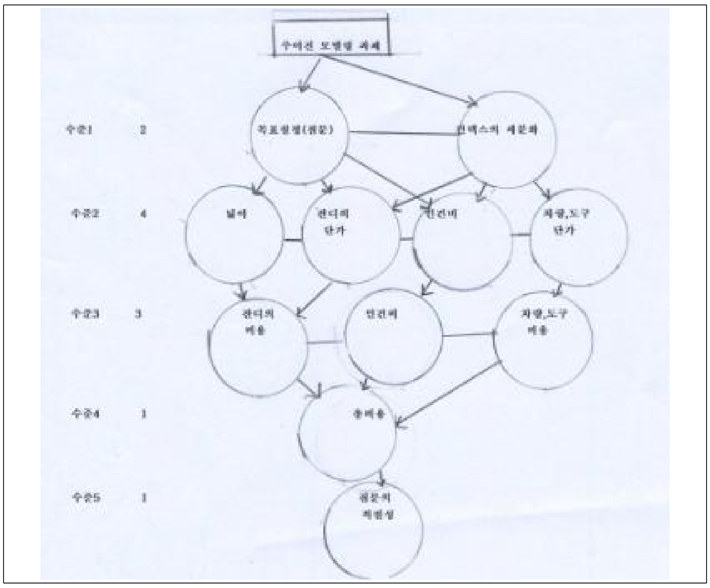
Ⅳ. 연구결과

1. 과제공간에서 과제복잡성의 평가척도(rating scheme)설계

일반적인 문제와는 다른 구조를 가진 모델링 과제는 열린 정도를 나타내는 새로운 평가척도를 설계해야 한다. Reit 외(2015)의 평가척도 모델을 발전시킨 본 연구의 평가척도 모델을 예비 실험에서 확인한 모델링 과제인 ‘잔디 덮기’에 적용하였다.

> 어느 날 선생님은 우리 학교의 지도(축척: 5000분의 1)를 가져와서 모둠을 정하고 각 모둠별로 지도를 하나씩 분배하여 다음과 같은 과제를 주셨다.
> “오늘 교무회의에서 학교의 건물을 제외한 지역에 잔디를 덮기로 결정하였어요. 여러분이 보고 있는 지도의 하얀 부분이 잔디를 덮어야 할 부분인데 각 모둠은 무엇을 해야 할 것인지를 정하도록 해요.”

위 모델링 과제의 구조는 이론적 배경에서 확인한 '호수주변 산책하기'의 문제해결과는 다른 아이디어를 가지며 보통의 문제에서는 볼 수 없는 열린 정도와 언어요소를 포함하고 있다. 우선 문제 해결자가 구성해야 할 새로운 데이터가 3개 이상이고 가장 중요한 수학적 질문을 과제의 구조에 알맞게 만들어야 하며, 정보와 데이터 선택에 대한 문장구조의 세분화 작업을 해야 한다. 이러한 과정을 통해 확정된 모델링 과제의 구조, 즉 과제공간은 [그림Ⅳ-1]과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 잔디덮기에 대한 모델링 과제공간

'잔디 덮기' 과제에 주어진 5개의 수준에 해당하는 점수는 차례로 2, 4, 3, 1, 1이고, 그 구조에 대응된 점수는 2!+4!+3!+1!+1!=34이다. 이 점수는 모델링 과제의 구조에 대응되지만 과제의 복잡성을 대표한다고는 볼 수 없다. 이때 Reit 외(2015)는 모델링 과제가 가지는 독특한 성격, 즉 모델링 과제의 구조 외에 다른 요인으로 생각할 수 있는 과제의 열린 정도와 언어적 짜임(주가 되는 문장의 수 또는 보조 문장의 수)을 고려해야 한다고 주장하였다. 여기서 열린 정도는 종전의 문제 정의에서 볼 수 없는 것으로써 수학적인 질문의 여부, 충분하지 않은 정보 또는 데이터, 차원을 결정하는 그림 등을 말한다. 이처럼 모델링 과제의 복잡성에 관한 연구는 세 가지 정보인 모델링 과제의 구조, 과제의 열린 정도, 언어적 짜임을 과제의 복잡성을 결정하는 요인으로 생각하였다(Graumann, 2002; Reit & Ludwig, 2015). 그러므로 본 연구에서는 과제의 열린 정도와 언어적 짜임을 과제의 복잡성을 결정하는 요인으로 생각하여 Reit 외(2015)가 제시한 평가척도의 모델을 수정하여 이들을 계량적인 수치로 나타내었다.

