韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.91
2016. 2. 제 55권, 제 1호, 91-106.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2016, Vol. 55, No. 1, 91-106.

귀류법에 대한 교사 지식 분석

-'교과 내용 지식' 및 '학생의 이해에 대한 지식'을 중심으로-

황진연(전남대학교 대학원)
신보미(전남대학교)†

Ⅰ. 서론

2014학년도에 처음 적용된 2009 개정 고등학교 교육과정에서는 2007 개정 교육과정의 중학교 2학년에서 다루었던 '증명'을 수학Ⅱ의 '명제' 단원으로 옮겨오면서 "⑤ 대우를 이용한 증명과 귀류법을 이해한다"라는 성취기준을 추가하였다(교육과학기술부, 2011, p. 61). 박선화, 박은아, 서민희(2013)에 따르면 이러한 변화에는 고등학교 1학년 수학에서 증명 부분을 강화하려는 교육과정상의 의도가 담겨 있으며, 여러 가지 증명법을 통해 궁극적으로는 학생들의 증명 능력을 신장시키려는 목적이 있다. 그러나 귀류법은 2009 개정 교육과정에서 처음으로 교육과정 수준의 명시적인 내용 요소로 도입된 바, 학교수학을 통해 학습 목표로서 주요하게 지도된 사례를 찾기가 쉽지 않다. 즉, 대부분의 수학 교사들은 수업을 통해 귀류법의 의미를 구체적으로 지도한 경험이 많지 않으며, 중・고등학교에서도 그 의미를 직접적으로 배운 적이 없을 가능성이 크다. 이는 2009 개정 고등학교 교육과정을 통해 새롭게 도입된 귀류법이 의미있게 지도되기 위해서는 이에 대한 교사 지식의 특징이 분석될 필요가 있음을 보여준다. 수업 실행을 위한 교사 지식에 영향을 미치는 요인 중 하나는 교사 자신이 중・고등학교에서 교육받은 배경에 있기 때문이다(Hiebert, 2013).

교사의 지식은 수업 실행 능력과 밀접하게 관련되며 학생의 수학 학습에 주요한 영향을 미친다. 학교 교육과정은 교실에서 수업을 하는 교사에 의해 실제로 구현되며, 수학 수업은 수업의 외적 요인보다 교사 지식의 특징에 따라 다르게 실행된다(조성민, 2006; Stein, Pemillard, & Smith, 2007). 이와 같이 교사의 수업 전문성을 결정짓는 교사 지식은 다양하고 복합적인 요소들로 구성되며 이들 요소간의 역동적인 상호작용에 의해 설명된다(Rowland & Ruthven, 2011). 이에 교사 지식의 의미와 구성 요소, 분석 방법 등은 연구자의 견해와 연구 목적에 따라 다양한 접근이 존재한다(방정숙, 정유경, 2013; Petrou & Goulding, 2011).

그러나 이경은(2007)에 따르면 교사 지식에 대한 여러 선행 연구는 가르치고자 하는 수학 내용과 관련된 '학생의 이해에 대한 지식'[1]을 교사 지식의 주요 구성요소로 다룬다. Shulman(1987; Marks, 1990)은 학생들의 오개념에 대한 교사의 인식을 교육과정 및 교재 재구성의 출발점으로 삼았으며, Ball, Hill, & Bass(2005)는 교사가 수학적 지식에 대한 학생들의 이해와 관련된 지식을 갖는 것은 학생들의 수학적 성장을 도모하는 수업을 고안하는데 필수 요소가 된다고 하였다. Misailidou(2008)와 Chick, Backer, Pham, & Cheng(2006)는 학생들의 수학적인 사고 과정과 수학적 오개념에 대해 교사가 풍부한 지식을 가짐으로써 학습 동기 및 학업 성취에 의미있는 영향을 줄 수 있다고 지적하였다.

한편, 교사 지식에서 '교과 내용 지식'[2]은 교사의 수

* 접수일(2016년 1월 5일), 수정일(2016년 2월 5일), 게재확정일(2016년 2월 10일)
* ZDM분류: C64
* MSC2000분류: 97C70
* 주제어: 귀류법, 교사 지식, 명제
† 교신저자

1) 학생의 이해에 대한 지식은 학생이 지식을 이해하는 전형적인 패턴에 대한 지식, 가르치고자 하는 내용에 대한 학생의 오류 및 오개념에 대한 지식 등을 포함한다(Marks, 1990).

2) 교과 내용 지식은 가르치고자 하는 교과의 핵심 내용 및 이론, 개념 등을 알고 이를 적절히 조직할 수 있는 지식, 교과에서 다루는 주요 모델을 구성하고 그 모델의 타당성을 입증할 수 있는 지식 등을 말한다(Shulman, 1986).

업 설계와 실행에 중요한 위치를 차지한다. Fennema & Franke(1992)은 교사의 수학적 지식은 수학교육 전반에 가장 강력한 영향을 미친다고 하였으며, Levenson(2012)는 교과 내용 지식과 관련된 교사의 혼돈은 수업을 통해 학생들에게 그대로 전달되어 해당 개념에 대해 동일한 혼돈을 야기할 수 있다고 지적하였다. Ball, Thames, & Phelps(2008)와 박경미(2009)에 따르면 교과 내용에 대한 교사의 지식은 교수 방법의 결정에 직접적인 토대가 되므로 수업에서 다루는 과제의 형태를 결정할 뿐만 아니라, 수학적 개념을 학생에게 제시하는 방식에도 영향을 미친다. 이상에 따르면 수학 교사의 지식을 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'의 관점에서 분석하는 것은 수학을 가르치는데 필요한 교사 지식의 특징을 살피는데 주요한 시사점을 줄 수 있다.

이에 이 연구는 현직 고등학교 교사를 대상으로 귀류법에 대한 교사 지식을 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'의 측면에서 분석하여 귀류법 지도와 관련된 교사 교육과정의 설계와 실행에의 시사점을 모색하는데 목적을 둔다. 이를 위해 귀류법에 대한 '교과 내용 지식' 및 '학생의 이해에 대한 지식'과 관련된 지필 검사를 실시하여 귀류법에 대한 교사 지식의 특징을 기술하고자 한다. 지필 검사 문항은 귀류법에 대한 교수학적 분석에 기초하여 추출된 주요 관점을 토대로 개발하고, 개발된 검사 문항을 통해 얻은 지필 검사 결과는 귀류법에 대한 교수학적 분석으로부터 구체화된 주요 이슈에 비추어 분석한다.

Ⅱ. 이론적 배경

이하에서는 귀류법에 대한 교사 지식의 특징을 알아보는 지필 검사 문항의 개발 관점을 추출하고 지필 검사 결과를 분석하는데 필요한 주요 이슈를 확인하기 위해 진행한 귀류법에 대한 교수학적 분석 결과를 기술한다.

1. 귀류법의 논리적 구조

수학에서 귀류법은 실제 증명하고자 하는 명제를 직접 증명하기 어려울 때 사용하는 방법으로 가정보다 결론의 부정이 훨씬 쉽게 이해되는 경우에 사용된다. 특히 어떤 수학적 진술이 고려되는 모든 상황에서 참이 됨을 증명해야 할 때 예측되는 모든 경우를 직접 확인하는 것이 어렵거나 논리적으로 복잡한 구조를 가지게 되면 귀류법에 의한 증명이 효과적이다(Jacquette, 2008).

귀류법에 의한 증명은 '$p \Rightarrow q$'을 증명하기 위해 이와 동치명제인 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'을 증명하는 방법이다(송형수, 2008). 즉, 귀류법은 명제의 결론에 대한 부정을 하나의 새로운 전제로 삼아 주어진 가정에 덧붙임으로써 모순을 이끌어 내어 원래 명제가 참임을 보이는 증명법이다(이병무, 2009; Lin & Lin, 2008). 이상에 따르면 $p \Rightarrow q$ 을 귀류법으로 증명하는 과정에서 '$p \wedge \sim q$'을 가정하는 것은 '$p \rightarrow q$'와 동치 명제인 '$\sim p \vee q$'의 부정을 가정하는 것으로, 명제 $p \rightarrow q$ 이 참임을 주장하고자 할 때 $p \rightarrow q$ 이 참임을 부정하여 거짓이라고 하면 모순이 유도되기 때문에 $p \rightarrow q$ 은 참일 수밖에 없음을 보이는 사고 전략에 따른 것이다. 이는 일상생활에서 '만약 그렇지 않다면'을 가정하여 새로운 사실을 추론하는 발견적 전략이 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조에 담겨 있음을 보여준다(Freudenthal, 1974)[3].

