韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.41
2016. 2. 제 55권, 제 1호, 41-71.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2016, Vol. 55, No. 1, 41-71.

초등학생의 수학적 모델링 적용과정에서 나타나는 의사소통에 관한 연구: 5학년 수와 연산을 중심으로[1)]

이지영(이화여자대학교 대학원)
김민경(이화여자대학교)†

Ⅰ. 서론

끊임없이 변화하는 현대사회의 흐름 속에 교육도 시대가 원하는 인재를 길러내기 위해 목표를 달리해 왔다. 단순히 신체를 사용하는 노동력 중심의 사회에서 고도의 정신력이 중심이 되는 사회로 넘어오면서 현대사회는 큰 발전을 했고, 교육도 다양한 지식을 어떻게 습득하느냐 보다는 어떻게 생산해낼 것인가에 무게를 두고 변화하였다. 즉, 똑같은 지식을 담아내기만 하는 학생을 만들자는 것이 아니라 다양한 지식을 받아들이고, 이를 재창조해 내는 학생을 길러내자는 것이다. 현대사회가 목표로 하는 교육은 주어진 문제를 학생 스스로 생각하여 대안을 제시하는 형태로 나아가고 있다.

미국의 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM](2000)는 수학교육의 목표로 수학적 소양(Mathematical Literacy)을 제시하면서 학생들이 수학적 문제해결, 수학적 의사소통, 수학적 추론과 같은 능력을 갖출 것을 강조하였다. 이러한 세계적 흐름에 따라 우리나라는 7차교육과정(교육부, 1997)에서 '수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 이해'와 '수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 기능', '수학적 지식과 기능을 활용하여 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력', '실생활 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하는 태도'를 강조하였다. 이후 2007개정교육과정(교육과학기술부, 2008)에서는 '수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력', '수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력', '수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력', '다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력', '생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력', '수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력'과 함께 7차교육과정보다 더 나아가 정의적 영역에서의 '수학에 대한 긍정적 태도의 신장'을 강조하였다. 2009개정교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 2007개정교육과정에서의 내용 근간을 유지하되, 인지적 영역에서 '수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력'을 강조하였다.

하지만 이러한 교육 목표의 변화와는 달리 현실적으로 교육 현장에서 이루어지는 교육은 학생들의 수학적 소양 신장에 어려움이 많다. 국제수준의 학업성취도 평가인 PISA(Programme for International Student Assessment)와 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)에서는 우리나라 학생들의 문제해결 능력, 수학적 추론 능력, 의사소통능력이 미흡함을 확인할 수 있다(박경미, 김동원, 2011). 이러한 평가에 대한 여러 연구 보고서에서는 우리나라 학생들이 일상의 상황을 다룬 열린 문항보다 순수한 수학적 문항, 혹은 전형적인 상황을 다룬 문항에서 우위를 보이고, 개념을 적용하고 추론하는 과정을 정답과 함께 제시하는 문항, 사고의 논리적 전개와 더불어 의사소통의 능력을 요구하는 구성형 문항에 많이 취약함을 보고하였다(김경희, 2010a, b; 박경미, 2004; 한국교육과정평가원, 2004, 2007). 이러한 여러 연구들의 분석 결과 우리나라 학생

* 접수일(2015년 11월 6일), 수정일(1차: 2015년 12월 5일, 2차: 2015년 12월 28일, 3차: 2016년 2월 1일), 게재확정일(2016년 2월 19일)
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 수학적 모델링, 수학적 의사소통, 모델링 과정, 수와 연산
† 교신저자
1) 본 논문은 제1저자의 학위논문의 일부 내용을 보완하고 재수정한 것임.

들은 현대 사회가 필요로 하는 수학적 소양이 많이 부족하며, 현장에서는 다양한 수학적 소양 증진을 위한 연구와 노력이 필요한 실정이다.

현재 수학교육에서 수학적 소양에 중점적으로 등장하는 '문제해결력'은 교과서에서 문제를 단순히 계산하는 것이 아니라, 실생활 속의 다양한 문제를 학생 스스로 탐구하여 창의적인 해결책을 제시할 수 있는 능력을 의미한다. 수학적인 해결책을 제시한다는 것은 문제에 대한 자신의 생각을 타인에게 설득시키는 하나의 과정이라는 점에서 수학적 의사소통은 문제해결과 매우 밀접한 과정으로 연결 지을 수 있다(김선희, 1998; 유현주, 2000; 최인숙, 1998; Balacheff, 1991). 이러한 맥락에서 교육과정에서는 수학적 의사소통을 강조하고 있으나 교육 현장에서는 주로 교사위주의 수업이 이루어져 의사소통 중심 수업에 대한 교사의 관심과 노력이 필요한 실정이다(방정숙, 정희진, 2006; 오영열, 오태욱, 2009; 이종희, 김선희, 2002). 그러므로 앞선 우리나라 학생들의 국제평가에서의 실태와 학생들의 의사소통 능력의 부족, 문제의 현실성 고려에 대한 부족(김민경, 2004)을 살펴볼 때 문제를 해결함에 있어 학생들이 주어진 숫자만 계산하는 것이 아니라 문제에 담긴 상황과 맥락을 고려하여 다양한 해결전략을 수학적 의사소통을 통해 제시할 수 있는 프로그램 개발이 시급하다.

이러한 조건을 충족시키는 프로그램은 정형화된 단계로 풀 수 있는 문제가 아니라 실세계를 고려한 복잡성이 담겨야 하며, 학생들의 사고 수준, 토의 결과에 따라 다양한 해결책이 제시될 수 있어야 한다. 즉, 정해진 풀이 과정이 아닌 학생 나름대로의 추론과 사유과정을 통해 해결과정을 정당화하고, 자신의 수학적 지식을 다른 학생과 의사소통하는 경험 속에서 수학에 대한 자신감과 흥미가 수학적 신념과 연결될 수 있어야 한다. 그러한 맥락에서 수학적 모델링은 수학적 의사소통을 경험하는 하나의 방안이 될 수 있다.

수학적 모델링은 실세계 상황의 측면을 나타내기 위한, 하나 이상의 수학적 실재와 이들 사이의 관계를 조합한 것으로서(Niss, 1989), 어떤 현상 안에 있는 특성과 유사하면서 함수나 방정식처럼 수학적 개념을 활용하여 만들어낸 수학적 구조를 의미한다. 수학적 모델링은 실세계와 수학 세계를 잇는 하나의 다리로서 2007개정교육과정부터 강조되어 온 다양한 수학적 능력 함양에 큰 도움이 될 수 있을 것이다(Middleton & Lesh, 2003). 또한 수학적 모델링은 프로이덴탈의 수학화와도 맥을 나란히 하고 있으며, 구성주의적 관점으로서 학생들이 문제 해결을 수학적 모델링 과정을 통해 스스로 구성해 나가도록 한다.

이러한 큰 장점에도 불구하고 수학적 모델링은 초등학교 현장에서는 크게 논의되지 않았는데, 이는 모델링의 과정이 고차적 사고를 요하므로 초등보다는 중등 이상에 적합하다는 의견이 많았기 때문이다. 중·고등학교에서는 80편 이상의 논문(권기석, 박배훈, 1997; 신은주, 권오남, 2001; 신은주, 이종희, 2004; 전상림, 2008; 정유리, 2010; 홍정희, 송순희, 1995 등)에서 수학적 모델링을 다양하게 제시하고 있으나, 초등학교에서는 손에 꼽을 정도로 적은 수의 연구(김민경, 홍지연, 김은경, 2009; 김민경, 홍지연, 김혜원, 2010; 김홍희, 2009; 홍지연, 2007)가 진행되었다. 초등학교 수학 교육에서도 고차적인 수학 능력이 강조되기 때문에, 이에 맞는 학습 방법 적용에 대한 연구도 이루어져야 한다는 점에서, 초등학교 수준의 수학적 모델링에 대한 연구도 이루어져야 한다. 중등에서 많이 알려진 바와 같이 고차적 수학 능력 향상에 모델링이 효과적이라면 초등 수준에서도 이에 대한 적용과 효과가 논의되어야 할 것이다.

따라서 본 연구는 고학년인 초등학교 5학년 학생을 대상으로 수학적 모델링을 수와 연산 영역에 적용하여 학생들의 의사소통 수준이 어떻게 나타나는지 살펴보고자 한다. 본 연구를 통해 수학적 모델링 과정이 초등학교 현장에서 어떻게 진행되는지 보여줄 수 있을 것으로 보이며, 현장 교사들이 수업을 계획하고 연구할 때에 참고가 될 수 있을 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 모델링

모델(model)이라 함은 일반적으로 본보기가 되는 대상이나 모범의 의미로(네이버 국어사전), 이러한 뜻에서 모델링이라고 하면 원래의 모델을 보고 닮게 만드는 일을 의미한다. 이를 수학에서 살펴보면, 모델이 되는 수학 내용은 패턴이나 규칙으로 구성된 체계이며(Lesh &

Doerr, 2000), 모델들은 다른 유사한 체계를 묘사·설명·예측하는데 사용될 수 있는 관계 및 규칙의 체계라 할 수 있다(Doerr & English, 2003).

이러한 의미에서 수학적 모델링이란 현실 세계의 현상을 해석·분석·종합하여 그 관계를 파악하고 결론과 해결책을 모색하는 문제해결의 한 유형이며(Swetz, 1991; Swetz & Hartzler, 1991), 실생활 문제에 수학을 응용하여 해결하는 것을 의미한다(Galbraith & Caltworthy, 1990; Zbiek, 1998). 학생들이 수학적 모델링을 한다는 것은 방정식, 부등식, 그래프나 표 만들기, 알고리듬 등을 이용하여 수학적 모델을 개발하는 과정 전체를 의미하며(Swetz, 1991), 이러한 수학적 모델링은 복잡한 수학이론이 바탕이 되는 복잡한 현상을 단순화하거나, 수학화가 이루어지도록 하는 하나의 방법이 될 수 있다(Freudenthal, 1991). 학교수학교육 현장에서 수학적 모델링 과제 해결을 통해 초·중·고등학생들의 수학 학습 이해 및 문제해결력 향상의 한 방안으로 수학적 모델링 활용을 제시한 국외의 여러 연구들(예, Boaler, 2001; Bughes, 1980; Doerr & English, 2003; English, 2006; English & Watters, 2005a, b; Llinares & Roig, 2008; Verschaffel & De Corte, 1997; Zibiek & Conner, 2006 등)은 현장의 많은 교사들이 고민하고 있는 수학 수업에 대한 하나의 대안이 될 수 있음을 나타낸다.

English와 Watters(2005a, b)는 어린이들이 어린 나이에 모델, 일반화, 정당화하기를 배울 수 있으며 이러한 활동 참여가 수학적 추론 능력 향상에 도움을 준다고 보았다. 이러한 여러 연구에 기반할 때 초등학교에서부터 모델링이 의미 있는 출발을 해야 할 것이며 이를 활용한 수업에 대한 연구와 노력이 필요하다.

Lesh와 Doerr(2000)는 모델링을 세 가지 체계 – 내재적인 개념적 체계, 개념적 시스템의 외면화와 외부 체계의 내면화로서 기능하는 기호(표상적) 체계, 자연에서 경험하거나 혹은 인간에 의해 구성된 결과물인 외현적 체계 – 사이의 상호작용으로 보았다. 또한 모델링은 학습자의 기호(표상) 능력을 요구하는 수학적 기술과 설명을 개발하기 위한 전문화된 언어, 상징, 그래프, 그림, 구체적 자료, 다른 기호체계들의 사용과 대개 관련 있다고 하였다. 학생들은 전통적인 문장제 문제에서 하나의 수학적 기술에 대한 해석을 시도하지만 예측만 할뿐, 수학적 기술을 제대로 이해하지 못하며 수학구조가 사용되는 실생활 상황에서 의미 있는 상황에 대한 수학적 기술을 만들어 내고 비로소 해석을 하게 된다.

English(2003)는 수학적 모델링 활동과 프로이덴탈의 수학화와 관련한 논의를 일치하는 것으로 보고 이러한 수학적 모델링 활동을 통해 학생들이 형식화하고 일반화할 수 있는 능력을 기른다고 보았다. 또한 모델링의 다른 중요한 측면은 학생들이 자신의 학습을 기록하고 생각을 설명하는 것인데, 학생들은 문제들을 해결하고 자신들의 생각과 설명을 쓰기의 형식으로 기록하면서 아이디어를 모둠의 구성원들과 표, 그래프, 차트, 그림과 같은 수학적 표상으로 공유한다고 보았다.

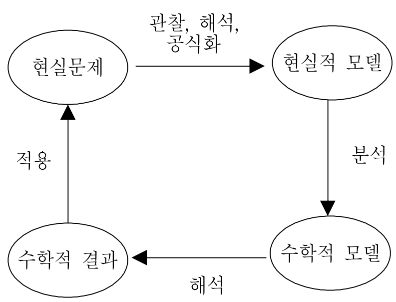
수학적 모델링 활동은 학생뿐 아니라 교사에게도 의미 있는 경험을 제공하는데, 모델링과 같은 활동을 수행할 때 교사는 학생이 개발하는 수학적 아이디어들의 특성을 규명하고, 이 개발을 지원하기 위한 전략을 고려하면서 다양한 아이디어를 공유하는 학습 공동체를 자극할 필요가 있다. 이러한 학습 경험은 수학 학습을 위한 수학적 모델링 접근에서 매우 중요한 부분이다(Bransford et al., 1996; Doerr, 1997; Doerr & English, 2003; English, 2003, 2006).