0점: 모델링 과제가 모든 관련 데이터나 정보를 포함하고 문제를 표현한 주 문장은 하나이다.
1점: 모델링 과제에서 빠진 데이터 또는 정보가 2개 이하이고 주 문장이 2개 이하이며 과제의 정보를 표현한 그림의 차원이 완전하지 못하다.
3점: 모델링 과제에서 빠진 데이터 또는 정보가 3개 이상이고 주 문장의 수도 3개 이상이다.

모델링 과제의 복잡성을 계량적으로 판단하기 위하여 과제 구조에서의 점수, 열린 정도와 언어적 짜임의 점수를 모두 합하였다. 수치가 높을수록 과제 복잡성은 커진다고 볼 수 있는데, 모델링 과제 '잔디 덮기'에 주어진 5개 수준에 해당하는 점수는 2, 4, 3, 1, 1이며 구조에 대응된 점수는 2!+4!+3!+1!+1!=34, 이 점수에 과제의 열린 정도와 언어적 짜임에 대응하는 3점을 합치면 '잔디 덮기' 모델링 과제에 대응하는 복잡성의 점수는 37점이다. 이와 같은 방법으로 선별된 5개의 모델링 과제의 복잡성에 대한 점수를 산출하면 <표Ⅳ-1>과 같다.

<표Ⅳ-1> 선별된 수학적 모델링 과제의 복잡성에 대한 점수

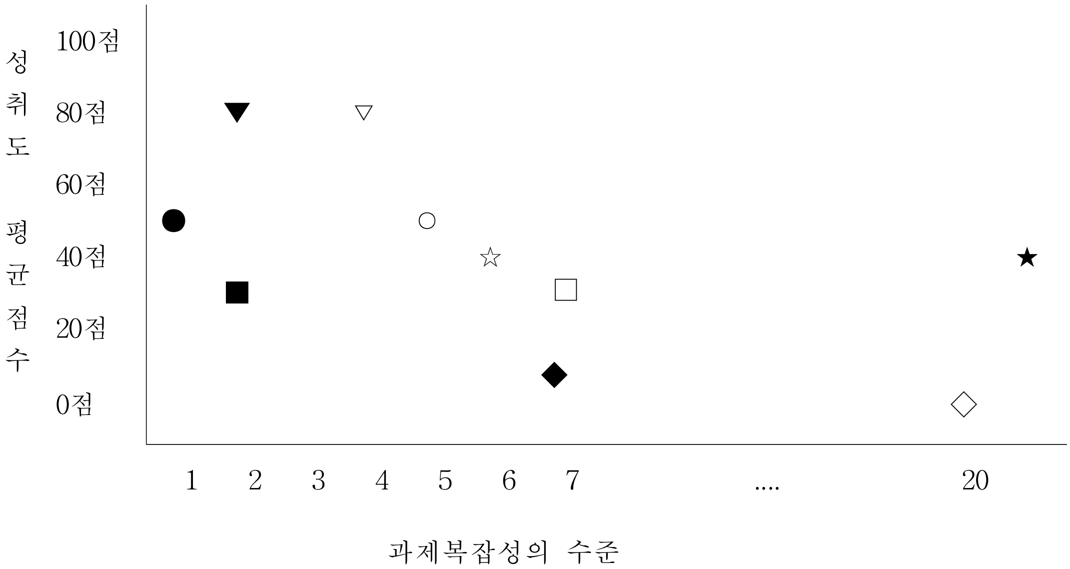
모델링 과제	세부점수		총 점수	비고
	과제구조	열린 정도와 언어적 짜임		
Ts	36	3	39	티셔츠가게 주인 선택
Ds	64	3	67	우편배달의 고민
Es	42	3	45	국립공원 호수 생태계
Ab	52	3	55	농사대행 업체의 홍보
Pt	216	3	219	시내 주차장 설치

새로운 평가척도 모델의 설계에서 유의해야 할 점은 제안한 모델의 타당성 여부이다. 본 연구에서 설계한 평가척도의 타당도에 대하여 첫 번째는 전통적으로 문제의 복잡성을 정하는 방식인 문제해결에 사용되는 개념의 난이도와 학생들의 성취도 관계를 비교하는 관점, 두 번째는 이 연구에서 정한 평가척도를 이용한 과제복잡성의 수준과 학생들의 성취도 관계를 비교하는 관점으로 분석하였다.