귀류법에 의한 증명은 주어진 명제의 가정으로부터 결론을 직접 유도하는 것이 아니라, 실제로는 참인 원래의 명제를 부정하여 거짓이라고 가정한 새로운 명제를 상정함으로써 증명을 전개하기 때문에 이를 수행하는 사람에게는 상당한 인지적 압박을 준다. 그러나 '$p \Rightarrow q$'을 증명하기 위해 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'을 보이는 귀류법에 의한 증명은 '만약 $p \Rightarrow q$ 이 아니라면 어떻게 될까?'와 같은 일상적인 추론 전략에 기반하고 있는 바, 증명 전략으로서 귀류법의 타당성은 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'의 가정인 '$p \wedge \sim q$'이 '$p \rightarrow q$ 의 부정'이 됨을 인식하는 것에서 출발한다고 볼 수 있다(Antonini, 2006).

이상에 따르면 귀류법에 의한 증명은 '$p \Rightarrow q$'과 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'의 동치관계에 기초하여 '$p \rightarrow q$ 가 참'임을 보이기 위해 '$p \wedge \sim q$'을 가정함으로써 결론이 되는 '모순'을 끌어내는 논리적 구조를 지닌다. 이에 귀류법을 지도하는 교사는 타당한 증명 방법으로서 귀류법의 토대가 되는 이와 같은 논리적 구조에 대한 교과 내

3) 일상적인 사고에서 귀류법은 자연스러운 추론 양식이며 발견적 도구가 된다. 이와 관련된 일상생활의 예에는 다음과 같은 것이 있다. 집에 분명히 누군가가 있다. 만약 그렇지 않다면 문이 잠겨 있을 텐데 문이 열려 있기 때문이다(우정호, 2008).

용 지식을 지닐 필요가 있다. 이러한 맥락에서 귀류법에 대한 교사 지식을 살피기 위한 지필 검사 문항은 다음 주요 관점에 비추어 개발한다.

개발 관점 1. 귀류법으로 명제를 증명할 때 교사들은 어떤 교과 내용 지식을 보이는가?

개발 관점 2. 귀류법의 논리적 구조와 관련하여 교사들은 어떤 교과 내용 지식을 지니고 있는가?

2. 귀류법과 대우를 이용한 증명

증명법은 크게 직접증명법과 간접증명법으로 나눌 수 있다(송형수, 2008). 직접증명법은 참으로 인정되는 몇 개의 명제에서 출발하여 가정 p 로부터 결론 q 을 유도함으로써 명제 $p \rightarrow q$ 가 참임을 증명하는 방식이다[4]. 간접증명법은 원래 명제가 참임을 보이기 위하여 그와 동치인 다른 명제가 참임을 직접증명에 의해 보이는 방법으로 귀류법과 대우를 이용한 증명이 여기에 속한다(Antonini & Mariotti, 2007). 다음 예시 1은 원래 명제 $p \rightarrow q$ 가 참임을 보이기 위하여 동치인 대우명제 $\sim q \rightarrow \sim p$, 즉 '자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면 n^2 이 홀수이다'가 참임을 직접증명법에 의해 보인 것으로 대우를 이용한 증명이다. 한편 예시 2는 '$p \Rightarrow q$'을 증명하기 위하여 동치명제인 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순', 즉 '($ab=0$ 이고 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$) $\Rightarrow 1=0$'임을 직접증명에 의해 보인 것으로 귀류법에 의한 증명에 해당한다. 실제로 원래 명제와 동치인 명제 '($ab=0$ 이고 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$) $\Rightarrow 1=0$'의 가정인 ($ab=0$ 이고 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$)은 원래 명제 '$ab=0 \Longrightarrow (a=0$ 이거나 $b=0$)'을 부정한 것으로 '$1=0$'이라는 모순을 유도하게 된다.

예시 1.

명제 : 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

증명 : n을 홀수라 하면 자연수 k 에 대하여 $n=2k-1$ 이다. 따라서 $n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$ $=2(2k^2-2k)+1$ 이므로 n^2 은 홀수이다.

예시 2.

명제 : 두 실수 a,b 에 대하여, $ab=0$이면 $a=0$ 이거나 $b=0$ 이다.

증명 : $ab=0$ 이고 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 라 하면 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 이기 때문에 $ab=0$의 양변을 a와 b로 나눌 수 있다. 그러면 $1=0$ 이라는 모순을 얻는다 (Antonini & Mariotti, 2007, p. 543).

이상에 따르면 '$p \Rightarrow q$'을 증명하기 위하여 대우를 이용한 증명은 '$\sim q \Rightarrow \sim p$'을 보이는 것이며, 귀류법에 의한 증명은 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'을 보이는 것이다. 2009 개정 고등학교 교육과정의 수학 Ⅱ에는 "⑤ 대우를 이용한 증명과 귀류법을 이해한다"(교육과학기술부, 2011, p. 61)는 성취기준이 제시되어 있는 바, 대우를 이용한 증명과 귀류법에 의한 증명을 구별하여 다루려는 교수학적 의도가 있다고 볼 수 있다. 그러나 많은 경우에 학생들은 대우를 이용한 증명과 귀류법을 혼용하여 사용하는 경향이 있으므로(Wu, Lin, & Lee, 2003), 이를 지도하는 교사는 두 증명 방법의 차이에 대한 교과 내용 지식을 지님과 동시에 학생들의 이해 특징에 대한 지식도 지닐 필요가 있다. 이에 귀류법에 대한 교사 지식을 알아보기 위한 지필 검사 문항 개발의 주요 관점에 다음 내용을 추가한다.

개발 관점 3. 대우를 이용하여 명제를 증명할 때 교사들은 어떤 교과 내용 지식을 보이는가?

개발 관점 4. 귀류법과 대우를 이용한 증명의 차이와 관련하여 교사들은 어떤 교과 내용 지식을 지니고 있는가?

개발 관점 5. 귀류법 및 대우를 이용한 증명의 논리적 구조와 관련된 학생의 이해에 대해 교사들은 어떤 지식을 지니고 있는가?

Ⅲ. 연구 방법

1. 검사도구

이 연구에서는 귀류법에 대한 교사 지식을 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'의 측면에서 분석하기 위하여 지필 검사 문항[5]을 개발하였다. 이를 위해 귀류법에 대한 교수학적 분석으로 부터 지필 검사 문항

4) 논리학에서는 9개의 함의규칙과 10개의 동치규칙을 상정하여 직접증명의 출발점으로 삼는다(김희정, 박은진, 2004).

5) 검사 문항의 세부 내용은 <부록 2>를 참조하기 바란다.

개발의 주요 관점 5가지를 추출하고, 이를 토대로 교사 지식을 알아보기 위한 검사 도구를 구체화하였다. '교과 내용 지식'과 관련된 문항은 2009 개정 고등학교 교육과정의 수학 Ⅱ 교과서에 비추어 총 4개를 제작하였다. '학생의 이해에 대한 지식'을 알아보는 문항 개발을 위해서는, 귀류법을 학습한 경험이 있는 학생들의 귀류법에 대한 이해 정도를 우선적으로 파악해야 하였으므로 광역시 소재 대학의 수학과와 수학교육과 1학년 학생들을 대상으로 귀류법과 관련된 문제해결력 검사를 실시하였다[6]. 대학생들을 대상으로 한 문제해결력 검사 결과를 토대로 귀류법에 대한 '학생의 이해에 대한 지식'을 살피는 총 2개의 문항을 제작하였다.

문항 1은 귀류법과 대우를 이용하여 실제로 명제를 증명하는 능력과 관련된 교과 내용 지식(개발 관점 1, 3)을 살펴보기 위해 수학 Ⅱ 교과서에서 다루는 내용 중에서 발췌하였다. 문항 2는 귀류법의 논리적 구조와 관련된 교과 내용 지식을 확인하기 위한 것이며(개발 관점 2), 문항 3과 4는 귀류법과 대우를 이용한 증명의 차이에 대한 교과 내용 지식을 알아보는 문항이다(개발 관점 4).