Open University(1990)와 Skovsmose(1994)는 수학적 모델링을 대상 모델링(object modeling), 경험적 모델링(empirical modeling), 이론적 모델링(theoretical modeling), 제한된 모델링(pointed modeling), 확대된 모델링(extended modeling)으로 나누어 설명하였다. 대상 모델링은 실제적이고 물리적인 대상을 활용하여 모델링 함으로써 문제를 해결하는 것을 말하며, 경험적 모델링은 현실 세계에서 실험을 통하여 주어진 문제 속에 포함된 관계를 찾아내는 것을 말한다. 이론적 모델링은 제시된 현실 문제 상황에 여러 수학 개념, 원리, 법칙을 적용하여 문제를 해결하는 것을 의미한다. Skovmose(1994)는 제한된 모델링은 영역과 대상을 논리적이고 체계적인 문제들에 한정하고 이를 형식적인 언어로 분석·해석·모델링 하는 것을 의미한다고 하였으며, 확대된 모델링은 모델링의 영역과 대상을 현실 생활 전체로 확대하여 사회 전체의 문제를 해결하기 위한 일부분으로서 수학을 다루는 것이라고 하였다. Open University(1990)는 수학적 모델링을 실생활 문제, 가설 설정, 수학적 문제, 문제

해결, 해에 대한 해석, 모델에 대한 정당화, 의사소통 과정으로 나누었는데 여기에서 가설 설정 단계와 답에 대한 해석 단계는 실세계와 수학적 세계를 연결하고 있다(Galbraith & Caltworthy, 1990: 김민경, 2010, p.7, 재인용).

한편, Lesh와 Doerr(2003), Maki와 Thompson(1973), NCTM(1991)은 수학적 모델링을 순환과정으로 설명하고 있는데, 실세계와 모델 세계가 순환한다고 하였다. Maki와 Thompson(1973)은 현실문제를 현실적 모델로 단순화 한 것을 수학적 모델로 추상화 하는 과정, 수학적 모델을 수학적 결과로 계산하고 그 결과를 현실문제로 해석하는 과정들이 순환적으로 이루어지는 것으로 보았다.

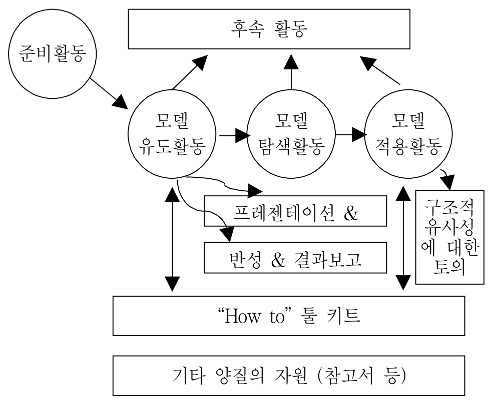
NCTM(1991)은 [그림 1]과 같이 수학적 모델링 과정을 실세계 현상, 수학적 모델, 수학적 결론, 결론 및 예측의 과정으로 설명하였다. 현실적 모델을 분석하여 수학적 모델로 구성하며, 이를 해석한 수학적 결과를 현실문제에 적용하고 현실 문제를 다시 관찰, 해석, 공식화하여 현실적 모델로 만드는 과정이 순환적으로 일어난다.



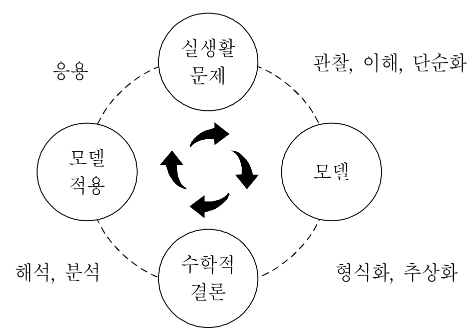
[그림 1] NCTM 수학적 모델링 과정(Swetz & Hartzler, 1991, p. 3, 재인용)
[Fig. 1] NCTM mathematical modeling process (Swetz & Hartzler, 1991, p. 3, requotation)

Lesh와 Doerr(2003)는 수학적 모델링을 현실과 모델 세계 사이를 기술, 조작, 예측, 확인을 통해 순환하는 과정으로 설명하였는데, 또 다른 측면에서 모델링을 설명한 것은 [그림 2]와 같다. Lesh, Cramer, Doerr, Post와 Zawojewski(2003)는 수학적 모델링 과정을 모델유도활동, 모델탐색활동, 모델적용활동의 측면에서 정리하고 있다. 모델유도활동에서 적용활동에 이르기까지 학생들 간 다양한 의사소통이 이루어지고, 결과를 정당화하기 위한 다양한 논의가 이루어지는 것을 볼 수 있다.

이러한 일련의 연구를 바탕으로 김민경(2010)은 수학적 모델링을 다음 [그림 3]과 같이 순환되는 과정으로서 제시하였다.



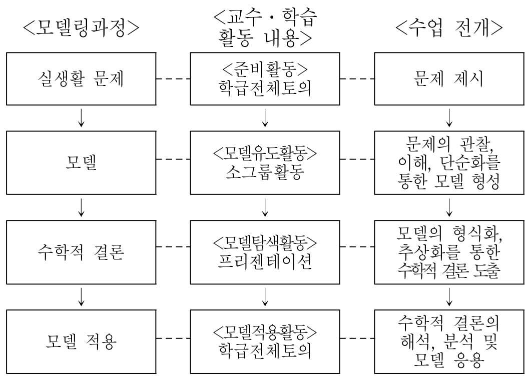
[그림 2] 수학적 모델링 활동 과정(Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski, 2003, p. 57, 재인용)
[Fig. 2] Mathematical modeling activity process(Lesh, Cramer, Doerr, Post & Zawojewski, 2003, p. 57, requotation)



[그림 3] 초등 수학에서의 수학적 모델링 과정(김민경, 2010)
[Fig. 3] Mathematical modeling process in elementary mathematics(Kim, 2010)

또한, 김민경(2010)은 모델링 과정을 수업에 적용하는 절차를 제시하였는데 이는 다음 [그림 4]와 같다. 수학적 모델링 첫 번째 단계인 실생활 문제 단계에서 학급 토의를 통해 준비활동이 이루어지며 실세계와 관련 있는 모델링 과제를 부여받는다. 이어지는 모델 단계에서 학생

들은 소그룹 활동을 통해 모델유도활동을 하며 문제를 더 자세히 관찰·이해하고 단순화하면서 여러 시행착오 끝에 문제해결을 위한 모델을 형성한다. 수학적 결론 단계에서는 각 모둠별로 형성된 모델을 발표함으로써 모델 탐색을 하게 되는데 이 과정에서 모둠별 모델을 살펴봄으로써 자신들이 만들어낸 과정과 방법에 포함된 수학적 개념, 원리, 법칙을 정리하게 된다. 마지막 단계인 모델 적용 단계에서는 학급 전체 토의를 통해 수학적 결론을 해석하고 분석하면서 여러 모델 중에서 문제 해결을 위해 가장 적합한 방법이 무엇이며 더 좋은 대안적 모델이 있는지에 대한 의견을 공유하고 나아가 모델을 어떻게 다른 상황에서 사용할 수 있는지 논의하여 모델을 실세계 상황에 일반화 할 수 있는 방법을 모색하게 된다.



[그림 4] 수학적 모델링의 수업 절차(김민경, 2010)
[Fig. 4] Process of mathematical modeling lesson(Kim, 2010)

본 연구에서는 Lesh와 Doerr(2003), Lesh, Cramer, Doerr, Maki와 Thompson(1973), NCTM(1991), Post와 Zawojewski(2003)이 제시했던 수학적 모델링을 바탕으로, 교육과정에서 제시하고 있는 수학 내용을 재구성하여 학생들이 모델링하는 과정을 경험해보도록 하였다. 이는 문제해결력 향상 뿐 아니라 실생활에 수학이 이용되는 간접적 경험을 제공하여 수학에 대한 긍정적인 태도 형성에 기여할 수 있을 것으로 보인다.

2. 수학적 의사소통

의사소통(Communication)은 사회 전체에서 강조되는 영역으로서, '가지고 있는 생각이나 뜻이 서로 통하는 것', '언어, 비언어적 기호를 사용하여 의사를 전달하는 것', '어떤 사실이나 생각, 정보의 전수 또는 교환'(네이버 지식백과)을 의미한다. 이를 수학적 관점에서 살펴보면, 수학적 의사소통은 '개인이 가지고 있는 수학적 지식을 다양한 표현 수단을 사용하여 다른 사람과 주고받을 수 있는 것'으로 파악할 수 있으며, 국내외의 수학교육자들은 이러한 수학적 의사소통을 점점 더 강조하는 추세이다.

NCTM(1989)은 수학과 교육과정에서 수학적 의사소통의 중요성을 강조하면서 학생들을 위한 일반목표 중 하나로 수학적으로 의사소통하는 것을 포함하였고 다음과 같이 제시하였다.

- 수학적 개념 혹은 상황을 구체물, 그림, 다이어그램, 그래프, 말, 글, 대수적 방법을 사용하여 나타내기
- 수학적 개념과 상황에 대해 스스로의 생각을 반성하고 명확히 하기
- 수학의 학습과 활용에서 수학에 대한 표현, 토의, 읽기, 쓰기, 듣기가 중요한 부분임을 인식하기
- 읽기, 듣기, 관찰 능력을 수학적 아이디어를 해석하고 평가하는 데 사용하기
- 수학적 아이디어를 나누고, 가설을 설정하며, 설득적인 주장 내세우기
- 일상 언어를 수학적 언어와 연관짓기

NCTM(2000)은 이후 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서 좀 더 구체적으로 다음과 같이 '수학적 의사소통'을 제시하여 학년과 학교급별로 수학적 의사소통과 관련한 학생의 특성과 함께 구체적으로 바람직한 교사의 역할을 제시하였다.

- 수학적 사고를 의사소통 과정에서 형성하고 견고히 할 수 있어야 한다.
- 주변 동료, 교사, 타인에게 명확하고 일관된 수학적 사고를 의사소통할 수 있어야 한다.
- 타인의 전략과 수학적 사고를 해석하고 평가(판단)할 수 있어야 한다.
- 수학적 사고를 수학 언어를 사용하여 정확히 표현할 수 있어야 한다.

이러한 주장들을 볼 때에, 수학적 의사소통은 수학적 사고를 다른 사람에게 분명히 전달하기 위해 정확한 수학 표현을 할 수 있어야 하며, 단순히 수학 지식 뿐 아니라 말하고, 듣고, 읽고, 쓰는 일련의 활동이 의사소통

에 큰 역할을 하기 때문에 이를 반영한 수업이 필요함을 알 수 있다.

이에 따라 우리나라도 제7차교육과정(교육부, 1997)에서 ‘수학적 힘’의 신장을 위해 ‘수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 이해와 수학 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 기능’, ‘수학적 지식과 기능을 활용하여 문제를 수학적으로 사고하여 해설하는 능력’, ‘실생활 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하는 태도’를 강조하였으나 수학적 의사소통이 직접적으로 드러나지는 않았고, 2007개정교육과정(교육과학기술부, 2008)에서야 직접적으로 언급하였다. 교육과정에서 수학적 의사소통을 위한 교수·학습에서의 유의 사항은 다음과 같다.

(1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
(2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통 할 수 있게 한다.
(3) 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 사용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

이러한 의사소통에 대한 강조는 2009개정교육과정(교육과학기술부, 2009)에서도 계속 이어지고 있으며, 의사소통은 학생들의 비형식적이고 직관적인 사고 과정을 포함하며, 일반적인 의사소통과는 달리 일상 언어 외에 추상화·형식화된 수학 용어와 기호 등이 필요하다(Adams, 2003).

수학적 의사소통은 다양한 경로로 이루어지는데, 이미애, 김수환(2001)은 초등학교 2학년 대상의 연구에서 수학적 의사소통의 분석 요소로 말하기, 듣기, 토의하기, 읽기 및 쓰기, 표현하기를 제시하였고 이는 [표 1]과 같다.