먼저 '전통적인 평가척도로 산출된 수준-학생 성취도'의 관계를 좌표평면에 표시하기 위하여 학교에서 사용하는 개념 난이도를 계량적인 수치로 바꾸었다. 위계적인 학문의 성격을 고려하여 수학과 교육과정의 중1, 중2, 중3, 고1, 고2, 고3의 내용을 수치로 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 나타내어 각 학년의 개념에 해당하는 수치에 !(factorial)을 붙여 과제 복잡성의 가중치를 부여하는 평가척도를 설정하였다. 가령 일차부등식의 개념은 중학교 2학년의 내용이므로 이 개념이 들어 있는 과제의 복잡성은 $2!=2\times1=2$이고 삼각함수 개념은 고등학교 2학년의 개념이므로 과제의 복잡성은 $5!=5\times4\times3\times2\times1=60$이다. 좌표평면의 x축에는 평가척도 방식으로 얻은 점수를, y축에는 표본으로부터 얻은 학생들의 성취도(평균점수)를 나타내고 순서쌍(x, y)을 점 대신 <표Ⅳ-2>와 같이 과제별 표기방식을 사용하여 '전통적인 평가척도로 산출된 과제복잡성의 수준-학생 성취도'와 '본 연구에서 설계한 평가척도로 산출된 과제복잡성의 수준-학생 성취도'의 두 관계를 [그림Ⅳ-2]과 같이 좌표평면에 나타내었다.

<표Ⅳ-2> 선별된 수학적 모델링 과제별 표기방식

평가척도 모델링 과제	Ts	Ds	Es	Ab	Pt
전통적인 평가척도	▼	■	●	★	◆
본 연구에서 설계한 평가척도	▽	□	○	☆	◇



[그림 Ⅳ-2] 과제복잡성의 수준과 성취도 평균점수의 관계

비교되는 두 관계를 [그림Ⅳ-2]와 같이 한 좌표평면에 나타냈기 때문에 x축의 기준 단위가 다르다는 것에 주의해야 한다. 즉 '본 연구에서 설계한 평가척도로 산출된 과제복잡성의 수준-학생 성취도' 관계를 나타내는 ▽, □, ○, ☆, ◇ 의 x축 값은 [그림Ⅳ-2]의 좌표평면 x축 기준의 10배로 생각해야 한다. 예를 들면 좌표평면에서 표기 ■, □를 순서쌍으로 나타내면 ■는 (2, 24), □는 (67, 24)인데 비록 x축 기준 단위가 다르지만 두 관계의 패턴을 비교하는 데 문제는 없다. [그림Ⅳ-2]를 해석하면 본 연구에서 설계한 평가척도로 산출된 점수가 클수록 학생의 성취도는 낮은 일관성을 보이는 반면, 전통적인 평가척도로 산출된 과제복잡성의 수준과 성취도 사이는 그런 관계를 볼 수 없기 때문에 본 연구의 과제 복잡성을 정하는 평가척도의 방식이 타당도가 높다고 볼 수 있다.