문항 5와 6은 귀류법 및 대우를 이용한 증명의 논리적 구조와 관련된 학생의 이해에 대한 교사 지식을 알아보려는 의도로 개발하였다. 이를 위해 학생들의 귀류법에 대한 이해 정도를 살펴보는 문제해결력 검사[7]를 실시하였다. 귀류법에 대한 문제해결력 검사 대상은 대학에서 집합론 강좌를 통해 귀류법을 학습한 경험이 있는 1학년 학생 59명으로 하였다. 답변이 불성실한 7명을 제외한 52명의 응답 결과에 비추어 귀류법에 대한 학생들의 이해의 특징을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 귀류법 또는 대우를 이용하여 주어진 명제를 모두 옳게 증명한 학생은 52명중 32명, 어떤 것도 증명하지 못한 학생이 11명이었다. 증명을 요구한 명제가 수학 Ⅱ에서 발췌한 고등학교 수준의 것임을 감안하면 귀류법과 대우를 이용하여 명제를 증명하는 학생들의 능력이 충분하지 않음을 알 수 있다. 둘째, 명제 1을 귀류법으로 옳게 증명한 32명 중에서 귀류법의 논리적 구조를 바르게 선택한 학생은 11명에 불과하였다. 귀류법으로 증명을 수행할 수 있는 학생들조차도 그 증명의 타당성을 인식하는데 필수적인 귀류법의 논리적 구조를 이해하지 못하고 있었다. 대다수의 학생들은 귀류법의 논리적 구조로 '$\sim q \rightarrow$모순' 또는 '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$모순'을 선택하였다.

이상 귀류법에 대해 학생들이 이해하고 있는 특징에 기초하여, 귀류법으로 명제 1을 옳게 증명한 학생들 중에서 자신이 작성한 증명의 논리적 구조를 '$\sim q \rightarrow$모순' 또는 '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$모순'으로 잘못 설명한 학생 A와 학생 B의 서술을 사용하여 문항 5와 6을 제작하였다[8]. 문항 5와 6은 교사가 귀류법에 대한 학생의 이해를 확인하고 학생이 잘못 생각한 부분을 찾아 적절히 진단할 수 있는지를 알아봄으로써 '학생의 이해에 대한 지식'을 살피기 위한 것이다(개발 관점 5).

2. 분석 방법

이 연구의 연구 대상은 교육 경력 15년 내외의 현직 고등학교 교사 34명으로 현재 또는 가까운 미래에 귀류법에 대한 수업을 고안하고 이를 실제로 실행하여 관련 개념에 대한 학생들의 이해에 주요한 영향을 미칠 것으로 예측되는 교사들이다. 개발된 검사 도구를 활용하여 2015년 3월에 교사들을 대상으로 약 1시간에 걸쳐 지필 검사를 실시하였다. 검사 결과에 대한 분석은 교사들이 제시한 답변을 유형별로 분류하고 각 답변 유형별로 인원수를 정리하는 것에서 시작하였다. 이렇게 정리한 연구 대상의 답변 유형은 검사 문항 개발 관점을 추출하는 과정에서 확인한 주요 이슈에 비추어 분석하였다. 귀류법에 대한 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'을 세부적으로 분석하기 위한 주요 이슈를 정리하면 [표 1]과 같다.

6) 2009 개정 고등학교 교육과정의 수학 Ⅱ에서는 귀류법의 논리적 구조를 명시적으로 다루지 않으므로 이에 대한 학생의 이해를 파악하기 위해 고등학생을 대상으로 하는데 한계가 있다. 대학의 집합론 강좌에서는 귀류법을 '$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순$]$ (이병무, 2009; 송형수, 2008; Lin & Lin, 2008)'과 같이 정의하므로 귀류법으로 작성한 증명의 논리적 구조를 묻는 문항에 대해 의미있는 반응을 얻기 위해서 집합론을 배운 대학교 1학년 학생들을 문제해결력 검사 대상으로 삼았다.

7) 학생들을 대상으로 실시한 귀류법과 관련된 문제해결력 검사의 세부 내용은 <부록 1>을 참조하기 바란다.

8) 귀류법과 관련된 학생의 이해에 대한 교사 지식을 분석할 때 귀류법에 대해 교사 자신이 지닌 교과 내용 지식의 특징과의 관계를 간접적으로 살펴보기 위하여 문항 1에 사용된 명제 1에 대한 학생의 서술을 문항 5와 6에 활용하였다.

[표 2] 귀류법에 대한 교사 지식 분석 틀
[Table 1] Framework descriptors for analyzing the teachers’ responses about reductio ad absurdum

범주	내용
Ⅰ. 교과 내용 지식	Ⅰ-1. 귀류법과 대우를 이용하여 명제를 어떻게 증명하는가?
	Ⅰ-2. 귀류법의 논리적 구조를 어떻게 이해하는가?
	Ⅰ-3. 귀류법과 대우를 이용한 증명을 어떻게 구별하는가?
Ⅱ. 학생의 이해에 대한 지식	Ⅱ-1. 귀류법에 대한 학생의 이해에서 잘못된 부분을 확인할 수 있는가?
	Ⅱ-2. 귀류법에 대한 학생의 이해에서 잘못된 부분을 어떻게 진단하는가?

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

이하에서는 지필 검사 결과를 [표 1]에 비추어 분석하여 드러난 귀류법에 대한 교사 지식의 특징을 ‘교과 내용 지식’ 및 ‘학생의 이해에 대한 지식’의 측면에서 구체적으로 살펴본다.

1. 귀류법에 대한 교과 내용 지식

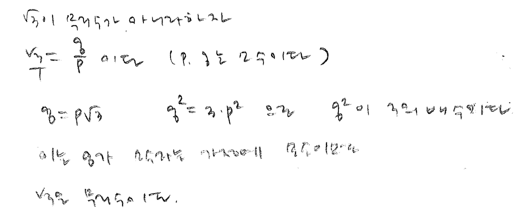
1) 귀류법과 대우를 이용하여 명제를 증명할 때 교과서의 내용 전개 방식을 따르는 경향이 있다.

연구대상 34명 중 명제 1을 증명하는데 오류를 보인 1명을 제외하고는 모든 교사가 명제 1과 2를 모두 옳게 증명하였다. 명제 1과 2의 증명 방법에 따른 답변 유형은 [표 2]와 같다.

[표 3] 문항 1과 2의 답변 유형
[Table 2] The teachers’ responses to question 1 and 2

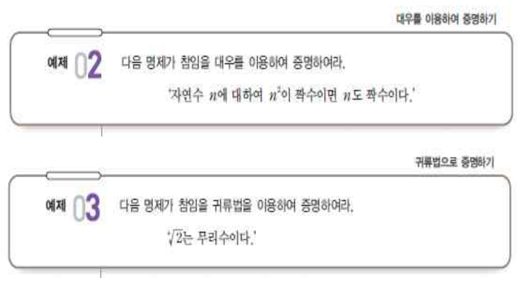
답변 유형		응답자 수
명제1	명제2	
귀류법으로 증명	대우를 이용한 증명	26
귀류법으로 증명	귀류법으로 증명	5
귀류법으로 증명	대우를 이용한 증명, 귀류법으로 증명	2
귀류법으로 증명(증명에 오류가 있음)	대우를 이용한 증명	1

명제 1의 증명을 잘못 작성한 교사는 [그림 1]과 같이 ‘$\sqrt{3}$ 을 무리수가 아니라고 가정하면 소수 p, q 에 대하여 $\frac{q}{p}$ 로 나타낼 수 있다’고 기술하였다. 유리수와 관련된 교과 내용 지식에 있어 다소간의 혼동을 지닌 교사라고 볼 수 있다.



[그림 1] 유리수에 대한 교과 내용 지식의 예
[Fig.1] An example of content knowledge about rational number

한편 위 교사를 포함하여 27명의 교사가 명제 1은 귀류법으로, 명제 2는 대우를 이용하여 증명하였다. 명제 2의 경우 귀류법을 이용하여 증명할 수 있음에도 대부분의 교사가 [그림 2]와 같이 2009 개정 교육과정의 수학 Ⅱ 교과서 내용을 반영하여 명제 1과 2를 증명하는데 각각 귀류법과 대우를 이용하는 교과 내용 지식을 보여주었다(Ⅰ-1).



[그림 2] 수학 Ⅱ에서 명제 1과 2를 다루는 예(김원경 외, 2014, p. 44)
[Fig.2] An example of the proposition 1 and 2 in Mathematics Ⅱ
(Kim et al., 2014, p. 44)

실제로 2009 개정 교육과정의 수학 Ⅱ 교과서 10종 모두가 대우를 이용한 증명을 통해 명제 2를 설명한 다음 명제 1은 귀류법을 이용하여 증명하는 방식으로 내용을 전개하고 있는 바, 교사들이 이러한 교과서의 내용에 기초하여 주어진 명제를 증명한 것으로 볼 수 있다. 박지현(2008)과 안선영, 방정숙(2006)에 따르면 교사 지식은 교과서에 제시된 내용 및 자료, 진행 순서에 의존하는 경향이 있으므로, 수학 Ⅱ 교과서에서는 대우를 이용하여 증명한 명제를 귀류법으로 다시 증명해 보도록 함으로써 두 가지 증명 방법을 음미해 보는 기회를 제공할 필요가 있다. 특정 명제가 특정 방법으로만 증명될 수 있는 것은 아니므로 한 가지 명제를 여러 가지 방법으로 증명해 보는 것은 수학 Ⅱ에 귀류법을 도입하여 학생들의 증명 능력을 개발하려는 교육과정상의 의도(박선화 외, 2013)에도 부합한다고 볼 수 있다.