[표 1] 수업 분석의 기준 중 의사소통 내용(이미애, 김수환, 2001)
[Table 1] Communication content among analysis criteria of class(Lee & Kim, 2001)

분석 요소	세부적 특성
말하기	- 발표 및 질문에 대한 대답은 어떻게 하는가? - 소집단 말하기 활동은 어떻게 하는가? - 교사의 발문에 대하여 반응은 어떠한가? - 아동들의 질문내용은 어떠한가?
듣기	- 교사의 설명이나 동료 간의 의견 듣기는 어떠한가? - 들은 후 들은 내용에 대한 반응은 어떠한가?
토의하기	- 대화의 방향 및 소집단 토의 과정은 어떠한가? - 동료간의 상호작용과 반응은 어떻게 나타나는가? - 과제 해결 방안을 찾아 나가는가?
읽기 및 쓰기	- 문제를 읽고 해결하는 과정은 어떠한가? - 교과서 읽기 및 문제 풀이 및 식 세우기, 기호의 사용은 어떠한가?
표현하기	- 용어나 기호의 사용 및 표현은 어떻게 하고 있는가? - 신체 표현 및 그림으로 나타내는 활동은 어떻게 하는가?

김상화(2010)는 전달방식에 따라 수학적 의사소통을 구분하고, 의사소통의 4가지 유형으로 담화(discourse), 표현(representation), 조작(operation), 복합(complex)을 제시하였다. 담화는 수학적 대화로 읽기, 말하기 등 구어적 의사소통으로서 토의, 질문, 발표, 설명 등을 말한다. 표현은 쓰기 중심의 문어적 의사소통을 말하며, 조작은 수학에 관한 자신의 생각이나 의견을 나타내는 것으로 신체활동, 구체적 조작 활동, 놀이나 게임 등을 의미한다. 복합은 담화, 표현, 조작 활동을 두 가지 이상 같은 비중으로 활용하는 경우를 의미한다. 조영준, 신항균(2010)은 학생들이 수업에서 나타내는 의사소통과정보다는 교사와 학생 간의 의사소통 유형으로 IRE형(전통적 질의 응답방식), 깔대기형(Wood, 1994), 초점형의 3가지를 제시하였다. IRE는 ‘교사 질문 → 학생 대답 → 교사 평가’로 이루어지며, 깔대기형(funnel pattern)은 유도 패턴으로, 교사가 모호한 과제를 제시하면 학생들은 서로 다른 답과 해결책을 제시하는 유형이다. 초점형(focusing pattern)은 소크라테스의 문답식 교수법에 대응되는데 교사는 질문하고 질문을 통해 학생들의 지식을 이끌어낸다.

이러한 수학적 의사소통은 수학적 소양 함양 및 수학적 능력에 있어 중요한 요소로서 전통적인 성취도 평가 도구로는 의사소통의 수준을 파악할 수 없다. 의사소통을 평가하기 위한 기준으로 피츠버그 대학에서는 학습 연구 개발 센터의 프로젝트로 QUASAR 인지 평가 도구(QCAI)를 [표 2]와 같이 제시하였다. QUASAR(Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning)은 개방형 문제를 0~4점의 5개 수준을 제시하였는데(Cai, J., Lane, S., &

Jakabcsin, M. .S., 1996: 신성기, 2009, p.21, 재인용), 총괄적 채점기준으로 학생들의 문제해결방법을 수학적 지식, 전략적 지식, 의사소통의 세 범주로 나누었다.

미국 Vermont주는 1990년부터 2년에 걸쳐 수학 프로그램 개발을 위한 사전 실험을 통해 채점 기준으로 문제해결 기능과 수학적 의사소통의 준거를 제시하였으며, 기준은 [표 3]과 같다.

또한, 홍우주, 방정숙(2008)은 교사와 학생 간 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지 연구하였는데, 다음 [표 4]와 같은 의사소통 수준에 대한 기준을 제시하였다.

[표 2] QCAI의 의사소통 총괄 채점 기준(Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. .S., 1996: 신성기, 2009, p. 21, 재인용)
[Table 2] QCAI holistic scoring rubric of communication(Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. .S., 1996: Shin, 2009, p.21, requotation)

수준	의사소통
0수준	- 비효율적 의사소통 - 문제 상황을 완전히 잘못 표현하는 그림을 그릴 수 있음 - 문제를 다루는 단어가 불명확
1수준	- 만족할 만한 요소를 약간 지녔으나 문제의 중요한 부분을 생략하거나 완전히 표현하는데 실패 - 문제 상황을 부정확하게 표현하는 그림을 포함할 수도 있고 그림이 불분명하거나 해석하기 어려움 - 설명이나 표현을 따르기 어렵거나 놓칠 수 있음
2수준	- 문제 해결에 중요한 과정을 보여주긴 하지만 설명이나 표현이 모호하거나 불분명할 수 있음 - 약간 부족하거나 불분명한 그림을 포함할 수 있음 - 의사소통이 모호하거나 해석이 어려울 수 있음 - 주장이 불완전하거나 논리적으로 정당하지 못한 근거에 기초할 수 있음
3수준	- 꽤 합리적이고 분명한 설명이나 표현으로 완전한 대답을 함 - 거의 완전하고 적절한 그리믕ㄹ 포함할 수도 있음 - 타인과 효과적으로 의사소통 함 - 논리적으로 정당하나 완전하지는 않은 주장을 표현함
4수준	- 설명이나 표현을 완벽하게 대답함 - 완벽하고 적절한 그림을 포함할 수 있음 - 타인과 효과적으로 의사소통 함 - 논리적으로 타당하고 강한 주장을 함 - 예와 반례를 포함할 수 있음

[표 3] Vermont주의 수학적 의사소통 평가 기준(Mills, R., Brewer, W., & Kenney, R., 1992: 신성기, 2009, p. 22, 재인용)
[Table 3] Vermont mathematical communication assessment rubric(Mills, R., Brewer, W., & Kenney, R., 1992: Shin, 2009, p.22, requotation)

의사소통 구분	점수	내용
수학의 언어	1	수학적 언어 사용이 부적절하거나 없음
	2	때때로 적절한 수학적 언어 사용
	3	대부분 적절한 수학적 언어 사용
	4	풍부하고 정교하며, 적절하고 우아함
수학적 표상	1	수학적 표상의 사용이 거의 없음
	2	수학적 표상을 사용한 경우
	3	수학적 표상이 적절하고 정확하게 사용
	4	수학적 표상을 지각하여 사용
표현이 분명하고 명확함	1	조직적이지 못하고 불완전하며 모호함
	2	표현 중 분명한 부분이 있음
	3	대부분 표현이 분명함
	4	표현이 잘 정의되어 있고 완전하며 상세하여 명쾌함

[표 4] 수학적 의사소통 수준 분석 기준(홍우주, 방정숙, 2008)
[Table 4] Analysis criteria of mathematical communication level (Hong & Pang, 2008)

		0수준	1수준	2수준	3수준
질문하기	교사	답에 초점을 둔 짧고 빈번한 질문	풀이 방법이나 이유에 초점을 둔 질문	학생의 사고과정 이해를 위한 질문	정당화를 요구하는 질문
	학생	단답형 대답을 하고 학생-학생의 대화가 일어나지 않음		교사의 격려에 의한 학생 간 질문	학생 주도의 학생-학생 질문
설명하기	교사	답에 초점을 둔 설명	교사 유도의 의한 풀이방법 간단히 설명	상세히 설명하도록 격려, 개방적이고 다양한 전략 유도	학생들이 사고를 설명하도록 하고, 탐구적인 질문을 통해 완전한 설명이 되도록 격려
	학생	다른 사람의 설명을 소극적으로 듣기	간단한 설명 다른 학생의 풀이 되풀이	교사의 탐구에 의해 사고 단계를 설명,, 답이나r 방법에 대해 방어 시작	방어와 정당화 설명, 다른 학생들은 교사나 학생의 오류 수정, 도전
수학적 아이디어의 근원	교사	교사가 주로 아이디어 제시	교사는 아이디어의 주요 근원	학생들의 오류를 학습 기회로 이용함	새로운 전략을 공유하도록 함
	학생	학생들은 아이디어를 제시하지 않음	학생들의 몇 가지 아이디어가 제시되나 탐구되지 않음	학생들의 다양한 전략 제시	학생 아이디어 비교 대조, 학생 아이디어가 수업의 방향 제시

위와 같은 분석틀과는 달리 이종희, 김선희, 채미애

(2001)는 수학적 의사소통 방식을 듣기, 말하기, 읽기, 쓰기, 그래픽으로 구분하고 각 방식마다 범주를 나누어 점수로 구분을 하였다. 듣기의 경우 범주를 태도와 내용이해로 나누고 태도에는 0~1점, 내용이해는 0~3점에 대한 기준을 제시하였으며, 말하기의 경우 표현, 문제풀이과정이나 수학적 개념을 설명하기 위한 말하기, 공동과제 해결을 위한 그룹 안에서의 말하기로 범주를 구분하고 0~3점으로 구분하였다. 읽기도 듣기와 마찬가지로 태도와 내용이해로 나누고 각각 0~1점, 0~3점을 부여하였다. 쓰기는 표현, 자신의 생각과 느낌에 관한 글쓰기, 문제해결과정 쓰기, 개념 설명의 글쓰기로 나누고 0~3점을 부여하였다. 그래픽은 표현 및 설명으로 구분하고 0~3점을 부여하였다. 이 연구의 경우 6학년 학생을 대상으로 듣기, 말하기, 읽기, 쓰기 의사소통 능력을 평가하였는데 이러한 기준은 수학적 의사소통의 수준뿐 아니라 수학적 의사소통의 유형을 함께 고려했다는 점에서 본 연구에서도 이러한 학생의 수학적 의사소통 유형을 수준 분석 시 고려하였다.

수학적 의사소통은 수학교육에서 계속 강조되면서 다양한 방면에서 수학적 의사소통을 분류하고, 평가하려는 연구가 진행되고 있다. 하지만 우리나라 수학 수업에서는 여전히 교사 주도의 일방향적 수업이 이루어지고 있으며, 수학적 의사소통이 중요하다는 인식은 있지만 실제로 이를 반영한 수업이 진행되는 데에는 많은 교사들이 어려움을 느끼는 것으로 나타나고 있다(김선희 외, 2002; 방정숙, 정회진, 2006; 오영열, 오태욱, 2009; 이종희 외, 2002; 이혜영, 2005). 이와 같은 내용을 생각해볼 때, 수학 수업에서 학생들이 다양한 방법으로 의사소통할 수 있는 경험과 기회가 필요하며 이를 제공하는 측면에서 수학적 모델링을 생각해볼 수 있겠다. 이에 본 연구는 이러한 선행 연구를 바탕으로 수학적 의사소통에 대한 평가 기준을 마련하여 학생들이 수학적 의사소통을 할 수 있는 수업을 모델링을 적용하여 설계하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 수학적 모델링이 적용된 문제 해결 과정에서 나타나는 초등학생의 수학적 의사소통 수준 분석을 목적으로, 서울시 소재의 송파강동교육지원청 내 C초등학교 5학년 한 학급을 대상으로 선정하여 연구를 진행하였다. C초등학교는 주변에 다세대 주택이 많이 위치해있고, 사회·경제적 수준이 높지 않은 편이어서 학생들의 전반적인 학업성취도가 서울시 내에서 낮은 편이다.

초등학교 5학년은 수와 연산 영역에 대한 학습량이 많은 시기로 약수와 배수, 약분과 통분, 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 및 소수의 곱셈과 나눗셈 등 학생들이 수학을 어렵고, 재미없다고 느끼게 되는 주제가 많이 등장한다. 이는 수학 전반에 대한 흥미와 관심의 저하로 나타나는데, 그러한 점에서 실생활 맥락의 문제로 수학적 모델링을 활용한 수업은 수와 연산이 단순 알고리듬의 반복이 아니라 실제로 실생활에 사용된다는 것을 보여줄 수 있고, 소그룹 활동을 통해 수학적 의사소통을 경험하기에도 매우 적절하기에 적용하게 되었다. 연구에 참여한 대상 학급은 연구자가 담임을 맡고 있는 학급으로, 대상 학급의 구성은 다음 [표 5]와 같다.

[표 5] 연구 대상 학급의 구성
[Table 5] The composition of class

구분	남		여		전체	
실험 집단	12(50%)		12(50%)		24(100%)	
	11 (46%)	1 (특수)	11 (46%)	1 (결석)	22 (92%)	2 (제외)

연구 대상에서 제외되는 학생은 총 2명으로, 특수반 학생 1명과 결석으로 활동에 참여하지 못한 학생 1명이다.

2. 연구 절차 및 방법

본 연구에서는 연구 대상 학급에 수학적 모델링을 적용한 수업을 2회 실시하고, 모델링의 각 단계별로 학생들의 의사소통 수준이 어떻게 나타나는지를 살펴보았다. 2회의 모델링 활동 과정에서 총 6개의 모둠에 녹음기를 설치하여 학생들의 의사소통 내용을 녹취하면서, 학생들이 활동을 하는 과정은 전체적인 형태로 녹화를 하였다. 또한 교사 개인은 카메라를 휴대하고 순시하면서 인터뷰나 질문 등 특징적인 장면을 녹화하여 분석에 활용하였다. 수업이 끝난 뒤에는 그날의 특징적인 내용을 필드노트를 보면서 정리해두었다. 수업 후에 학생들의 녹취 내

용을 들어보면서 연구자가 놓친 부분이 있는지 파악하였고, 전반적인 학생들의 활동 수준을 다시 확인하였다.