2. 과제공간과 과제 특수 발견 전략의 관계

연구문제 2는 모델링의 과제공간 안에서 발생하는 세 가지의 요인인 과제 복잡성, 과제 특수 발견전략 그리고 학생 성취수준 사이의 관계성 여부이었다. 본 연구자는 Silver와 Marshall(1990)이 주장한 올바른 정답을 보장해 주지는 않지만 답으로 이끄는 유용한 방향을 제시하는 과제 특수 발견 전략에 관심을 가졌다. 이러한 과제 특수 발견 전략은 이미 알

고 있는 문제와 동일한 목표구조(문제공간)를 가진 새로운 문제에 접했을 때 문제해결의 수행을 강화한다(Novick & Holyoak, 1991). 모델링 사이클에서 수학적 모델을 결정한 이후로는 Polya의 문제해결 과정이 적용되기 때문에 문제공간의 연구결과가 모델링의 과제공간에서도 가능하다고 보았다. 앞에서 제시한 모델링 과제공간에서 학생들이 사용한 과제 특수 발견전략을 표로 정리하면 <표Ⅳ-3>와 같다. 이를 위해 학생들의 과제 해결의 결과 중에서 완벽하게 해결된 것을 선택하여 그들이 선호하는 발견전략만을 조사하였다.

<표Ⅳ-3> 학생들의 모델링 과제 해결에서 사용된 과제 특수 발견 전략의 유형

전략 / 과제	과제 특수 발견 전략												성취수준	평가척도점수
	Si	An	Ap	Vex	Ge	Go	Dt	As	Sp	Sy	Co	총개수		
Ts	o			o								2	1	39
Ds	o	o		o	o	o	o			o		7	4	67
Es	o			o			o					3	2	45
Ab	o	o		o	o	o						5	3	55
Pt	o	o	o	o	o	o	o	o			o	10	5	219

Si: 실세계 상황에서 수학적 아이디어 끌어내기, An: 유추, Ap: 근사 또는 어림, Vex: 변수식의 설정, Ge: 일반화 또는 조직, Go: 목표설정, Dt: 그림 또는 표, As: 보조원고 설정, Sp: 문제단순화, Sy: 대칭관계, Co: 필요한 정보데이터(수치)

<표Ⅳ-3>는 각 과제에 들어있는 발견 전략의 수(총 개수), 학생 성취수준, 과제 복잡성의 평가척도를 나타내고 있는데, 성취수준은 학생들이 과제를 얼마나 어렵게 보고 있는지를 나타내는 것으로써 수치가 높을수록 학생들이 어렵게 생각한다는 것이다. 이는 학생들의 성취수준으로 나타내었지만 학생들은 과제 해결의 어려움의 원인을 과제 특수 발견 전략이나 과제 복잡성으로 말하는 것을 다음 대화에서 알 수 있다.

학생 1: (특정 과제를 지적하며) 보조원소의 설정은 쉽게 떠오르지 않아요. 고등학교에서는 문제에 모든 정보가 충분히 있어서 우리는 배운 지식을 생각하여 문제를 해결하는 데에는 어려움이 없었어요. 그 시절에 이런 경험을 자주했으면 훨씬 좋았을 것 같아요. 우리 모둠원들은 이것이 가장 어렵다고 하네요.

연구자: 다른 모둠의 의견은 어떤가요?

학생 2: 기하문제를 해결하는 것은 아직도 어려워요. 기하문제는 보조원소의 설정이 자주 이용되기 때문에 풀 때는 항상 어려움이 커요. 중, 고등학교에서 기하문제가 출제되는 중간, 기말고사에서는 풀이를 외워서 시험 준비를 했어요. 기하문제나 확률문제는 모두 어려웠어요.

이와 같이 학생들의 성취수준이 낮은 모델링 과제는 두 가지의 요인, 즉 과제 복잡성과 과제 특수 발견 전략이 관련되어 있다. 표에서 Ds(우편배달의 고민)과제를 보면 과제 복잡성(평가척도 점수)과 과제 특수 발견 전략의 개수가 각각 두 번째로 많다. 또 Ab(농사대행 업체의 홍보)도 각각 세 번째로 많고 나머지의 모델링 과제도 같은 경향을 보인다. 모델링 과제 5개를 실험대상으로 한 본 연구에서는 모델링 과제 복잡성의 척도, 학생 성취수준, 과제 특수 발견 전략의 개수 사이에 일관성이 있는 경향을 보였다.