2) 귀류법의 논리적 구조를 '$\sim q \to$모순' 또는 '$(p \to \sim q) \to$모순'으로 파악한다.

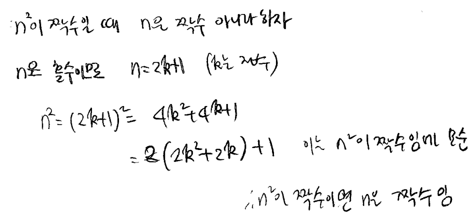
문항 2에서는 문항 1에서 교사 자신이 작성한 증명 과정의 논리적 구조를 선택지에서 고르도록 하였다. 이는 귀류법에 의한 증명이 '$p \Rightarrow q$'와 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$모순'의 동치관계에 기초하고 있음을 교사들이 인식하고 있는지 파악하기 위한 것이다. 문항 1에서 명제 1과 2를 귀류법으로 증명한 교사들이 문항 2에서 선택한 답변 유형은 [표 3]과 같다.

[표 4] 귀류법의 논리적 구조에 대한 답변 유형
[Table 3] The teachers' responses related to the logical structure of reductio ad absurdum

답변 유형		응답자수
명제 1을 귀류법으로 증명	①$(p \wedge \sim q) \to$모순	17
	⑥$\sim q \to$모순	9
	④$(p \to \sim q) \to$모순	7
	⑦$\sim q \to \sim p$	1
명제 2를 귀류법으로 증명	①$(p \wedge \sim q) \to$모순	3
	④$(p \to \sim q) \to$모순	2
	⑥$\sim q \to$모순	1
	⑦$\sim q \to \sim p$	1

명제 1은 전체 34명의 교사 모두가 귀류법으로 증명을 시도하여 1명을 제외한 모든 교사가 그 증명을 옳게 수행하였다. 그러나 귀류법의 논리적 구조 '$(p \wedge \sim q) \to$모순'을 바람직하게 선택한 교사는 17명에 불과하였다. 그 외 16명의 교사는 명제 1을 귀류법으로 옳게 증명하였으면서도 자신이 작성한 증명의 구조를, $\sim q$를 가정으로 보고 모순을 이끌어 내는 '$\sim q \to$모순'으로 택하거나 $p \to \sim q$를 가정으로 보고 모순을 유도하는 '$(p \to \sim q) \to$모순'으로 파악하는 교과 내용 지식을 보여주었다(Ⅰ-2). 명제 1과 관련된 이상의 특징은 명제 2를 귀류법으로 증명한 교사들의 답변 유형에도 비슷하게 나타났다. 간접증명법은 원래 명제가 참임을 보이기 위하여 그와 '동치인 다른 명제'가 참임을 보이는 방법이지만, 교사들은 '$p \to q$'와 '$\sim q \to$모순'와의 동치성 또는 '$(p \to \sim q) \to$모순'와의 동치성에는 주의를 기울이지 않았다. 특히 '$\sim q \to$모순'은 '$p \to q$'이 참임을 보이는데 가정 p을 사용하지 않은 것으로 바람직한 증명 구조라고 보기 어려움에도 교사들은 이 점을 간과하였다.

또한 명제 2를 귀류법으로 옳게 증명하였으나 그 논리적 구조를 '$(p \to \sim q) \to$모순'이라고 설명한 교사 중에는 '$p \to \sim q$'와 '$p \wedge \sim q$'을 혼동하는 경우가 있었다. 명제 2를 귀류법으로 증명한 교사 중에는 [그림 3]과 같이 'n^2이 짝수일 때 n이 짝수가 아니라고 하자'로 '$p \wedge \sim q$'에 해당하는 내용을 가정으로 설정하였으면서도 자신이 작성한 증명의 논리적 구조가 '$(p \to \sim q) \to$모순'에 해당한다고 하였다.



[그림 3] 명제 2에 대한 교사의 증명 예
[Fig. 3] A teacher's proof of the proposition 2

Durand-Guerrier(2003)에 따르면 조건사인 '이면'과 연결사인 '이고'에 대한 혼돈은 $p \to q$와 같은 함의 개

념 이해에 주요한 장애가 되는 바, 다수의 교사가 귀류법의 논리적 구조를 '$(p\wedge\sim q)\rightarrow$모순'가 아닌 '$(p\rightarrow\sim q)\rightarrow$모순'으로 파악하는 것도 이러한 장애에 기인했을 가능성이 있다.

한편 명제 2는 연구대상 34명 중 중복을 포함하여 29명이 대우를 이용하여 증명하였으며 29명 모두가 자신들이 작성한 증명의 논리적 구조가 '$\sim q\rightarrow\sim p$'에 해당한다고 바르게 선택하였다. 이상을 종합해 보면 교사 대부분은 귀류법과 대우를 이용하여 주어진 명제를 적절하게 증명할 수 있으며 대우를 이용한 증명의 논리적 구조도 바람직하게 파악할 수 있으나, 귀류법에 의한 증명에 대해서는 그 논리적 구조를 인식하는데 어려움이 있다[9]. 증명 전략으로서 귀류법의 타당성은 참인 명제 $p\rightarrow q$을 부정하여 $\sim(p\rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$을 가정하면 모순이 유도됨을 보이는 과정에서 보장되므로(노영순, 2010; Antonini, 2006), 귀류법을 지도하는 교사들은 그 논리적 구조와 관련된 교과 내용 지식을 필수적으로 지닐 필요가 있다.

3) 귀류법은 '결론을 부정하여 모순을 보임으로써 결론이 참임을 보이는 방법'이라고 생각한다.

문항 3과 4는 귀류법과 대우를 이용한 증명의 차이에 대한 교과 내용 지식을 알아보기 위한 것으로, 문항 3에서 12명의 교사는 두 가지 증명이 동일한 증명 방법이라고 답변하였다. 앞서 문항 2에서 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조로 '$\sim q\rightarrow\sim p$'을 선택한 교사가 있었던 바, 교사 중에는 귀류법과 대우를 이용한 증명을 혼용하는 경우가 적지 않음을 알 수 있다(Ⅰ-3). 이는 귀류법과 대우를 이용한 증명을 혼동하는 학생들의 오개념(Wu, Lin, & Lee, 2003)이 교사들에게도 나타날 수 있음을 보여준다. 이러한 오개념을 지닌 교사들은 "⑤ 대우를 이용한 증명과 귀류법을 이해한다"와 같은 수학 Ⅱ의 성취기준을 의미있게 지도하는데 한계가 있을 것으로 예상된다. 교사 교육과정을 통해 귀류법과 대우를 이용한 증명 사이의 관계가 보다 명시적으로 다루어질 필요가 있다.

한편, 문항 3에 대하여 22명의 교사는 귀류법과 대우를 이용한 증명이 동일하지 않다고 답변하였으며 이들은 문항 4를 통해 귀류법과 대우를 이용한 증명의 의미를 각각 설명함으로써 그 차이를 드러내고자 하였다. 문항 4의 답변 유형을 정리하면 [표 4]와 같다.

[표 4] 귀류법과 대우를 이용한 증명의 의미에 대한 답변 유형

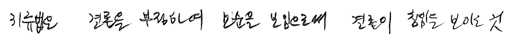
[Table 4] The teachers' responses to the meaning of reductio ad absurdum and proof by contraposition

답변 유형		응답자 수
귀류법에 의한 증명	결론을 부정하여 모순을 보임으로써 결론이 참임을 보이는 것	10
	$p\rightarrow\sim q$일 때 모순임을 보이는 것	2
	'$(p\wedge\sim q)\rightarrow$모순'을 증명하는 것	4
	주어진 명제의 가정을 그대로 지키면서 결론을 부정한 후 모순을 유도하는 것	3
대우를 이용한 증명	결론을 부정하면 가정을 부정한 명제가 참이 됨을 보이는 것	6
	'$\sim q\rightarrow\sim p$'임을 증명하는 것	9
	대우 명제를 증명하는 것	4
무응답		3

귀류법과 대우를 이용한 증명을 서로 다른 증명 방법으로 인식하는 교사 22명 중 10명은 [그림 4]와 같이 귀류법에 대해 '결론을 부정하여 모순을 보임으로써 결론이 참임을 보이는 방법', 즉 '$\sim q\rightarrow$모순'을 보이는 증명 방법이라는 교과 내용 지식을 지니고 있었다(Ⅰ-2).