먼저 1회차 모델링 수업을 마친 뒤, 6개의 모둠 중 2개의 모둠이 나머지 4개의 모둠보다 나은 수행결과를 보였다. 2개의 모둠 활동을 보다 주의 깊게 살펴보면서, 2회차 모델링 수업을 실시한 결과 역시 1회차 모델링 수업과 마찬가지로 2개의 모둠이 연구를 진행할 만한 수행결과를 보였다. 좀 더 면밀한 관찰을 위해 모델링 과정이 비교적 잘 이루어진 두 모둠을 중심으로 녹취록을 작성하여 분석하였으며, 2개의 모둠은 이하 <모둠 A>와 <모둠 B>로 나타내려고 한다.

본 연구는 5학년 수와 연산 영역에서 총 2회에 걸친 모델링 수업을 실시하였고, 실시 과정은 [그림 5]와 같다.

연구 대상 학생들은 모둠 당 3~4명씩 여섯 모둠으로 구분하여 약수와 배수, 분수를 주제로 한 수학적 모델링 문제 해결 활동에 참여하였다. 각 모둠의 구성원들은 학년 초 진단평가에서의 학업성취수준을 고려하여 수준을 상(90점 이상), 중(70점 이상), 하(70점 미만)로 나누었고, 수준별로 해당 집단 안에서 임의로 배치하여 전체 모둠원이 수준별로 고루 섞이도록 하였다.

교육과정에 근거한 수업	5-1 <1.약수와 배수>단원 총 6차시 실시
모델링 1차	총 6차시 동안 진행, 소집단 학습
교육과정에 근거한 수업	5-1 <2. 약분과 통분> 7차시, <3.분수의 덧셈과 뺄셈> 6차시 실시
모델링 2차	총 6차시 동안 진행, 소집단 학습

[그림 5] 모델링 수업 실시 과정
[Fig. 5] Modeling lesson process

<모둠 A>의 경우 남학생 2명, 여학생 2명 총 4명의 아동으로 구성되었고, '상'집단 학생 1명(이하 '㉮'학생), '중'집단 학생 2명(이하 '㉯'학생, '㉰'학생, '하'집단 학생 1명(이하 '㉱'학생)으로 이루어졌다. <모둠 B>는 남학생 2명, 여학생 1명 총 3명으로 구성되며, '상'집단 학생 1명(이하 '①'학생), '중'집단 학생 1명(이하 '②'학생), '하'집단 학생 1명(이하 '③'학생)으로 이루어졌다.

수학적 의사소통은 개인 혼자서 수행하기보다는 학생들이 서로 의견을 공유하고 소통하는 과정 속에서 발달한다고 보는 연구자의 관점이 반영되어 의사소통을 분석함에 있어 모둠을 분석 기준으로 삼았다. 또한 의사소통이 다양한 방식으로 이루어지기 때문에 최대한 학생들이 어떤 의도에서 타인과 소통하는지 쓰고, 말하고, 듣는 일련의 과정을 분석에 반영하려고 하였다. 하지만, 연구가 많은 수의 학생을 대상으로 하는 중에 특징적인 모둠을 관찰하는 형태였기 때문에 교사가 기술적인 도구를 사용함에도 불구하고 관찰에 한계가 있을 수 있다는 제한점이 있으며, 의사소통 역시 앞서 논의한 것처럼 다양한 방식으로 이루어지기 때문에 눈에 보이지 않는 의미 전달 역시 연구자가 관찰하기에 한계가 있을 수 있겠다.

수학적 모델링을 적용한 수업을 실시함에 있어서는, Lesh와 Doerr(2003), Lesh et al(2003), Maki와 Thompson(1973), NCTM(1991)이 제시한 수학적 모델링을 바탕으로 김민경(2010)이 제시한 수학적 모델링 과정을 연구 환경 등에 맞게 구성하여 수업에 적용하였다. 본 연구에 적용된 수학적 모델링 적용 절차는 [그림 6]과 같다.

수업의 흐름	모델링 과정	교수학습활동	활동형태
도입	실생활 문제	- 준비활동 - 실생활 문제 제시	전체토의
전개	모델유도 활동	- 문제의 관찰 및 이해 - 문제를 단순화하여 모델 형성 - 모델로 문제 해결, 끊임없이 모델을 생성하고 수정을 반복	소그룹 활동
	모델탐색 활동	- 모델의 형식화, 추상화를 통해 수학적 결론 도출 - 모델에 적용된 수학적 개념 찾기	모둠별 발표
정리	모델적용 활동	- 수학적 결론의 해석, 분석 및 모델 응용	전체토의

[그림 6] 본 연구에 적용된 수학적 모델링 수업 적용 절차
[Fig. 6] Mathematical modeling learning process applied in this study

모델링 수업에서 제시한 실생활 문제 상황은 수학적 모델링 관련 참고문헌과 우리나라 2007개정 및 2009개정

교육과정, NCTM, 국내외 교과서 분석, 다양한 참고서 등을 바탕으로 초등학교 5학년에 적용 가능하면서도 학생들이 실생활 맥락에서 수학을 경험할 수 있도록 설계하였다. 현행 5학년 교육과정 상에 제시된 문제 상황은 너무도 정형적이고, 수학적 개념을 단순히 적용하여 계산하는 문제 위주로 제시되어 학생들이 왜 그러한 수학적 개념을 배우는지 알지 못한 채 학습이 이루어지는 점에서 개발된 문제 상황은 이를 보완할 수 있을 것으로 보인다. 개발된 문제 상황은 수학교육학자 1인과 초등수학교육전공 석·박사 과정의 초등교사 3인 및 20년 이상의 현직 초등학교 교사 등 전문가의 자문과 검토를 받았다. 이를 바탕으로 내용타당도를 검증받고, 최종적으로 수정·보완하여 완성하였다. 제시된 문제는 총 2개의 문제로 첫 번째 문제는 약수와 배수의 개념을 활용할 수 있는 <교통신호등 시간은 몇 초가 적당할까?>(이하 <신호등 문제>)로, 교통신호등을 조정할 수 있는 최소한의 조건을 가지고 학생들이 가장 적절하다고 생각하는 신호등 시간을 정하기 위해 차가 다니는 시간을 약수와 배수의 개념을 응용할 수 있도록 하였다. 두 번째 문제는 <마라톤 코스를 정해보자>(이하 <마라톤 문제>)로, 실제 마라톤이 자주 개최되는 인근 지역의 지도를 활용하여 제시된 구간의 거리의 정보를 가지고 최대한 마라톤 코스의 출발점과 끝나는 지점이 가깝도록 약분과 통분, 분수의 덧셈과 뺄셈 개념을 적용할 수 있도록 하였다. 두 문제 모두 풀이 과정에서 끊임없이 서로의 수학적 사고를 소통하는 과정이 요구되도록 하였다.

3. 연구 도구

본 연구에서의 의사소통 분석은 수학적 의사소통에 관한 유형과 수준(김상화, 2010; 신성기, 2009; 이미애, 김수환, 2001; 이종희, 김선희, 채미애, 2001; 조영준, 신항균, 2010; 홍우주, 방정숙 2008)을 바탕으로 초등학교 현장에 맞게 수정·보완하여 [표 6]과 같이 재구성하였으며, 자세한 내용은 <부록 1>과 같다.

[표 6] 수학적 의사소통 분석 기준
[Table 6] Analysis criteria of mathematical communication

의사소통 구분		의사소통 수준
말하기	질문	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	설명	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	표현	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	토의	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
듣기	이해	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	반응	0수준, 1수준
읽기	이해	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	반응	0수준, 1수준
쓰기	표상	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	표현	0수준, 1수준, 2수준, 3수준
	설명	0수준, 1수준, 2수준, 3수준

본 연구에서 수학적 의사소통은 말하기, 듣기, 읽기, 쓰기 4가지 유형으로 구분하였고, 연구자에 따라서는 보이지 않는 형태의 학생의 손짓이나 몸짓도 의사소통으로 구분하기도 하나, 본 연구에서는 학생들이 표현 가능한 범위 내에서 분석을 하기 위해 4가지 의사소통 유형으로 제한하여 분석하였다.

먼저 ‘말하기’는 그 방식이 질문, 설명, 표현, 토의의 형태로 나타난다고 보았고, 각각 0~3수준의 4단계로 제시하였다. ‘질문’은 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 얼마나 문제와 관련된 질문을 하는지, 질문의 질이 얼마만큼 수학적 개념이나 지식을 담고 있거나 이를 요구하는지 등을 기준으로 수준을 분석하였다. ‘설명’은 타인에게 문제와 관련된 자신의 생각을 설명하는 과정으로서, 수학적 개념이나 지식을 얼마만큼 문제와 관련지어 설명할 수 있는지를 기준으로 분석하였다. ‘표현’은 수학적 용어나 표상 등을 알맞게 사용하여 수학적 지식을 말로 표현할 수 있는지를 바탕으로 수준을 보았다. 앞선 3가지 말하기 유형이 모둠보다는 모둠원 개인에게 분석의 초점이 맞춰졌다면 ‘토의’는 모둠 자체의 활동에 초점을 맞추어 논의의 형태가 문제를 해결하기 위해 논의나 반박, 내용의 수정 등 발전적인 형태로 이루어지는지, 관련없는 내용이 겉돌거나 비슷한 내용만 언급함으로써 해결에 진전이 없는지 등으로 수준을 나누어 살펴보았다.

다음으로 ‘듣기’와 ‘읽기’는 그 방식이 모두 ‘이해’와 ‘반응’ 두 가지 형태로 나타난다고 보았다. 우선 ‘듣기’에서의 ‘이해’는 문제와 관련해서 들은 교사의 말이나 모둠

원들의 말을 얼마나 문제 상황과 관련지어 파악하는지 초점을 두었고, '읽기'에서의 '이해'는 문제를 읽는다던가, 모둠원들이 기록한 내용을 읽는 과정에서 관련 내용을 어떻게 파악하고 있는지에 초점을 두었다. 두 유형에서의 '이해'는 0~3수준의 4단계로 분석하였다. '듣기'와 '읽기'의 '반응' 모두 듣거나 읽은 내용에 대해 적절한 반응을 하는지와 하지 않는지의 2가지 단계로 나누어 살펴보았다.

마지막으로 '쓰기'는 '표상', '표현', '설명'의 형태로 나타난다고 보았고, 0~3수준의 4단계로 제시하였다. '표상'은 그림이나 글, 수학적 기호나 수학적 표현을 사용하여 문제해결과 관련된 내용을 어떻게 나타내는지를 살펴보았고, '표현'은 표상과 비슷하게 보일 수 있으나 '전달'의 측면에서 분석하였다. 즉, '표상'이 활동의 결과물을 나름대로 기록하면서 보이는 것이라면, '표현'은 타인에게 문제해결 내용을 전달하는 과정에서 수학적 개념이나 지식이 요구되는 내용을 포함하여 표현할 수 있는가로 살펴보았다. '설명'은 타인에게 기록된 내용이 설명이 될 수 있는지, 즉 타인에게 얼마만큼 문제해결내용을 수학적으로 이해시킬 수 있는지를 기준으로 보았다. '표현'을 했더라도 타인에게 문제와 관련된 수학적 개념이나 지식을 분명히 '설명'했는지가 문제가 될 수 있기에 이 둘을 구분하여 제시하였다.

분석 기준을 살펴볼 때, 듣기와 읽기의 '반응'만 수준을 2단계로 제시하였고, 나머지는 0~3수준의 4단계로 제시하였다. 전체적인 수준을 판단할 때 0~3수준에 해당하는 내용을 요약해보면, 0수준은 의사소통과 관련한 활동이 일어나지 않는 수준, 1수준은 시도는 있으나 질적으로 매우 낮은 수준, 2수준은 개념이나 지식을 연결짓지만 불완전한 경우, 3수준은 개념이나 지식이 적절히 연결되어 소집단에 속한 학생 모두가 활발히 의사소통을 한 경우를 의미한다. 이러한 분석 기준을 근거로, 학생들의 사례를 바탕으로 하여 의사소통이 어떻게 나타났는지 살펴보았다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. <신호등 문제>에서의 의사소통 수준

1) <모둠 A>의 의사소통 수준

모델링 수업은 '준비활동 → 모델 유도활동 → 모델 탐색활동 → 모델 적용활동'의 흐름으로 진행하였으며, 각 수업 단계의 시간은 고정적으로 정해져있기 보다는 학생들이 유동적으로 사용할 수 있도록 하였다. 사전에 문제를 해결하기위한 단계를 충분히 설명하였고, 중간에 각 모둠별로 다음 단계로의 진행이 가능한지 여부는 교사와 상의하여 진행하였다. 모둠별로 문제의 이해도와 해결에 소요되는 시간이 같지 않았기 때문에 문제를 해결하는 흐름에 큰 지장이 없도록 모델링 진행 과정은 교사가 큰 틀에서 안내하였다.

먼저 실생활 문제가 제시되고 문제를 이해하는 과정인 준비활동에서 <모둠 A>는 다음과 같은 의사소통 수준을 보였다(이하 분석 시 연구자가 중점적으로 관찰한 부분은 밑줄로 구분하였음).