V. 결 론

융합형 인재를 양성하는 수학교육이 부족하다라는 비판을 해결하기 위해 학교수학에서는 수학의 내·외적 통합을 강조하는 모델링 교육을 교육과정으로 도입하자는 주장이 논의되어 왔다(Pollak, 1979; Blum & Leiss, 2005). 이것이 실현되기 위해서는 모델링 과제의 개발이 가장 중요하며 그 과제의 성격에 대해 Zawojewski 외(2007)는 모델링 과제는 문제 해결자가 일상적인 학교 경험을 넘어 수학적인 생각에 집중할 수 있어야 하고 일반화하려는 결과물은 목표 달성에 필요한 개념적 도구 또는 복합적인 가공물을 포함하는 실제적인 상황이어야 한다고 주장하였다. 이에 본 연구자도 수학적 모델링 교육을 학교교육의 핵심활동 중 하나로 도입해야 한다고 보며 모델링 과제의 성격도 Zawojewski 외(2007)의 견해에 동의한다. 이 연구를 위해 38명의 예비 수학교사들이 실험에 참여하였으며 실험결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째는 종전의 문제구조를 표현한 문제공간(state space)을 발전시켜 모델링 과제에 맞는 과제공간의 모델을 완성하였다. 1980년대에 완성한 Kantowski(1972)관점의 문제공간은 문제구조를 표현하는 방법으로 활용되었으나 문제의 열린 정도를 반영하지 않아서 모델링 과제에는 적당한 방법이 아니었다. 이후 몇 명의 연구자들이 모델링 과제에 적절한 모델을 만들었는데(Graumann, 2002; Reit & Ludwig, 2015) 이 연구에서 생성한 모델링의 과제공간은 선행연구의 아이디어를 받아들이면서 과제의 열린 정도를 고려한 발전된 모델이고 모델링의 과제공간에서 과제 복잡성을 수치로 표현한 계량적인 모델의 평가척도를 설계하였다. 이 평가척도 모델은 Reit 외(2015)와 Graumann(2002)의 사고 구조의 순서도에 대한 가중치를 적용한 방식을 발전시킨 것이다. 이렇게 설계된 과제 복잡성의 평가척도(rating scheme)에 대하여 두 가지 관점에서 타당도를 조사하였다. 첫째는 학교에서 교사들이 문제의 복잡성을 측정하는데 자주 사용하는 방식으로, 둘째는 이 연구에서 정한 계량화된 평가척도로 과제의 복잡성과 학생 성취도의 관계를 분석하였는데 두 가지 관점의 비교로 이 연구에서 정한 방식이 보다 일관성이 있는 것임을 입증하였다.

둘째는 모델링 과제 복잡성의 척도, 학생 성취 수준, 과제 특수 발견 전략의 개수 사이에는 일관된 패턴이 있음을 발견하였다. 선행연구에서는 과제 특수 발견 전략은 올바른 해의 방향을 제시하는 역할을 한다(Silver & Marshall, 1990)는 것이고 이미 알고 있는 문제와 동일한 목표구조를 가진 새로운 문제에 접했을 때 문제해결의 수행을 강화한다는 것이었다(Novick & Holyoak, 1991). 이 연구에서는 세 가지 요인, 즉 학생들의 성취수준, 과제 복잡성의 평가척도, 과제에 들어있는 발견 전략의 개수 사이에는 일정한 경향이 있다는 것을 보였다.

수학적 모델링은 학생이 미래 사회에 적응하는데 중요한 사고활동을 할 수 있는 발판이 되기 때문에 많은 모델링 과제를 활용한 수업이 수학과 교육과정에 자유롭게 도입이 되어야 하고 본 연구결과는 모델링의 활용적인 면에서 매우 긍정적으로 볼 수 있다.

참고 문헌

김민경, 민선희, 강선미 (2009). 초등교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구. **한국학교수학회논문집, 12**(4), 411-431.

신현성 (2001). 수학적 모델링을 통한 교육과정의 구성원리. **한국학교수학회논문집, 4**(2), 27-32.

신현성, 이명화 (2011). 실세계 상황에서 수학적 모델링 과제설정 효과. **한국학교수학회논문집, 14**(4), 423-442.

신현성, 한혜숙 (2009) 한국과 미국의 교과서 체제 비교분석. **한국학교수학회논문집, 12**(2), 309-325.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context*, 3-14.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling Up"-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In CERME 4 - *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633).