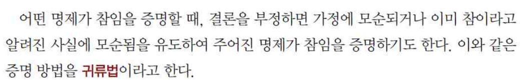
9) 명제 1과 2의 증명 방법에 따라 일치하는 논리적 구조를 바르게 선택한 응답자의 수는 다음과 같다.

	문항 1		문항 2	
	증명 방법	응답자 수	논리적 구조	응답자 수
명제1	귀류법으로 증명	34	①$(p\wedge\sim q)\rightarrow$모순	17
명제2	귀류법으로 증명	7	①$(p\wedge\sim q)\rightarrow$모순	3
명제2	대우를 이용한 증명	29	⑦$\sim q\rightarrow\sim p$	29



[그림 4] 귀류법에 대한 교사의 설명 예
[Fig. 4] A teacher's explanation for reductio ad absurdum

이러한 교과 내용 지식은 2009 개정 교육과정의 수학 Ⅱ 교과서 10종 가운데 7종이 [그림 5]와 같이 귀류법을 정의하고 있는 것과 무관하지 않아 보인다.


어떤 명제가 참임을 증명할 때, 결론을 부정하면 가정에 모순되거나 이미 참이라고 알려진 사실에 모순됨을 유도하여 주어진 명제가 참임을 증명하기도 한다. 이와 같은 증명 방법을 **귀류법**이라고 한다.

[그림 5] 수학 Ⅱ 교과서의 귀류법 정의 예(이준열 외, 2014, p. 50)
[Figure 5] An example of a definition of reductio ad absurdum in Mathematics Ⅱ(Lee et al., 2014, p. 50)

귀류법에 의한 증명은 '$p \Rightarrow q$'와 '$(p \wedge \sim q) \Rightarrow$ 모순'의 동치관계에 기초하고 있으며, 이는 '만약 $p \Rightarrow q$ 이 아니라면 어떻게 될까?'와 같은 일상적인 추론 전략과 관련이 있다. 이에 학교 수학에서 귀류법의 소개는 [그림 5]처럼 단순히 '결론을 부정하여 모순을 보이는 증명 방법'으로 도입하는 대신에 '명제가 참임을 밝히기 위해 그 명제가 참이 아니라면 어떻게 될까라는 의문에 기초하여, 주어진 명제를 부정함으로써 모순을 유도하는 증명 방법이다. 즉, 귀류법은 가정이 성립하는데 결론이 성립하지 않으면 모순이 유도됨을 밝히는 증명 방법이다[10]'와 같이 소개하는 것이 보다 적절해 보인다. 귀류법 지도를 다룬 여러 선행 연구(Freudenthal, 1974; Jacquette, 2008; Antonini, 2006; Polya, 2005)는 '만약 이것이 아니라면'과 같은 추론 전략이 귀류법과 관련된 사고에 내재되어 있음을 보임으로써 증명 전략으로서 뿐만 아니라 수학적인 발견의 도구로서 귀류법의 의미를 드러낼 수 있다고 강조한 바 있다.

귀류법과 대우를 이용한 증명이 서로 다른 증명이라고 지적한 교사 22명 모두는 대우를 이용한 증명의 의미를 [표 4]에서 보듯이 비교적 분명하게 설명하였다. 이상에 따르면 교사들 중 일부는 귀류법과 대우를 이용한 증명을 혼동하는 경우가 있지만 대부분의 교사는 귀류법과 대우를 이용한 증명이 서로 다른 증명 방법인 것을 인식하고 있다(Ⅰ-3). 그러나 그 차이점을 설명함에 있어 대우를 이용한 증명의 의미는 바람직하게 제시한 반면 귀류법은 '결론을 부정하여 모순을 보임으로써 결론이 참임을 보이는 방법'이라는 불충분한 교과 내용 지식을 지니고 있다.

2. 귀류법에 대한 학생의 이해에 대한 지식

1) 귀류법에 대한 학생의 이해에서 잘못된 부분을 파악하는데 한계가 있다.

문항 5와 6은 귀류법의 논리적 구조에 대한 학생의 잘못된 이해를 교사가 파악할 수 있는지를 알아보기 위한 문항이다. 문항 5와 6에서 학생은 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'는 명제를 귀류법으로 옳게 증명하였지만 자신이 작성한 증명의 논리적 구조를 각각 '$\sim q \to$모순'와 '$(p \to \sim q) \to$모순'이라고 잘못 설명하였다. 이러한 학생의 오개념에 대한 교사들의 답변 유형은 [표 5]와 같다.

[표 5] 문항 5와 6의 답변 유형
[Table 5] The teachers' responses to question 5 and 6

문항 5	답변 유형		응답자 수
학생이 설명한 논리적 구조: $\sim q \to$모순	옳지 않다	수정 내용	
		$(p \wedge \sim q) \to$모순	7
		$(p \to \sim q) \to$모순	3
		$\sim q \to \sim p$	1
	옳다		23
문항 6	답변 유형		응답자 수
학생이 설명한 논리적 구조: $(p \to \sim q) \to$모순	옳지 않다	수정 내용	
		$(p \wedge \sim q) \to$모순	7
		$\sim q \to$모순	2
		$\sim q \to \sim p$	1
	옳다		24

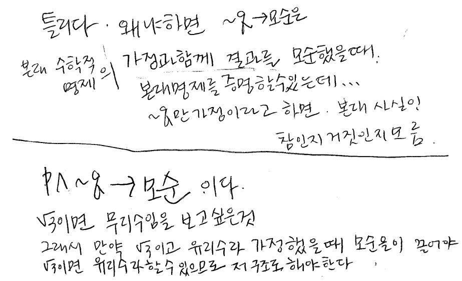
10) 이는 대부분의 집합론 교재(노영순, 2010; 이병무, 2009; 송형수, 2008, Lin & Lin, 2008)에서 귀류법을 정의하는 방식이다. 또한, 미국 고등학교 교과서 Integrated mathematics 3에서도 귀류법을 이와 비슷하게 다음과 같이 설명한다. 귀류법은 증명하고자 하는 명제의 반대(opposite)를 일시적으로 가정하여 불가능한 상황이나 이미 있는 사실에 대해 모순을 유도하는 방법이다(Rubenstein, Craine, & Butts, 2000, p.180).

문항 5와 6에서 학생의 잘못된 설명이 옳다고 답한 교사는 각각 23명과 24명으로, 연구대상 대부분은 귀류법에 대한 학생의 이해에서 잘못된 부분을 확인하는데 어려움을 겪었다(Ⅱ-1). 이처럼 문항 5와 6에서 학생의 잘못된 설명을 파악하지 못한 교사들 중에는 문항 2에서 귀류법의 구조를 각각 '$\sim q \rightarrow$모순'과 '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$모순'으로 잘못 제시한 교사 9명과 7명이 모두 포함되었다[11]. 이는 귀류법에 대한 교사의 불완전한 교과 내용 지식이 학생의 잘못된 이해를 확인하고 진단하는데 어려움을 초래할 수 있음을 시사한다.

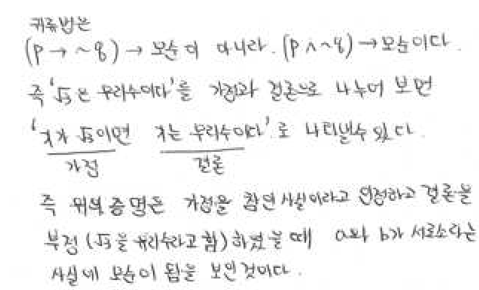
2) 귀류법에 대한 학생의 잘못된 이해를 진단하는데 명제에 대한 구조적 분석이 기여한다.

[표 5]에 따르면 문항 5와 6에서 학생의 설명이 옳지 않다고 지적한 교사는 각각 11명과 10명이었으나, 이를 귀류법의 논리적 구조인 '$(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순'에 기초하여 바르게 수정한 교사는 7명에 불과하였다. 앞서 문항 1과 2에서 17명의 교사가 명제 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'를 귀류법으로 증명하고 자신들이 작성한 증명의 논리적 구조를 '$(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순'으로 옳게 선택하였으면서도 이들 중 일부 교사만이 학생의 오류를 정확하게 지적한 것을 알 수 있다. 이는 교사가 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조를 단순히 알고 있는 것만으로는 귀류법에 대한 학생의 잘못된 이해를 파악하는데 어려움이 있음을 보여준다.

실제로 문항 5와 6에서 학생의 잘못된 설명을 귀류법의 논리적 구조인 '$(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순'을 사용하여 정확하게 수정한 교사 7명 모두는 명제 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'의 가정과 결론을 명시적으로 분석하여 학생의 오류를 [그림 6] 또는 [그림 7]과 같이 진단하였다(Ⅱ-2).