㉮: 문제에서 필요한 것을 찾아봐야 해, 각자 중요하다고 생각하는 내용을 찾아보자
㉰: 우선 교통신호등 시간을 찾는 게 이 문제에서 중요한 것 같으니까 그걸 넣어야 할 것 같아
㉱: 아까 시간 중에 150초도 있었고, 빨간색, 노란색, 초록색 신호등 시간을 정해야 한다고 봤어
㉮: 이 문제는 약수를 쓸 수 있을 것 같은데 1분이 60초니까..
㉯: 150초를 3개 신호등 색으로 나누려면 이것저것 할게 많네
㉮: 여기 화살표 왕복이 2분인가? 물어봐야겠다(선생님에게 문제에 대해서 물어봄)
㉮: 여기서부터 여기까지 가는데 2분이 걸리는거니까 왕복이 아니야. 차가 오고 가는것도 고려해봐야겠다. 완전 복잡해

이 문제가 제시되었을 때 학생들은 문제 해결을 위해서 약수의 개념을 떠올리고는 있으나, 어떻게 구체적으로 적용해야 할지 모르고 막연하게 내용을 떠올렸다. 준비활동은 문제가 무엇인지 살펴보고, 문제가 요구하는 것이 무엇인지 살펴보는 수업 단계로, 지적인 활동이 본격적으로 일어나지는 않았다. 단순히 문제에서 주어진 정보를 확인하였기 때문에 높은 수준의 의사소통이 일어나지 않았고, 각 영역별로 살펴보면 '말하기'에서 질문의 질적 수준이 낮은 수준에서 일어났기에 질문 1수준, 의미 있는 수준의 설명과 표현이 나타나지 않았기에 표현 0수준, 토의는 논의를 하고는 있으나 어렵다, 복잡하다의 내용이 주를 이루고 중요한 논의가 이루어지지는 않는다는 점에서 1수준으로 분석하였다. '듣기'와 '읽기'는 모두 이해 2수준, 반응 1수준으로 분석하였는데, 문제의 내용

을 듣기도 하고 읽기도하면서 무엇을 해야 하는지는 파악하고 있다는 점에서 이해 2수준으로 분석하였고, 문제해결을 위한 유의미한 반응을 하고 있다는 점에서 반응 1수준으로 분석하였다. '쓰기'는 활동지를 기준으로 분석하였는데, 문제에 대한 간단한 기록은 있으나 문제와 결정적인 관련이 있다고 보기는 어려워 표상 1수준, 수학적 개념과 지식을 적절히 연결지어 표현하고 있지 못하다는 점에서 표현 1수준, 마찬가지로 수학적 개념과 지식을 적절히 연결하지 못해 설명이 가능한 수준이 아니라는 점에서 1수준으로 분석하였다.

다음으로 모델 유도활동에서는 문제에 제시된 정보를 바탕으로 문제를 어떻게 해결해야 할지 다음과 같이 본격적으로 생각하기 시작하였다.

㉱: 음.. 어떻게 하지.. 근데 총 시간이 꼭 150초여야 하나
㉯: 그러게 1분이 60초니까..
㉮: 일단 약수와 배수단원을 배웠으니까 그걸 써서 문제를 풀어야 할 것 같아. 근데 어떻게 쓰지..
㉰: 선생님한테 물어보자(총 시간이 150초여야 하는지에 대해 물어봄. 150초라는 조건을 확인 후, 150초가 아니라면 신호등 시간이 총 몇 초일 때 더 효율적인 체계가 되는지도 찾아보라는 말을 들음)

이와 같이 약수와 배수를 활용하려는 움직임이 보이기 시작하였고, 학생들은 문제에서 주어진 조건들을 다음과 같이 다시 확인해나갔다.

㉮: 이렇게 꺾는 길에서는 어떻게 하지? (초록불이 되었을 때 어떻게 되는지, 신호등이 설치된 장소에 모든 신호등이 동시에 켜지고 꺼진다는 문제의 초기 조건을 다시 선생님과 확인함)
㉮: 내 생각에는 1분이 60초니까, 150초가 아니라면 신호등에 있는 시간을 다 합쳐서 60초가 되면 약수 만들기도 좋을 것 같아. 어떻게 생각해? 그리고 여기 있는 분을 초로 바꾸면 60을 곱해야 하는거라서 최대공약수를 구해도 60이 나와.
㉰: 니 말이 맞겠지 뭐. 약수를 어떻게 할건데?
㉯: 맞아. 60의 약수를 구하면..(약수를 구해본다) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60이야. 이 중에서 숫자를 고르면 되나?
㉱: 뭔가 그럴 듯 하다. 역시..
㉮: 세 신호등 시간을 똑같이 해주는게 좋을 것 같아. 이 문제를 보면 신호등 색깔 다 중요하다고 써있잖아. 그러니까 똑같이 나눠주는게 좋겠어.
㉰: 그게 맞을 것 같다.
㉯: 그럼 60초일때는 똑같이 나눈다. 그럼 20초?
㉮: 응
㉰: 그럼 150초일때는? 어떻게 구할거야. 똑같이 나눠?
㉮: 일단 이 문제보면 길에 분으로 나와있잖아. 그러니까 초를 분으로 볼 수 있게 쉽게 바꾸는게 좋을 것 같아.
㉯: 아, 그래서 아까 약수도 60초로 본거지?
㉮: 응 맞아. 150초도 분으로 볼 수 있도록 60초는 1분이니까 그런 식으로
㉱: 그러면 150초면 60초가 두 번 들어가고 30초가 남네
㉮: 60초, 60초, 30초로 나누면 되겠다
㉯: 무슨색을 30초로 하지?
㉰: 문제 보면 노란색이 준비라고 하잖아. 빨간색일 때는 사람들이 건너야 하니까. 제일 안중요한거를 짧은 시간으로 하면 되지 않을까?
㉱: 응, 그러면 될 것 같다
㉮: 그래 그러면 빨간색 60초, 노란색 30초, 초록색 60초 이렇게 구하면 되겠다.

학생들은 약수와 배수를 사용한다고 하였으나, 문제의 여러 상황과 조건을 이용해서 구하지는 못하였다. 1분이라는 단위에 집착하여 문제해결에서 1분이라는 의미가 크게 작용하였고, 약수를 사용하나 150초를 나누는데 계속해서 1분을 사용하였다. 모둠 내에서 '상'수준 학생(㉮학생)의 주도로 활동이 이루어졌으며, '상'수준 학생의 의견에 반박이나 갈등이 없었고, <모둠 A>는 1분이라는 언급만 있으면 수학적 근거 제시가 충분하다고 생각하였다.

이상의 활동을 보면, 의사소통 진행 과정 자체는 합의가 잘 이루어졌으나 문제해결측면에서는 의사소통이 부족했다고 볼 수 있다. '말하기'영역에서 학생들의 질문의 질적 수준이 1수준으로 낮게 이루어졌고, 설명은 불완전한 수학적 지식을 보이기도 하여 2수준까지, 표현도 수학적 개념이나 지식이 불완전한 수준에서 나타난다는 점에서 2수준을 보였다. 토의식 수업임에도 불구하고 함께 해결을 논의하기보다는 의사소통이 1인 주도로 이루어지는 경향을 보여 토의는 2수준을 보였다. 학생들은 '상'수준 학생(㉮학생)의 생각에 대해 반박할 생각을 전혀 지니지 않아 질문이 잘 일어나지도 않았고 의문형의 대화를 하여도 어떻게 하겠다는 식의 단정적인 논의가 진행되었다. '듣기'와 '읽기'에서는 문제와 관련된 내용에서 무엇을 해야 하는지 정확히 파악하고 있지 못하다는 점에서 이해 1수준, 그래도 전혀 무의미한 반응을 하지는 않고 모둠 안에서 논의된 내용 안에서 유의미한 반응을 하고 있다는 점에서 반응 1수준으로 보았다. '쓰기'는

여전히 문제해결과 관련해 결정적인 연결을 짓지 못하고 있다는 점에서 표상 1수준, 수학적 개념이나 지식을 불완전하게나마 연결 지으려는 점에서 표현 2수준, 설명은 2수준까지 나타나는 것으로 보았다.

문제해결과정을 되돌아보고 과제 수행에 사용된 수학적 개념을 살펴본 모델 탐색활동에서 <모둠 A> 학생들은 문제 상황의 복잡성을 여러 각도로 고려하지 못하였고, 사용된 수학적 개념을 다음과 같이 단순하게 나열하였다.

㉯: 우리가 한거 다시 적어야 겠다
㉮: 그럼 여기에서 수학적 개념 뭘 사용했는지 최대한 생각해봐
㉰: 아까 60 얘기하면서 약수 썼잖아
㉱: 나누기도 썼고..
㉯: 그럼 더하기도 쓴건가? 150초 만들 때
㉮: 그래 그거 다 쓴거 같다
㉰: 이것밖에 안썼나? 이것만 보니까 문제가 안복잡한 것 같네
㉱: 그러게 생각보다 단순한 문제였나
㉮: 아, 그리고 1분이 60초라는 거 그것도 사용했잖아
㉰: 맞다. 그것도 썼네 시간에 대한 것

학생들은 서로 사용했다고 생각한 수학적 개념을 공유하였고, 사용된 수학적 개념이 어려운 개념이 아님을 논의하면서 문제의 복잡성을 다시 생각해보았다. 탐색활동에서는 모둠별로 발표 자료를 만들고, 문제해결에 대한 발표를 진행하였는데, 다른 모둠의 발표를 지켜보는 과정에서 의사소통이 비교적 활발하게 나타났다. 이상의 활동에서 '말하기'에서 질문은 수학적 개념과 관련지어 활발히 일어났다는 점에서 3수준까지 나타난 것으로 보았다. <모둠 A>에서는 주로 ㉮학생이 다음과 같이 질문하였다.

- "왜 그 시간이 나왔는지 어떤 계산을 썼나요?"
- "1분이 60초라는 것은 고려하지 않았습니까?"
- "왜 그렇게 나왔는지를 잘 모르겠습니다. 이유가 무엇인가요?"
- "노란불 시간이 너무 많은데, 왜 그렇게 했나요?"

불완전하지만 수학적 개념과 관련짓고 있다는 점에서 설명, 표현이 2수준까지 나타난 것으로 보았고, 토의는 상대방의 의견을 반박하기도 한다는 점에서 3수준까지 나타나는 것으로 보았다. '듣기'와 '읽기'는 앞선 단계와 큰 차이를 보이지 않아 이해와 반응 모두 1수준으로 보았고, '쓰기'는 발표 자료를 만드는 활동까지 포함하여 불완전하게 개념과 지식이 연결되는 점에서 표상, 표현, 설명 모두 2수준으로 보았다.

다른 모둠의 발표 내용을 듣고 모둠에서 해결한 방법에 대해 반성하는 모델 적용활동에서 <모둠 A>는 다음과 같은 의사소통 양상을 보였다.

㉮: 다른 발표 들으니까 그나마 우리 모둠이 나은 것 같긴 한데..
㉰: 근데 선생님이 우리 모둠한테 왜 약수를 썼냐고 물어봤을 때..
㉯: 맞아. 문제 풀 때 니가 말하니까 그냥 맞는 줄 알았는데.. 보다보니까 아닌 것 같기도 해
㉮: 약수를 써야 할 것 같고.. 여기에 시간이 나와있고 하니까.. 그리고 최대공약수도 그렇고.. 약수로 써야 하는 줄 알았지..
㉱: 선생님이 했던 말 생각해서 쓰면 될 것 같은데.. 약수 쓰는게 잘못이 아니라고 했잖아
㉮: 맞아. 다른 모둠들은 다 더하기만 쓰고 그랬잖아. 우리가 생각한게 백퍼센트 틀린 건 아니야
㉯: 1단원을 어떻게 쓰는지를 생각했어야 했지..
㉱: 아, 그리고 60초 걸린다고 했던거 그냥 나누기 3으로 해서 20초씩 했던거 그것도 발표하고 나니까 좀 이상해보였어
㉮: 나도 인정. 말하면서 근거를 말하려고 하니까 뭔가 안맞는거 같고.. 좀 더 열심히 풀었어야 했는데..
㉯: 우리가 잘 몰라서 그런거니까 다음에 잘하자
㉮: 다음에는 근거를 잘 찾아야겠어. 근거가 안나오면 제대로 푼게 아닌거지

(중략)

㉯: 근데 이번에 문제 푼거를 다른데에 쓸 수가 있나? 신호등이랑 비슷한게 뭐가 있지?
㉮: 음.. 뭐 시간이었으니까 뭐가있지.. 결국 약수와 배수를 쓸 수 있는 문제였으니까 교과서에서 나온 상황 생각하면 되지 않나?
㉰: 아, 버스 출발하고 그런거?
㉱: 근데 버스 출발하는거 우리가 계산할 일이 있나?
㉯: 그건 신호등도 마찬가지지. 오늘 배운거 쓸 수 있는거 찾으면 되는거 아니야?(선생님께 물어보고, 우리 주변에 문제 해결에 사용했던 방법들, 또한 반성했던 내용들을 생각하면서 어떤 상황에 사용될 수 있을지 우리 주변에 있는 실제 상황을 생각해보라는 조언을 들음)
㉮: 당장 생각이 잘 안나는데.. 음.. 뭐가 있을까.. 이런건 어때? 요리할 때 여러 가지 재료를 한꺼번에 준비해야 할 때 있잖아. 우리 엄마 요리할 때 보니까 뭔가 한꺼번에 다 하던데.. 시간을 잰다고 생각하면 효율적으로 하나를 몇 초 아니면 몇 분동안 요리할 동안 다른 거를 자르고 볶고 그렇게 하는 시간도 어떻게 만들 수 있지 않을까?
㉰: 뭔가 복잡하네. 근데 요리할 때 누가 그렇게 시간을 재겠어. 안그래? 그렇게 재는게 더 힘들겠다.
㉯: 음.. 꼭 시간만 그렇게 생각안해도 될 것 같은데.. 그냥 게시판에 우리가 그린거 붙일 때도 쓸 수 있지 않나..
㉱: 그건 너무 단순한거 아니야? 그냥 곱셈만 하면 되잖아
㉮: 좀 복잡하게 생각하면 되지. 종이 크기가 같은게 2가지

종류이면 붙일 때 좀 복잡하니까 이런 식으로 여러 가지 생각해서 계산을 좀 하면..
㉰: 응, 선생님 게시판 꾸밀 때 도와드려보니까 그냥 막 붙이면 이상해서.. 게시판에 몇 장 들어갈 수 있는지 알고나니까 좀 붙이는게 딱 맞았거든. 크기가 다른거 같이 붙이려면 더 힘들겠다. 이런 식으로 생각하면 더 낫겠는데
㉱: 더 다른건 없나? 약수와 배수 계산만 하면 쉬운 건줄 알았는데 완전 어려운 것 같다
㉮: 생각하면 생각할수록 그런 것 같아. 더 생각이 잘 안난다.. 좀 더 생각해봐야겠다..