Caldwell, J. H., & Goldin, G. A. (1979). Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 323-336.

Cauzinille-Marmèche, E., & Julo, J. (1998). Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems. *Learning and Instruction, 8*(3), 253-269.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J., & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland* (pp. 109-144). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (Vol. 10).* Springer Science & Business Media.

Goldin, G. A., & Luger, G. P. (1975). Problem structure and problem solving behavior. In *Proceedings of the 4th international joint conference on Artificial intelligence-Volume 1* (pp. 924-931). Morgan Kaufmann Publishers Inc..

Graumann, G. (2002). *Mathematikunterricht in der Grundschule*. Julius Klinkhardt.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 89-98). Springer US.

Jerman, M. (1974). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 5*(1), 109-123.

Kaiser, G. (2013). Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 1-2). Springer Netherlands.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education*, 163-180.

Knifong, J. D., & Holtan, B. (1976). An analysis of children's written solutions to word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 106-112.

Lesh, R., & Fennewald, T. (2010). Introduction to Part I Modeling: What Is It? Why Do It?. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 5-10). Springer US.

Lester, F. K. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. In *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 53-86). ERIC Center Columbus.

Linville, W. J. (1969). The Effects of Syntax and Vocabulary upon the Difficulty of Verbal Arithmetic Problems with Fourth Grade Students.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principle and Standards for School Mathematics. VA: NCTM

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving* (Vol. 104, No. 9). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Niss, M. (2001). *Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling* (pp. 72-88). Matos et al., loc. cit.

Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of experimental psychology: Learning, memory, and cognition, 17*(3), 398.

Reit, X. R., & Ludwig, M. (2015). Thought structures as an instrument to determine the degree of difficulty of modelling tasks. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 917-922).

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information: Solving related problems. *Journal for research in mathematics education*, 54-64.

Silver, E. A., & Marshall, S. P. (1990). Mathematical and scientific problem solving: Findings, issues, and instructional implications. *Dimensions of thinking and cognitive instruction, 1*, 265-290.

Stavy, R., & Tirosh, D. (1993). When analogy is perceived as such. *Journal of Research in Science Teaching, 30*(10), 1229-1239.

Varaki, B. S., & Earl, L. (2006). Math modeling in educational research: An approach to methodological fallacies. *Australian journal of teacher Education, 31*(2), 3.

vom Hofe, R., Jordan, A., Hafner, T., Stölting, P., Blum, W., & Pekrun, R. (2009). On the Development of Mathematical Modelling Competencies The PALMA Longitudinal Study. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, 47.

Zawojewski, J. S., & McCarthy, L. (2007). Numeracy in Practice. *Principal Leadership, 7*(5), 32-37.

A Study on Setting of Mathematical modelling Task Space and Rating Scheme in its Complexity

Hyun Sung Shin[3) · Heesun Choi[4)

Abstract

The purpose of this study was to decide the task space and Rating Scheme of task difficulty in complicated mathematical modelling situations. One of main objective was also to conform the validation of Rating Scheme to determine the degree of difficulty by comparing the student performance with the statement of the theoretical model. In spring 2014, the experimental setting was in Modelling Course for 38 in-service teachers in mathematics education. In conclusions, we developed the Model of Task Space based on their solution paths in mathematical modelling tasks and Rating Scheme for task difficulty. The Validity of Rating Scheme to determine the degree of task difficulty based on comparing the student performance gave us the meaningful results. Within a modelling task the student performance verifies the degree of difficulty in terms of scoring higher using solution approaches determined as easier and vice versa. Another finding was some relations among three research topics, that is, degree of task difficulty on rating scheme, levels of students performance and numbers of specific heuristic. Those three topics showed the impressive consistence pattern.

Key Words : Mathematical modelling task space, task difficulty, rating scheme for task difficulty, specific heuristic

Received September 1, 2016
Revised November 24, 2016
Accepted December 9, 2016

∗ 2010 Mathematics Subject Classification: 97D99

3) Kangwon National University (hsshin@kangwon.ac.kr)
4) EBS (heesun0205@gmail.com), Corresponding Author