[그림 6] 문항 5에 대한 교사의 옳은 답변 예시
[Fig. 6] A teacher's correct explanation for question 5



[그림 7] 문항 6에 대한 교사의 옳은 답변 예시
[Fig. 7] A teacher's correct explanation for question 6

이들에 따르면 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'는 명제는 '어떤 수가 $\sqrt{3}$ 이면 이 수는 무리수이다'는 뜻으로 가정 p 는 '어떤 수가 $\sqrt{3}$ 이다'이고 결론 q 는 '그 수는 무리수이다'에 해당한다. 따라서 귀류법에 의한 증명에서 가정한 '$\sqrt{3}$ 이 유리수이다'는 '어떤 수가 $\sqrt{3}$ 인데 이것이 유리수이다'라는 의미로써 '$p \wedge \sim q$'을 가정한 것이다. 이는 대학 수준의 해석학 교재에서 관련된 명제를 '$x^2 = 2$ 이면 x 은 무리수이다(Fulks, 2014)'와 같이 기술하고 있는 것과도 같은 설명이다. 특히 [그림 6]의 교사는 '$p \rightarrow q$ 가 참'임을 보이는데 '$\sim q \rightarrow$ 모순'만을 보이는 것은 원래 명제의 가정인 p 가 '$\sim q \rightarrow$ 모순'을 보이는데 쓰이지 않았기 때문에 바람직한 증명의 구조로 보기 어렵다고 설명하면서 귀류법의 논리적 구조를 다시 한 번 강조하고 있다.

11) 문항 2는 명제 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'를 귀류법으로 증명한 교사들에게 자신이 작성한 증명의 논리적 구조를 선택하도록 한 문항으로 교사들의 구체적인 답변 유형은 [표 3]을 참조하기 바란다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구는 현직 고등학교 교사를 대상으로 귀류법에 대한 교사 지식을 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'의 측면에서 분석하여 귀류법 지도와 관련된 교사 교육과정의 설계와 실행에의 시사점을 모색하는데 목적을 두었다. 이를 위해 우선 귀류법과 관련된 선행 연구를 교수학적 관점에서 검토하여 귀류법에 대한 교사 지식을 알아보기 위한 지필 검사 문항을 개발하였다. '교과 내용 지식'을 확인하기 위한 문항은 수학 Ⅱ 교과서에서 다루는 기본 문항을 수정하여 구체화하였으며, '학생의 이해에 대한 지식'을 알아보는 문항을 개발하기 위해 대학교 1학년 학생 59명을 대상으로 귀류법에 대한 문제해결력 검사를 실시하였다. 문제해결력 검사로부터 확인된 귀류법에 대한 학생들의 이해 특징을 반영하여 '학생의 이해에 대한 지식'을 알아보는 문항을 개발하였다. 이렇게 개발된 검사 문항을 활용하여 현직 고등학교 교사 34명을 대상으로 지필 검사를 실시하였다. 지필 검사 결과는 귀류법에 대한 교수학적 분석으로부터 추출된 주요 이슈에 비추어 분석함으로써 귀류법에 대한 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해에 대한 지식'과 관련된 특징을 5가지로 요약하였다.

첫째, 대부분의 교사들은 2009 개정 교육과정의 수학 Ⅱ 교과서에 제시되어 있는 귀류법 내용에 대해서는 잘 숙지하고 있었으며, 관련된 증명도 적절히 수행하였다. 그러나 교과서에 분명하게 제시되어 있지 않은 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조에 대해서는 충분치 못한 교과 내용 지식의 특징을 보여 주었다. 여러 선행 연구는 교사 지식이 가르치는 교과서의 내용 및 전개 방법에 크게 영향을 받으며 교과서에서 다루지 않는 내용에 대해서는 부족한 측면을 드러낸다고 지적하였다(박지현, 2008; 안선영, 방정숙, 2006). 특히 교과 내용 지식이 부족한 교사일수록 가르치는 교과서에 보다 많이 의존하는 모습을 보이는 경향이 있다(곽주철, 류희수, 2008). 교과 내용 지식은 가르치는 교과서의 내용 자체를 아는 것에서 한 걸음 더 나아가 다루는 수학 내용에 대한 분석적 탐구와 이에 기반한 깊은 이해를 토대로 성장하고 개발되므로(Watson & Barton, 2011), 이와 관련된 교사 교육 프로그램의 설계와 실행이 무엇보다 시급하다고 볼 수 있다.

둘째, 많은 교사들이 귀류법의 논리적 구조와 관련하여 불충분한 교과 내용 지식을 지니고 있었다. 귀류법의 논리적 구조와 관련하여 교사들이 보인 오개념 중에는 학생들을 대상으로 실시한 문제해결력 검사에서 드러난 오개념과 비슷한 유형도 있었다. 교사 지식과 관련된 여러 선행 연구(Akkoç, Yesildere, & Özmantar, 2007; Greer & Mukhopadhyay, 2005)는 교사들 중 일부가 학생들과 비슷한 오개념을 가지고 있었으며, 이러한 교과 내용 지식의 특징은 학생의 이해에 영향을 미칠 수 있기 때문에 교사가 이에 대한 교수학적 경각심을 지닐 필요가 있다고 지적하였다. 귀류법에 의한 증명 지도와 관련하여 고등학교 수준의 수학 Ⅱ에서 '$p \to q$'을 귀류법으로 증명할 때 설정하는 가정 '$p \wedge \sim q$'이 '$p \to q$'을 부정한 결과라는 것을 학생에게 직접적으로 지도해야 하는가와 관련하여 별도의 논의가 필요하다고 하더라도, 이를 지도하는 교사는 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조가 '$p \to q$'와 '$(p \wedge \sim q) \to$모순'의 동치 관계에 기초한다는 사실을 이해할 필요가 있다. 교사는 학교 교육과정에서 다루는 내용 요소에 대한 깊은 지식을 지닐 필요가 있으며, 이는 개념들 사이의 연결성과 위계 관계를 인식하는데 필수적인 요소가 되기 때문이다(Ruthven, 2011).

셋째, 교사 중에는 일부이기는 하지만 귀류법과 대우를 이용한 증명의 차이를 정확히 파악하지 못하고 혼동하는 경우가 있었다. 또한 대부분의 교사는 귀류법에 대해 '결론을 부정하여 모순을 보임으로써 결론이 참임을 보이는 방법'이라는 교과 내용 지식을 지니고 있었다. 이는 귀류법을 '$p \to q$이 참'임을 보이기 위해 '$\sim q \to$모순'을 보이는 증명 방법으로 파악한 것으로 귀류법에 대한 적절한 이해라고 보기 어렵다. 귀류법이 2009 개정 교육과정 이전에는 학교 수학을 통해 교육과정 상의 명시적 내용 요소로 지도되지 않은 점을 감안하면 귀류법에 의한 증명의 논리적 구조가 교사 교육과정을 통해 보다 구체적으로 다루어질 필요가 있으며, 이에 대한 재교육프로그램이 적극적으로 고안될 필요가 있다.

넷째, 교사들은 귀류법의 논리적 구조와 관련된 학생의 설명에서 잘못된 부분을 파악하지 못하는 제한된 지식을 보여 주었다. 교사들은 귀류법을 이용하여 학생이 작성한 증명이 옳게 기술된 것만을 염두에 두어, 학생이

귀류법의 논리적 구조에 대해서도 제대로 알고 있을 것이라고 기대하는 듯하였다. 이러한 이유로 대부분의 교사들은 학생이 제시한 증명의 논리적 구조를 그대로 받아들여 옳다고 잘못 판단하는 모습을 보여 주었다. 교사들 중에서도 귀류법을 이용하여 완벽한 증명을 하였지만 그 증명의 논리적 구조를 잘못 설명한 경우가 있었듯이 학생들도 귀류법을 이용하여 증명을 기술하였지만 귀류법에 대해 표피적인 이해에 머물러 있을 가능성이 있다. 교과 내용에 대한 학생의 이해에 대한 정확한 지식을 갖기 위해서 교사는 학생이 제시한 답뿐만 아니라 풀이 과정에도 주의를 기울여야 하며 ‘학생이 왜 그렇게 생각했을까’와 같은 질문을 지속적으로 제기할 필요가 있다(김영옥, 2009)[12].