발표 후에 <모둠 A>는 스스로 의사소통에 큰 무리 없이 문제해결을 잘했다는 판단이 잘못되었다고 생각한 뒤 모둠 내 논의가 좀 더 깊이 있게 이루어졌다. 왜 그러한 결과가 나왔는지에 대한 수학적인 근거와 이유에 대해 다시 생각해보았고, 다른 모둠의 발표를 들으면서도 왜 그러한 결과가 나왔는지에 집중하여 질문을 하였다. 선생님이 약수를 적용한 과정에 대해 질문했을 때 답변을 적절히 못한 부분에 대해서는 깊이 있게 수학적 관련을 짓지 못하고 개념을 피상적으로 사용했음을 반성하는 논의를 하였다. 적용될 수 있는 다른 상황을 논의함에 있어서도 약수와 배수에 기초하여 교과서 상황을 생각해보기도 하고, 주변의 실제 상황을 생각하여 사례를 논의하였다. 게시판을 꾸미는 상황은 시간과 관계는 없지만 학생이 실제 게시판을 꾸몄던 과정을 떠올리며 이 문제에서 활용된 수학적 개념을 사용할 수 있는 상황으로 떠올렸고, 이 상황에 대한 반박에 다른 학생이 보충적인 상황을 추가하여 제시해 개념이 쓰일 수 있는 상황으로 생각을 넓히기도 하였다.

이전에는 ‘상’수준 학생(㉮학생) 1인 주도로 이루어지던 대화 양상이 발표 이후 모둠에서의 문제해결과정에 대한 반성을 시작으로 다른 모둠원들의 참여가 이어졌다. 전반적으로 의사소통의 수준이 이전 단계보다 높게 나타났는데, ‘말하기’에서 질문은 개념의 내용과 관련이 비교적 분명히 제시된다는 점에서 3수준까지, 설명은 2수준까지, 표현은 문제와 관련된 개념과 지식까지 포함하여 표현한다는 점에서 3수준까지, 토의도 반박과 보충 등 발전적인 결과로 나아가는 점에서 3수준으로 보았다. 또한 모둠원의 문제해결과 관련된 내용을 듣는 과정에서 학생들이 어떠한 정보를 수학적으로 어떻게 적용할 수 있는지 생각한다는 점에서 ‘듣기’에서 이해를 3수준까지, 반응은 유의미하게 나타났기에 1수준으로 보았다. ‘읽기’는 이 단계에서 나타나는 부분은 없어 수준 파악에서는 제외하였다. ‘쓰기’에서는 표상에서 2수준, 수학적 지식과 개념을 정확히 연결 지어 표현한다는 점에서 표현은 3수준까지, 설명도 마찬가지로 3수준까지로 보았다.

2) <모둠 B>의 의사소통 수준

<모둠 A>와 마찬가지로 모델링 각 수업 단계별로 <모둠 B>의 수업 활동 내용을 살펴보도록 하겠다. 먼저 준비활동에서 <모둠 B> 학생들은 문제에서 주어진 상황에 대한 고려를 하였고, 문제에서 주어지지 않은 조건을 정리하여 문제에 제시되지 않은 부분에 대해 직접 활동을 통해 다음과 같이 살펴보았다.

①: 선생님이 문제에서 중요한 내용을 정리하라고 했으니까 정리하자.
③: 음 여기 3가지 색깔 빨, 노, 파를 150초 이하로 조절을 해야 하는거랑 여기 지도 같은거에 분 써져 있는거 5분, 2분, 6분짜리 이것도 중요해
②: 여기에 빨간색은 멈춤, 노란색은 준비, 파랑색은 출발이라고 한것도
①: 150초를 적당하게 나누는게 우리가 풀 문제네 그럼
②: 이 문제 보니까 운전자들 생각을 잘 알아야 하지 않을까 싶은데..
③: 빨강일 때 사람들이 길을 건넌다고 하잖아. 길 건너는데 얼마나 걸릴까?
①: 뭔가 속도랑 관련있는거 같지 않아? 그걸 알아야 하는거 아닌가.. 차도 속도가 다 다른데 빨리가면 빨리 지나가는 거 아닌가.. (선생님께 문제지에 나와 있는 ‘분’을 묻고, 차의 속도에 관해 물어봄. 여기에 제시된 ‘분’의 경우 그 도로를 지나가는 평균적인 ‘분’을 제시한 것이고 차의 속도는 거의 일정하게 나온다는 것을 가정하여 이 문제에 제시된 조건만으로 문제를 해결하는 부분에 대해서 들음)
①: 음.. 그럼 차는 시간만 생각하면 될 것 같고.. 우리가 직접 해봐야겠네
학생들: 동의함

여러 가지 고려할 사항 때문에 <모둠 B>는 모둠원들 간 논의가 다른 모둠에 비해 활발히 이루어진 편이었다. ‘말하기’에서 질문은 질문의 내용이 불분명하기는 하나 수학적 개념과 관련을 짓고 있다는 점에서 2수준까지, 설명과 표현은 수학적 개념이나 지식과 연결되었다고 보기는 어렵기 때문에 1수준으로, 토의는 비교적 활발히 이루어지나 1인 주도로 이루어지고 있다는 점에서 2수준으로 보았다. ‘듣기’와 ‘읽기’ 모두 학생들이 무엇을 해야

하는지는 파악하고 있기 때문에 이해 2수준, 반응 1수준으로 보았다. '쓰기'는 간단한 기록은 있으나 수학적 개념이나 지식과 관련이 없거나 문제와 결정적인 관련이 없다는 점에서 표상, 표현, 설명 모두 1수준으로 보았다.

모델 유도활동에서 학생들은 150초를 효과적으로 배분하기 위해 다음과 같이 여러 방법을 이야기하고 직접 알아보기 시작하였다.

①: 여기서 일단 빨강에서는 사람들이 길을 건넌다고 하니까 시간을 정해보자. 어떤 방법으로 할까?
③: 사람들이 건넌다고 했으니까 아까 차 속도는 안한다고 했잖아.. 그래도 사람 속도는 해야 하지 않나?
①: 그건 해야 문제가 풀릴 것 같다. 그럼 사람 속도를 지금 해보자
③: 그런데 사람도 차처럼 속도가 다 다르잖아. 그건 어떻게 하지?
①: 그럼 그것도 생각해서 해보지 뭐
②: 어떻게 할건데?
①: 그럼 빨리 걷는 사람, 느린 사람 이렇게 나눠서 해볼까?
③: 그래 그럼 너는 걷는 역할 하고, 내가 시간을 재볼게 얼마나 걸리는지
②: 어디서부터 어디를 걸어?
①: 교실 뒤에서 하자. 뒤에 끝에서 끝까지 걸어. 시작하면 걸어
②: 알았어
(교실 뒤에서 학생들이 걷고 시간을 재어봄. 빠른 걸음으로 6초, 느린 걸음으로 12초가 나왔음)
①: 나도 해볼래
(빠른 걸음으로 5초, 느린 걸음으로 13초가 나왔음)
③: 할머니나 어린 아이들은 더 느리게 걷지 않나. 나도 걸어볼래
(빠른 걸음으로 6초, 느린 걸음으로 15초가 나왔음)
②: 이거 시간이 다른데 어떻게 하지?
①: 빠른 걸음은 6초로 하면 될 것 같고, 느린 걸음은 중간? 13초 정도로 잡고 하자
(선생님께 활동 과정을 말씀드림. 빨간색 신호등 시간을 고려할 때 이 시간을 그대로 적용할 것인지 선생님이 물어봄. 신호등이 설치된 구간에서 건널목의 경우 교실 뒤 정도의 길이인지 더 길면 어떻게 하면 좋을지 생각해봤으면 좋겠다는 말을 들음. 좁은 골목길이 아닌 경우 대체로 건널목 길이가 어떠한지 생각해보고, 신호등이 어떻게 깜빡이는지도 생각해 보았으면 하는 말을 들음)
①: 음.. 건너는 데 보면 교실보다 한.. 4배로 봐야하나? 그러면 13초 정도니까 4 곱하고 음.. 60초 정도로 볼까?
③: 근데 우리가 시간을 재긴 했지만 느린 사람인데도 좀 보통 걸음걸이? 로 걸은 것 같아서 시간을 좀 더 넣는게 낫겠어
①: 그럼 적당히 70초로 하자. 그러면 되겠지
②: 그래 이렇게 시간도 재고 했는데 70초면 충분히 걸을 것 같다
①: 그러면 나머지 시간은 어떻게 할까? 그다음 어떤 색으로 하지?
②: 노란색 정하자. 노란색 정하고 남는 시간을 초록으로 하면 되잖아
③: 그래. 그러면 한 5초?
②: 차가 준비할 시간이라잖아
①: 그럼 운전자도 고려해서 적당히 7초로 할까?
학생들: 동의함
③: 그러면 빨강 70초, 노랑 7초니까 150에서 빼봐
①: 빼면 73초
②: 다 끝났네

<모둠 B>의 수학적 의사소통은 겉으로 보기에는 큰 문제없이 합의가 잘된 듯 보이지만 문제해결 측면에서는 의사소통이 부족했다고 볼 수 있다. 문제해결 초기에는 모둠원들이 서로 적절히 개입하면서 논의를 했으나 시간이 지날수록 ①학생 위주로 문제해결이 이루어졌다. 결국 <모둠 B>는 다른 모둠에 비해서는 실제 현실에 대해 고려를 많이했으나 의사소통이 1인 주도로 이루어지는 경향을 보였다. 또한 모델링 상황의 복잡성에만 치우쳐 생각하느라 사용할 수 있는 수학적 개념을 더 찾지 않고 자신들이 활발히 논의한 방법만 찾은 뒤 나머지 신호등 시간에 대해서는 수학적으로 불완전하게 답을 도출한 모습도 보였다.

영역별로 살펴보면, '말하기'에서 질문은 2수준, 설명은 불완전하게나마 수학적 개념과 연결지으려는 점에서 2수준까지, 표현도 마찬가지로 2수준까지, 토의는 1인 주도로 이루어지기도 하고 활발히 이루어지기도 하는 점에서 2~3수준으로 나타나는 것으로 보았다. '듣기'는 이해에서 2수준까지, '읽기'는 이해에서 1수준을 보였고, 두 영역 모두 반응에서는 1수준을 보였다. '쓰기'는 기록이 문제해결과 결정적인 연관을 짓지 못한다는 점에서 표상 1수준, 불완전하게나마 지식을 수학적 개념과 연결지어 표현하려 한다는 점에서는 표현 2수준, 마찬가지로 불완전하게 설명력을 지니는 기록이 제시된다는 점에서 설명을 2수준까지 보았다. <모둠 B>는 빨간색 신호의 시간을 결정하는데 많은 시간을 할애했고, 그 단계에서 여러 상황을 고려하여 시간을 선택하였지만 모둠원들의 합의하에 수학적 계산보다는 적당한 선에서 결정을 내렸다. 빨간색 시간 외에 노란색, 초록색의 시간을 고려할 때 수학적인 고민이 부족했으며, 단순히 노란색을 정하고 초록색은 계산 결과 남은 시간으로만 정하려고 하였다. 또한 상황적인 측면에 대한 고민 때문에 활동적 체험을 활용하였으나 문제 해결 전반에 걸쳐 고민하지는 못하였

다.