다섯째, 명제의 구조적 특징에 대한 깊은 이해는 귀류법에 대한 학생들의 잘못된 이해를 진단하는데 주요한 토대가 되었다. 가정과 결론이 직접적으로 드러나지 않는 명제인 ‘$\sqrt{3}$ 은 무리수이다’를 귀류법으로 증명할 때, ‘$\sqrt{3}$ 이 유리수라고 하자’는 가정에 대해 대부분의 교사들이 ‘$\sim q$’을 가정한 것으로 인식함으로써 학생의 잘못된 설명이 옳다고 판단하였다. 그러나 명제 ‘$\sqrt{3}$ 은 무리수이다’의 가정과 결론을 구조적으로 분석한 교사들 모두는 학생의 오류를 적절히 지적하였으며 그에 대한 수학적인 처방도 함께 제시하였다. Steinbring(2011)에 따르면 교과 내용에 대한 깊은 이해는 학생의 오개념의 특징을 예측하고 이를 진단하는데 주요한 토대가 된다.

이상의 연구결과에 따르면 귀류법의 의미 및 논리적 구조에 대한 교사들의 교과 내용 지식에 미흡한 부분이 있으며, 귀류법에 대한 학생의 불충분한 이해를 인식하고 이를 진단하는 교사 지식에 한계가 있다. 그러나 2009 개정 교육과정에서는 교사 재교육 프로그램이나 준비 기간에 대한 고려 없이, 교육과정 상의 주요 내용 요소로서 이전 교육과정에서는 다루어진 적이 없는 귀류법을 급작스럽게 도입하였다. 또한 2009 개정 교육과정에 기초한 수학 Ⅱ 교과서 7종에서 설명하고 있는 귀류법의 의미는 그 명확성과 관련하여 다소간의 논란의 여지를 담고 있다. 이러한 현실을 감안할 때, 학교 현장에서는 기존의 증명 지도와 관련된 어려움 이상으로 귀류법 지도에 상당한 어려움이 있을 것으로 예측할 수 있다. 귀류법을 도입하여 고등학교 1학년 수학의 증명 부분을 강화하고, 여러 증명 방법을 소개함으로써 학생들의 증명 능력을 개발하려는 교육과정의 의도가 실현되기 위해서는 이와 관련된 교사 재교육 프로그램의 설계와 실행, 귀류법의 의미와 관련된 교수학적 논의가 보다 적극적으로 진행될 필요가 있다.

12) 귀류법에 대한 학생의 이해와 관련된 적절한 지식을 갖기 위해 교사들은 우선 학생들의 이해에서 잘못된 부분을 파악할 수 있어야 하는 바, 이 연구는 귀류법에 대한 학생의 이해에서 부족한 부분을 교사들이 인식할 수 있는지 여부를 살핀 초기 연구로 볼 수 있다. 귀류법에 대한 학생의 이해와 관련하여 학생들이 왜 그렇게 생각하는지에 대한 교사 지식을 살피는 상세한 분석은 후속 연구로 남긴다.

참 고 문 헌

곽주철, 류희주 (2008). 평면도형에 대한 교사의 PCK와 수업 실제의 비교분석, 학교수학 10(3), 423-441.

Kwak, J. C. & Ryu, H. S. (2008). Comparative analysis of the PCK of teachers on plane figure and their educational practice, *School mathematics 10*(3), 423-441.

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부고시 제 2011-361호 [별책 8]. 서울: 교육과학기술부.

Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum*. MEST announcement 2011-361 [Seperate Volume 8]. Seoul: MEST

김영옥 (2009). 대학 신입생들의 명제에 대한 이해, 학교수학 11(2), 261-280.

Kim, Y. O. (2009). First-year undergraduate students' understanding about statements. *School mathematics 11*(2), 261-280.

김원경 외. (2014). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 비상교육.

Kim, W. K. et al. (2014). *High school mathematics Ⅱ*. Seoul: Visang.

김희정, 박은진 (2004). 비판적 사고를 위한 논리. 서울: 아카넷.

Kim, H. J. & Park, E. J. (2004). *Logic for critical thinking*. Seoul: Acanet.

노영순 (2010). 알기 쉬운 집합론. 서울: 교우사.

Noh, Y. S. (2010). *Set theory*. Seoul: Kyowoosa.

박경미 (2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토, 수학교육 48(1), 93-105.

Park, K. M. (2009). A meta review of the researches on PCK in mathematics. *The mathematical education 48*(1), 93-105.

박선화, 박은아, 서민희 (2013). 고등학교 성취평가제 운영의 실제-수학-. 서울: 한국교육과정평가원.

Park, S. H., Park, E. A., & Suh, M. H. (2013). *A study on developing operational plans for implementing achievement standards-based assessment in high schools: Mathematics*. Seoul: Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

박지현 (2008). 학습자의 오개념과 오류에 대한 교사들의 Pedagogical Content Knowledge 사례 연구 -중학교 1학년 함수 영역을 중심으로-. 석사학위 논문, 이화여자대학교.

Park, J. H. (2008). *A case study on pedagogical content knowledge about students' misconceptions and errors: Focused on the 7th grade function part*. Unpublished a master's thesis, Ewha Womans University.

방정숙, 정유경 (2013). 수학 수업에서 드러나는 교사 지식을 분석하기 위한 틀로서의 '교사 지식의 사중주 (Knowledge Quartet)', 수학교육 52(4), 567-586.

Pang, J. S. & Jung, Y. K. (2013). 'The knowledge quartet' as a framework of analyzing teacher knowledge in mathematics instruction, *The mathematical education 52*(4), 567-586.

송형수 (2008). 기초 집합론. 서울: 교우사.

Song, H. S. (2008). *Basic set theory*. Seoul: Kyowoosa.

안선영, 방정숙 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. 수학교육학연구 16(1), 25-41.

An, S. Y. & Pang, J. S. (2008). An analysis of the relationship between teachers' pedagogical content knowledge and teaching practice: Focusing on the area of plane figure. *Journal of educational research in mathematics 16*(1), 25-41.

우정호 (2008). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

Woo, J. H. (2008). *Educational basis of school mathematics*. Seoul: SNU press.

이경은(2007). 수업 실제에서 나타나는 교사의 Pedagogical Content Knowledge에 관한 사례연구-중학교 도형의 성질을 중심으로-. 석사학위논문, 서울대학교.

Lee, K. E. (2007). *Pedagogical content knowledge represented in teaching practice: Focusing on the case of mathematics teachers' teaching 'property of figure'*. Unpublished a master's thesis, Seoul National University.

이병무 (2009). 집합론의 이해. 서울: 경문사.

Lee, B. M. (2009). *Set theory*. Seoul: Kyungmoonsa.

이준열 외 (2014). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: 천재교육.

Lee, J. Y. et al. (2014). *High school mathematics II*. Seoul: Chunjae.

조성민(2006). 교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구-고등학교 함수 내용을 중심으로-. 박사학위논문, 이화여자대학교.

Cho, S. M. (2006). *Research on the relationship between teacher's knowledge and classroom practice evaluated from curriculum implementation perspective: Focused on knowledge of function in mathematics*. Unpublished a doctoral thesis, Ewha Womans University.

Akkoç H., Yesildere, S., & Özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: the problem of limit process. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics 27*(3), 7-12. Great Britain; British Society for Research into Learning Mathematics.

Antonini, S. (2006). Indirect proof : An interpreting model. In J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 190-197). Prague, Czech Republic.

Antonini, S. & Mariotti, M. A. (2007). Indirect proof: An interpreting model. *Proceedings of the 5th congress of the European society for research in mathematics education 2,* 541-550.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? *American educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of teacher education 59*(5), 389-407.

Chick, H., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). Aspects of teachers′ pedagogical content knowledge for decimals. In J. Novotaná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Volume 2, pp. 297-304). Prague, Czech Republic.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational studies in mathematics 53,* 5-34.

Fennema, E. & Frnake, L. M. (1992). Teachers′ knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). NY: Macmillan.

Freudenthal, H. (1974). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. reidel publishing company.

Fulks, W. (2014). *Advanced calculus: An introduction to analysis.* USA: Wiley.

Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty: Historical, cultural, social and political contexts. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). USA: Springer.

Hiebert, J. (2013). The constantly underestimated challenge of improving mathematics instruction. In K. R. Leatham (Eds.) *Vital direction for mathematics education research* (pp. 45-56). New York: Springer.

Jacquette, D. (2008). Mathematical proof and discovery reductio ad absurdum. *Informal logic 28*(3), 242-261.

Levenson, E. (2012). Teachers′ knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *Journal of mathematical behavior 31,* 209-219.

Lin & Lin (2008). 집합론. (이흥천 역). 서울: 경문사. (원저 1999년 출판).

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of teacher education 41*(3), 3-11.

Misailidou, C. (2008). Assessing and developing pedagogical content knowledge: A new approach. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings the 32nd conference of the international. group for the psychology of mathematics education* (Volume 3, pp. 391-398). Morelia, Mexico.

Petrou, M. & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers′ mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). New York: Springer.