모델 탐색활동에서 <모둠 B>는 문제에서 사용된 수학적 개념을 단순하게 나열하면서 다음과 같이 더 깊게 생각해보지 않았다.

③: 자 우리가 푼거 적어
(②학생이 쓰고 있음)
②: 수학적 개념, 원리, 법칙 뭐 썼지?
①: 일단.. 우리가 시간을 나눴으니까 나누기를 썼고..
③: 더하기랑 빼기도..
②: 속도도 수학 개념인가?
①: 그건 과학아닌가? 여기서 수학적 개념이라고 하면 계산하는거니까 속도는 아닐 것 같아
②: 그럼 우리가 쓴 수학적 개념이 나누기, 더하기, 빼기 맞지?
①: 그래
(②학생이 씀)

모둠 내에서는 큰 갈등 없이 의사소통이 일어났으나 수학적으로는 큰 의미가 없었다. 다른 모둠에게 질문하는 부분에서 문제해결과 상관 없는 내용에도 질문을 제기하였다. 영역별로 보면 '말하기'에서 질문은 계속해서 2수준을 유지했고, 설명 2수준, 표현 2수준, 토의는 2수준이 나타났다. '읽기'는 이 단계에서 나타나는 활동이 없었기에 수준 파악에서 제외하였고, '듣기'는 이해와 반응 모두 1수준을 보였다. '쓰기'는 표상, 표현, 설명 모두 2수준을 보였다.

발표 후에 <모둠 B>학생들은 자신들의 의사소통에 큰 문제가 없고 직접 경험해본 활동을 근거로 시간을 정했기 때문에 나름 잘했다고 생각했는데, 발표를 하고 질문에 대한 답변을 제대로 하지 못하면서 이어지는 모델적용활동에서 아래와 같이 생각의 깊이가 더 깊어졌다. 왜 그러한 이유가 나왔는지 깊이 수학적 관련을 짓지 못하고 시간 배분 한 것을 반성하였다. 또한 적용 가능한 상황으로 <모둠 B>는 교과서의 상황을 주로 생각하였고, 이를 발전시켜서 주변의 마트 상황을 생각해 냈다. 부족했던 수학적 논의도 모둠별 발표 후에 늘어났다.

②: 우리 모둠이 시간 잰거 그건 잘한 것 같은데 다른 것도 좀 더 생각할걸 그랬다
①: 그래도 우리처럼 걷는 시간 고려한 모둠은 없었지
③: 3모둠처럼 약수도 생각했어야 했는데 우리가 왜 이렇게 계산했지?
②: 노란색이랑 초록색을 너무 대충 정한 것 같아
①: 빨간불을 좀 더 줄일걸 그랬어 그리고
③: 왜?
①: 우리가 너무 사람들 건너는 것만 생각해서, 이 문제가 차가 막혀서 신호등 바꾼다고 했던거니까
②: 그렇네
①: 초록불 시간을 먼저 하던가 좀 더 늘리던가 했어야했어
③: 근데 그 시간은 어떻게 고려해? 빨간불이야 우리가 걷는다고 쳐. 근데 운전할 수도 없고
①: 그러니까 그건 계산을 좀 해보던가.. 약수와 배수를 쓰던가 아무튼 생각을 했어야지
②: 이미 지나갔으니까.. 다음에 문제를 풀면 그냥 풀지 말아야겠어. 다른 모둠도 보니까 이유가 없더라. 선생님이 물어보는거에 답도 못하고..
①: 그래 우리도 뭐 잘 못했으니까.. 생각을 많이 해야겠어. 아 어렵다
(중략)
③: 이 부분에 뭘 쓰지? 신호등도 머리아픈데.. 다른데에 뭘 쓰지?
①: 음.. 뭐 좀 생각해봐. 근데 우리 하던거 생각하면 생각안 날 것 같고.. 걷는 시간 그런거는 사람들 건너는 신호등에 쓰일 수 있지.. 다른데는 잘 모르겠다..
②: 그럼 약수와 배수? 그걸로 생각해볼까? 이거 시간 겹치는거 그런거 좀 생각했어야 했을 것 같던데
③: 음.. 음.. 음.. 생각이 잘 안나. 어려워. 뭐에 쓰지?
①: 그런거 문제에서도 봤잖아. 만나는 날짜? 그런거. 누구는 어디에 며칠마다 가고 다른 사람은 얼마마다 가는데 만나는 날이 언제냐 이런거
②: 응. 근데 그거 쓸 일이 있나.
①: 뭐 안쓴다고 하기도 그렇지 않나. 계산할 수도 있지
③: 아 진짜 생각이 잘 안나네.. 이것도 시간을 나눠주는거였으니까 물건 나눠줄 때 쓸 수 있지 않나
①: 아 물건을 사람한테 나눠줄 때?
③: 응 수학책에도 나오긴 하지만
①: 그것도 될 수 있겠네. 뭐 이 문제처럼 길게 이것저것 쓰고 써진대로 생각해서 물건을 나누려면 어떻게 해야 하냐고 쓸 수 있겠다
②: 아니면 마트 같은데서? 물건 어떻게 놓는지?
①: 그건 어떻게? 마트에서 뭘?
②: 뭐 물건 몇 개 파는데 사람 몇 명한테 팔려고 하면 1명당 몇 개까지 최대인지 뭐 이런거?
③: 아.. 나는 물건 놓을 때 뭐 하는 건줄 알았지
①: 물건 놓을 곳 길이랑 물건 길이 가지고도 그럴 수는 있겠네
②: 뭐 그냥 생각한건데 또 생각하니까 복잡하네

①번 학생 주도로 점점 흘러가던 대화의 양상이 모둠별 발표 이후 모둠 내의 문제해결과정에 대한 반성을 시작으로 다른 모둠원들의 참여가 이어졌다. 영역별로 보면 '말하기'에서 질문은 수학적 개념의 내용과 관련짓는다는 점에서 3수준까지, 설명은 2수준, 표현은 개념을 관련지어 적절히 표현한다는 점에서 3수준, 토의도 반성이

일어나면서 활발히 전개된 점에서 3수준으로 보았다. '읽기'는 앞선 단계와 마찬가지로 나타난 활동이 없어 수준 파악에서 제외하였고 '듣기'는 어떤 정보를 어떻게 이용할지 파악한다는 점에서 3수준, 반응은 1수준으로 보았다. '쓰기'는 표상에서 2수준, 수학적 개념과 지식을 문제와 관련짓는 점에서 표현과 설명 모두 3수준을 보였다.

<모둠 B>도 <모둠 A>처럼 모둠원들의 수학적 수준이 달랐으나 모두 의사소통 과정에 개입하여 논의를 해 나갈 때 수학적 근거에 대한 생각의 깊이가 깊어지고, 의사소통의 수준이 높아지는 것을 관찰할 수 있었다.

2. <마라톤 문제>에서의 의사소통 수준

1) <모둠 A>의 의사소통 수준

학생들은 이전의 모델링 수업 경험을 떠올리며 어떤 부분에 주안점을 두고 문제를 해결해야 하는지 상기하면서 다음과 같이 준비활동을 시작하였다.

㉮: 저번에 했던 것처럼 정리하자. 근데 중요한 사항은 문제에 벌써 정리가 되어 있는 것 같아
㉯: 그러게. 그럼 이 부분을 정리하는 걸로 하자.
㉰: 이 문제 보니까 여러 가지를 생각해봐야 할 것 같아. 예전에 근거 때문에 힘들었잖아
㉮: 이번에는 근거가 왜 그런지 좀 잘 찾아야 겠어
㉯: 아, 그리고 이번에는 분수랑 관련된거니까 문제에서 나온대로 잘 맞추고, 우리가 풀 때에도 맞게 써야할 것 같아
㉮: 응. 저번처럼 하지는 말자

이전 모델링 수업과 마찬가지로 이 단계에서는 의사소통 수준이 높게 나타나지는 않았다. '말하기'에서 질문은 1수준, 설명과 표현은 0수준, 토의는 1수준을 보였고, '듣기'와 '읽기'에서 이해는 2수준, 반응은 1수준을 보였으며 '쓰기'는 표상, 표현, 설명 모두 1수준으로 낮은 의사소통 수준을 보였다.

모델 유도활동에서는 5km, 10km, 20km 각 구간에 주어진 조건을 가지고 어떻게 코스를 구성할지 다음과 같이 논의하기 시작하였다. 학생들은 여러 가지 코스를 생각했으나 실제로 모두 계산하여 구하지는 않고 모둠원이 합의한 길을 구했으며 주어진 조건에 만족하는지 알아보기 위해 계산을 통해 조건이 충족되는 것을 확인하였다. 또한 보다 적은 시간에 효율적인 코스를 만드는 방법을 찾기 위해 모든 구간에 반환점을 도입하여 길이의 반만 구하고도 시작점과 끝점이 같아지도록 하는 반환점 코스를 생각하였다.

㉯: 일단 5km부터 하자. 여기서 출발하고.. 잠실동이니까.. 다른 동까지 무조건 가야하는데..
㉮: 이 길도 있고, 이 길도 있고, 이 길도 있고.. 근데 아무튼 잠실동에서 가장 가까운 곳이 삼전동, 그 다음이 석촌동이라서 일단 여기 나와 있는 거리를 좀 더해보자.
(서로 구간을 나누어서 계산기로 길의 거리를 더해봄)
㉱: 근데 이거 이 길은 잠실동인지 삼전동인지.. 이거 어떻게 하지?
(잠실동과 삼전동 가운데 있는 길의 경우 다른 동을 지난다고 볼 수 있다고 다시 공지함)
㉯: 그러면 이 길은 잠실이랑 삼전동 둘다 지나는 거니까 다른 동 길이에 넣어야 겠다
㉮: 근데 이거 더하면 5km 딱 안나오는데.. 딱 나오는 길이 따로 있나..
㉰: 선생님한테 물어봐
(도로의 번호는 길이를 안내하기 위한 수단일 뿐, 번호로 표시한 도로 중간 지점에서도 5km, 10km, 20km모두 끝이 날 수 있다는 점을 다시 공지함)
㉮: 그러면 여기서 끝나도 되네. 5km 다했다. 선생님한테 가서 물어봐야지
(끝나는 지점을 고려함에 있어 최대한 시작점과 가깝게 하라는 것을 고려하지 않았고, 다른 동이 얼마만큼 포함되어 있는지 정확히 확인하지 않아 다시 해야겠다고 학생이 선생님에게 보여주면서 스스로 깨닫고 돌아감)
㉮: 우리가 잘못한 게 있어. 끝나는 곳이 멀어. 그리고 다른 동이 들어가는 곳 계산을 안했어.
㉰: 음.. 일단 많이 바꿔야겠네..
㉱: 그럼 그거 어때? 5km면, 반 정도만 갔다가 다시 같은 길을 돌아오는걸로 하면 출발하는 곳이랑 거의 비슷해 지잖아
㉮: 그거 좋다. 완전 좋다. 편하겠다
㉰: 그러면 길을 정할 때 다른 동이 많이 들어가지는 않겠다. 들어가는 동네만 들어가겠다
㉯: 그래도 여기 문제에 나온거대로 하는거니까 괜찮을 것 같은데?
㉮: 근거를 수학으로 잘 하면 괜찮을거야.
㉰: 그럼 아까 했던 코스에서에서 크게 바꾸지 말자. 반 정도 갔다가 돌아오는 걸로 하자
㉯: 그럼 반 정도 되는 지점 계산기로 계산해보자
(5km의 반 정도 되는 코스 길이를 구하고 점을 찍어서 되돌아오는 형태로 구함. 시작점과 끝점이 같게 하였음)
㉰: 이렇게 하니까 완전 편하고 좋다. 완전 좋다
㉱: 그럼 10km 이제 하자
㉮: 10km도 아까 5km 그랬던거 쓰자. 아까는 5km가 너무 멀었는데 이렇게 돌아오게 하면 다시 시작이랑 같아진다
㉯: 이 방법 아주 좋은 듯
㉰: 그럼 다른 동이 얼만큼 들어가는지 보자
㉮: 누가 좀 숫자 불러줘. 계산기로 계산하게

(이전에 만들었던 5km 코스를 사용하여 10km도 반환점 코스로 만들었음)
㉰: 그럼 이제 마지막 20km. 우리가 제일 잘한다
㉯: 근데 코스를 여기 잠실동으로 들어갈수도 있고, 강있는 쪽으로 갈 수도 있잖아. 어떻게 해도 답은 나올 것 같은데 어디로 할까?
㉰: 음.. 이건 마라톤 뛰는 사람들을 좀 생각해야 할 것 같은데?
㉮: 마라톤 뛰는 사람을 생각하면 강있는 쪽이 더 나을 것 같아. 여기가 길도 안 복잡하고 쭉 갔다가 쭉 오면 되고
㉯: 그러면 여기 강 있는 쪽으로 쭉 가서 삼전동 지나는 걸로 맞지?
㉱: 그럼 이런 식으로?(그림을 그려본다)
㉮: 응 그런 식으로
㉰: 내가 그럼 숫자 부를게. 계산기 쳐봐
(그림을 그려가면서 계산기로 거리를 계산함)
㉱: 이것도 10km까지 할거지?
㉮: 응
(앞서 썼던 방법과 마찬가지로 반환점을 사용하여 10km를 가지고 20km 코스를 만들어내고 다른동이 얼만큼 포함되었는지 구함)
㉱: 이제 코스는 다 구했으니까 활동지 정리하자
㉮: 내가 지도 가져와서 그릴게. 활동지는 하면서 썼어
㉰: 연습하고 그려야겠다. 선생님한테 지도 1장 더 달라하자
(연습용 지도 1개를 받아서 그려본 후 큰 지도에 코스를 그리기 시작함)