Polya, G. (2005). 어떻게 문제를 풀 것인가? (우정호 역), 서울: 교우사. (원저 1956년 출판).

Rowland, T. & Ruthven, K. (2011). Introduction: Mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 1-8). New York: Springer.

Rubenstein, R. N., Craine, T. V., & Butts, T. R. (2000). *Integrated mathematics 3.* Boston: McDougal Littell.

Rutheven, K. (2011). Conceptualising mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 83-96). New York: Springer.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. E*ducational researcher 15,* 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review 57,* 1-22.

Stein, M. K., Pemillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). NC: Information Age Publishing.

Steinbring, H. (2011). Changed views on mathematical knowledge in the course of didactical theory development: Independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions? In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 43-64). New York: Springer.

Watson, A. & Barton, B. (2011). Teaching mathematics as the contextual application of mathematical modes of enquiry. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 65-82). New York: Springer.Wu, Y. J.,

Lin, F., & Lee, Y. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. *Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA* (Volume 2, pp. 443-449). Honolulu, HI.

An Analysis of Teacher's Knowledge about Reductio Ad Absurdum

-Focused on 'Subject Matter Knowledge' and 'Knowledge of Students' Understanding'-

Hwang, Jinyeon
Graduate School of Chonnam National University
E-mail: sk787@naver.com

Shin, Bomi†
Chonnam National University
E-mail: bomi0210@jnu.ac.kr

The aim of this study was to analyze characteristics of teachers' knowledge about reductio ad absurdum. In order to achieve the aim, this study conducted didactical analysis about reductio ad absurdum through examining previous researches and developed a questionnaire with reference to the results of the analysis. The questionnaire was given to 34 high school teachers and qualitative methods were used to analyze the data obtained from the written responses by the participants. This study also elaborated the framework descriptors for interpreting the teachers' responses in the light of the didactical analysis and the data was elucidated in terms of this framework. The specific features of teachers' knowledge about reductio ad absurdum were categorized into five types as a result. This study raised several implications for teachers' professional development for effective mathematics instruction related to reductio ad absurdum.

* ZDM classification : C64
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key Words : reductio ad absurdum, teachers' knowledge, proposition
† Corresponding author

<부록 1> 귀류법에 대한 문제해결력 검사 문항

※ 다음 질문을 잘 읽고 물음에 답해 주십시오.

명제 1. $\sqrt{3}$은 무리수이다. 명제 2. 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

1. 명제 1과 2를 증명해 주십시오(단, 한 명제를 여러 가지 방법으로 증명해도 됩니다.)
  1) 명제 1의 증명

  2) 명제 2의 증명

2. 1.에서 자신이 작성한 증명은 다음 <보기>중에서 각각 어떤 논리적 구조를 가지고 있습니까? (단, p는 원래 명제의 가정, q는 원래 명제의 결론, 모순은 수학적 사실에 모순을 뜻합니다.) <보기>에 해당하는 내용이 없다면 '기타'에 논리적 구조를 작성해 주십시오.

<보기>

① $(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순
② $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
③ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
④ $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$모순
⑤ $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow q$
⑥ $\sim q \rightarrow$모순
⑦ $\sim q \rightarrow \sim p$

	1.에서 자신이 작성한 증명의 논리적 구조	기타
명제 1		
명제 2		

3. '귀류법'과 '대우를 이용한 증명'이 동일한 증명 방법이라고 생각합니까?
① 그렇다 ② 그렇지 않다

4. 3.에서 ②를 택한 학생만 답하세요. 동일하지 않다고 생각한다면 둘은 어떤 차이가 있는지 설명해 주세요.

<부록 2> 귀류법에 대한 교사 지식 검사 문항

※ 다음 질문을 잘 읽고 물음에 답해 주십시오.

명제 1. $\sqrt{3}$은 무리수이다. 명제 2. 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

1. 명제 1과 2를 증명해 주십시오(단, 한 명제를 여러 가지 방법으로 증명하셔도 됩니다.)
  1) 명제 1의 증명

  2) 명제 2의 증명

2. 1.에서 선생님이 작성하신 증명은 다음 <보기>중에서 각각 어떤 논리적 구조를 가지고 있습니까? (단, p는 원래 명제의 가정, q는 원래 명제의 결론, 모순은 수학적 사실에 모순을 뜻합니다.) <보기>에 해당하는 내용이 없다면 '기타'에 논리적 구조를 작성해 주십시오.

<보기>

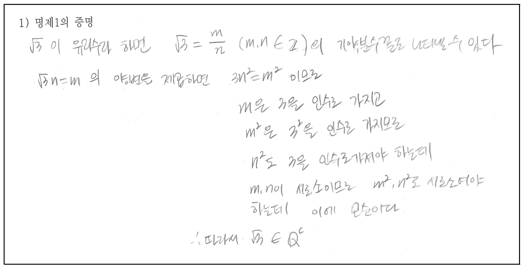
① $(p \wedge \sim q) \rightarrow$모순
② $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
③ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
④ $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$모순
⑤ $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow q$
⑥ $\sim q \rightarrow$모순
⑦ $\sim q \rightarrow \sim p$

	1.에서 선생님이 작성하신 증명의 논리적 구조	기타
명제 1		
명제 2		

3. '귀류법'과 '대우를 이용한 증명'이 동일한 증명 방법이라고 생각하십니까?
① 그렇다 ② 그렇지 않다

4. 3.에서 ②를 택한 선생님만 답하세요. 동일하지 않다고 생각하신다면 둘은 어떤 차이가 있는지 설명해 주세요.

5. 학생 A는 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'를 증명하라는 문제를 다음과 같이 해결하고, 자신이 작성한 증명의 논리적 구조가 '$\sim q \rightarrow$ 모순'이라고 설명하였습니다.(단, p는 원래 명제의 가정, q는 원래 명제의 결론, 모순은 수학적 사실에 모순을 뜻합니다.) 이 학생이 제시한 '$\sim q \rightarrow$ 모순'이 옳은지 판단하시고, 틀리다고 생각하신다면 다음 증명에 알맞은 논리적 구조를 쓰고 그 이유를 설명해 주십시오.


1) 명제1의 증명

$\sqrt{3}$ 이 유리수라 하면 $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$ $(m, n \in Z)$의 기약분수꼴로 나타낼 수 있다

$\sqrt{3}n=m$ 의 양변을 제곱하면 $3n^2=m^2$ 이므로

m은 3을 인수로 가지고

m^2은 3^2을 인수로 가지므로

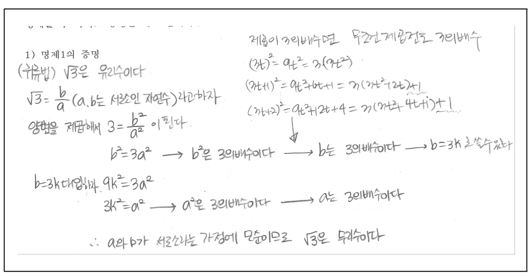
n^2도 3을 인수로가져야 하는데

m, n이 서로소이므로 m^2, n^2도 서로소여야

하는데 이에 모순이다

∴ 따라서 $\sqrt{3} \in Q^c$

6. 학생 B는 '$\sqrt{3}$ 은 무리수이다'를 증명하라는 문제를 다음과 같이 해결하고, 자신이 작성한 증명의 논리적 구조가 '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$ 모순'이라고 설명하였습니다.(단, p는 원래 명제의 가정, q는 원래 명제의 결론, 모순은 수학적 사실에 모순을 뜻합니다.) 이 학생이 제시한 '$(p \rightarrow \sim q) \rightarrow$ 모순'이 옳은지 판단하시고, 틀리다고 생각하신다면 다음 증명에 알맞은 논리적 구조를 쓰고 그 이유를 설명해 주십시오.


1) 명제1의 증명

(귀류법) $\sqrt{3}$은 유리수이다

$\sqrt{3}=\frac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)라고하자

양변을 제곱해서 $3=\frac{b^2}{a^2}$ 이된다.

$b^2=3a^2 \longrightarrow b^2$은 3의배수이다 $\longrightarrow$ b는 3의배수이다 $\longrightarrow$ $b=3k$로 쓸수있다

$b=3k$ 대입하자. $9k^2=3a^2$

$3k^2=a^2 \longrightarrow a^2$은 3의배수이다 $\longrightarrow$ a는 3의배수이다

∴ a와 b가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{3}$은 무리수이다

제곱이 3의배수면 무조건 제곱전도 3의배수

$(3t)^2=9t^2=3(3t^2)$

$(3t+1)^2=9t^2+6t+1=3(3t^2+2t)+1$

$(3t+2)^2=9t^2+12t+4=3(3t^2+4t+1)+1$