이 단계에서는 수학적 의사소통이 비교적 활발히 이루어졌고, 모둠원들이 문제를 적극적으로 해결하려 하다 보니 1인 주도로 의사소통이 이루어지기보다는 학생들 모두 어느 정도 소통에 참여하는 형태로 나타났다. 잘못된 점을 찾고, 문제가 있는 점을 논의를 통해 방법을 찾아 수정해 나가는 방법으로 문제를 해결해 나갔고 의문이 생기는 점은 끊임없이 질문을 하여 문제의 방향을 설정해 나갔다. 의사소통 수준은 전반적으로 높게 나타났는데, '말하기'에서 질문, 설명, 표현, 토의 모두 3수준까지 나타났으며, '듣기'와 '읽기'도 이해에서 3수준까지, 반응은 1수준으로 나타났다. 또한 '쓰기'도 표상, 표현, 설명 모두 3수준까지 나타났다. 첫 번째 모델링 활동에서는 문제해결과정에서 자신들의 풀이에 대한 반성을 전혀 하지 않았으나 두 번째 모델링 활동에서는 자신들의 방법에 대해 문제점도 찾아보고 수학적 이유나 근거를 찾아보면서 이전보다 발전된 활동을 전개하였다.

모델 탐색활동에서는 문제 상황의 실제성을 고려하면서 마라톤을 뛰는 사람들의 입장을 생각하는 언급을 하였다. 과제 수행에 사용된 수학적 개념을 찾는 과정에서 첫 번째 모델링 활동이었다면 무작정 사용했을 개념도 두 번째 모델링 활동에서는 판단에 따라 쓰지 않기도 하였으며 생각할 수 있는 개념을 최대한 찾아보았다. 탐색 활동에서의 의사소통 양상은 다음과 같이 나타났다.

㉮: 자 지난번처럼 생각해보자. 이게 중요한 거 같아 저번 생각하면
㉰: 응. 일단 문제에도 분수가 나오고 분수를 썼어 우리도
㉱: 그리고 더하기도 썼지
㉯: 맞아 계산기로 더했어
㉮: 그리고 이거 m로 문제에 써서 주셨잖아. 근데 문제는 km로 나오고..
㉰: 그래서 1km랑 1000m 같은거 생각했잖아
㉱: 분수의 덧셈은 안쓰인거지?
㉮: 그렇지. 분수를 더한게 아니라 거리를 더했잖아. 다른동이 들어간거 분수로 쓰긴 했지만 그건 분수 덧셈은 아니야
㉯: 빼기도 군데군데 썼지. 5km 넘으면 빼보기도 하고 그랬으니까
㉰: 그럴 수 있겠다. 곱하기나 나눗셈도 쓴거 아닐까
㉮: 그건 왜? 우리 되돌아오는거? 반만 그린거 때문에?
㉰: 어. 그거 때문에

모둠 발표 과정에서 <모둠 A>는 자신들의 발표 내용을 말하고, 다른 모둠원들의 질문을 받은 뒤 문제에서 다른 '동'(지명 뒤에 붙는 '동')이 조건을 만족하는 것 이상으로 포함되었음을 학급 학생들에게 말해주었다. 또한 왜 반환점을 사용했는지 질문을 받았을 때 방법이 효율적이고 길이 복잡하지 않고 단순해져서 마라톤을 달리는 사람들도 더 편하게 달릴 수 있을 것 같아서, 그리고 조건도 쉽게 만족할 수 있다는 내용을 말하였다. 다른 모둠의 지적 사항에 대해서는 부족함을 인정하는 모습을 보이기도 하였다.

모델 유도활동에서부터 활발해진 의사소통은 탐색활동으로 이어졌으며, 서로 필요한 질문을 제기하면서 서로의 질문에 답을 해나감으로써 발전적인 의사소통 양상을 보여주었다. 다른 모둠의 발표를 지켜보는 단계에서 자신들이 사용한 반환점에 대해 효율적인 방법임에도 다른 모둠들이 사용하지 않은 부분에 대해서는 왜 그러했는지 문제 제기를 하였고 주어진 조건에 맞게 되었는지 수학적 근거를 들 것을 요구하는 모습을 많이 볼 수 있었다. 다른 모둠의 발표 내용에 대해 주로 ㉮학생과 ㉰학생이 다음과 같이 질문하였다.

- "왜 그 지점만 반환점을 사용했나요?"
- "왜 돌아오는 방법을 생각하지 않고 쭉 가는 방법을 생각했나요?"
- "시작과 최대한 가깝게 하라고 했는데 너무 멀지 않나요?"
- "그렇게 코스를 짜면 복잡하고, 저기 코스가 만나는 부분이 있는거 같은데 그러면 사람들끼리 부딪치고 그럴 수 있지 않나요?"

이상의 활동 내용을 근거로 유도활동과 마찬가지로 '말하기'에서 질문, 설명, 표현, 토의 모두 3수준까지, '읽기'는 이 단계에서 나타나지 않아 수준 평가에서 제외하였으며 '듣기'는 이해에서 3수준, 반응에서 1수준을 보였고, '쓰기'는 표상, 표현, 설명 모두 3수준을 나타냈다.

모델 적용활동에서 <모둠 A>는 이전 단계보다는 활발한 논의가 줄어들었으나 모둠원이 반성할 부분에 대해서 논의하고 어떻게 하면 더 좋았었겠는지 다음과 같이 의견을 나누었다.

㉮: 다른 발표 들으니까 다른 모둠도 저번보다는 나은데 우리 모둠이 제일 생각을 많이 한 것 같아
㉯: 그런데 제일 일찍 끝내기도 했어
㉰: <u>시간도 남는데 다른 코스들도 다 계산해서 구해보는 것도 좋았겠다</u>
㉱: 그러면 이유 말할 때 더 확실했을 것 같아
㉮: 응. <u>선생님이 아까 물어보셨을 때 여러 가지 길을 고려하긴 했는데 결국 계산한거는 1개였으니까. 조건에 다 맞아서 더 하지는 않았는데 길이 1개는 아니라 여러개가 될 수 있지</u>
㉰: 근데 다 우리가 동의한거잖아. <u>다른 모둠은 보니까 출발점하고 끝나는 곳이 엄청 먼 데도 있고</u>
㉯: 맞아.
㉮: 이번에는 이유를 말할 때 저번보다 할 말이 있어서 다행이었다는거..
(중략)
㉯: 이제 마라톤 보면 느낌 이상할 것 같아
㉮: 텔레비전에서 국제 마라톤하고 그러잖아. 그것도 마라톤 코스 만들 때 이런 고민을 하고 만드는걸까?
㉰: 마라톤 코스 만드는 데 이런거 고민하는 것도 될 것 같고
㉯: <u>반환점 쓸 수 있는 상황도 더 있을 것 같고..</u>
㉮: <u>여행갈 때? 그 때도 어디 길 다닐까 하잖아</u>
㉰: 근데 <u>여행은 꼭 이 문제처럼 몇분의 몇 안할 거 같은데</u>
㉮: 근데 여행도 미리 어디 갈지 정하잖아. 근데 안정하고 막 돌아다니면 한곳만 엄청 다닐 수 있고.
㉯: 듣고보니 그런데 그래서 어떻게 하겠다는거야?
㉮: 그러니까 만약에 <u>내가 여행을 한 곳만 가는게 아니라 여러 군데 간다고 하면. 여기는 전체의 몇분의 몇 정도, 저기는 몇분의 몇 이렇게 나눠놓고 마라톤 코스 짰던 것처럼 짜보는거지</u>
㉰: <u>반환점은 안쓰고?</u>
㉱: <u>여행이랑 반환점 별로 안맞는거 같은데</u>
㉮: 응 그냥 이것처럼 똑같이 하진 않아도 <u>여행은 많이 돌아다녀야하는거니까 시작점 끝점 같거나 그럴 것도 없고 다음에 여행갈 곳하고 가깝기만 하면 되니까 문제가 조금 바뀐다고 생각하면 되는거지</u>
㉰: 복잡한거 같긴 한데 그럴 듯 하네. 다른건 또 없나
㉱: 오늘 생각을 너무 많이 했더니 힘들다
㉯: 일단 ㉮처럼 코스를 정할 때 쓸 수 있을 것 같아. 마라톤이나 다른거에
㉰: 그러네 다른 것도 좀 더 생각해보자

<모둠 A>는 왜 그러한 결과가 나왔는지에 대해 수학적인 근거나 이유의 중요성을 생각하면서 다른 모둠의 발표 내용을 비교하여 논의를 하였다. 다른 모둠의 발표를 들으면서도 왜 그러한 결과가 나왔는지, 다른 부분은 왜 생각 못했는지, 수학적 근거나 이유가 무엇인지 집중적으로 질문하였다. 적용될 수 있는 다른 상황을 논의할 때에도 주변 상황을 생각하여 논의하였다.

영역별로 살펴보면 '말하기'에서 질문, 설명, 표현, 토의 모두 2수준을 나타냈으며, '읽기'는 수준 평가에서 이전과 마찬가지로 제외하였고 '듣기'는 이해에서 3수준, 반응에서 1수준을 보였다. '쓰기'는 표상, 표현, 설명 모두 2수준을 나타냈다. 전반적으로 첫 번째 모델링 활동과는 의사소통 과정이 다르게 나타났으며, 이전에 모델링 수업에 대한 경험이 문제해결과정 진행에 긍정적으로 작용한 것으로 보였다.

2) <모둠 B>의 의사소통 수준

준비활동에서 <모둠 B>는 문제를 보고 바로 풀기보다는 모둠원들 각자의 생각을 확인하고 가장 좋다고 판단되는 방법을 사용하기 위한 준비를 다음과 같이 시작하였다.

①: 문제에서 중요한 내용 내가 쓸게. 중요하다고 생각하는 거 있으면 말해봐
③: 음 이거
②: 대회가 5km, 10km, 20km고 도착하는 지점이 최대한 시작점과 가깝도록 하는거
①: 이것도 중요한거다. 5km는 빨간색, 10km는 파란색, 20km는 검은색으로 표시해야해
(활동지에 내용을 기록함)
①: <u>문제 풀기 전에 각자 어떤 방법으로 풀면 좋을지 생각하고 말을 해서 가장 좋은 걸로 쓰자</u>

③: 어디에 썼다가 그거 모아놓고 보고나서 정하면 안되?
①: 그렇게 하자
(연습장 등을 찢어서 각자 적고 좋은 방법이라고 생각되는 것을 선택하려고 함)

준비활동 단계에서는 활발한 논의가 이루어지지는 않았으나 문제해결에 앞서 학생들이 서로의 의견을 말해보도록 하는 것은 의사소통을 하고자 하는 하나의 방법으로 볼 수 있기 때문에 이전과는 다르게 나타난 양상이었다. 영역별로 살펴보면 ‘말하기’에서 질문, 설명, 표현은 1수준, 토의는 의견을 말해보는 과정에서 2수준까지 나타났다. ‘듣기’와 ‘읽기’는 이해에서 2수준, 반응은 1수준을 보였으며 ‘쓰기’는 표상, 표현, 설명 모두 1수준을 보여서 첫 번째 모델링 활동과 비교할 때 큰 차이는 없었다.

모델 유도활동에서는 주어진 마라톤 코스를 정하기 위해 여러 코스를 생각해보고 가장 적절하다고 생각하는 코스를 선택해 다음과 같이 계산하였다.

①: 일단 우리가 생각한 것 중에..
③: 나는 이게 좋아
②: 나도 이거 좋은 것 같아
①: 그럼 반환점을 써서 문제를 풀자
③: 근데 반환점이 뭐야?
①: 아 여기까지 가서 똑같이 오는거
③: 아, 그거 좋네
①: 그래야 쉽게 끝나는 곳이랑 시작하는 곳이랑 비슷해지지
②: 그럼 5km부터 구하자. 5km가 5000m니까 여기에 m로 나와있잖아
①: 그러니까 여기에 나와있는 거리 더해서 5000에 가깝게 구하면 되지
(계산기를 이용해서 5km를 구해봄)
③: 근데 이거 5km를 조금 넘어도 되나?
(선생님께 5km를 조금 넘는 경우 5km를 조금 넘게 달려서 끝내도 되냐고 물어봄. 꼭 5km가 맞게 끝이 나야 하며, 화살표가 맞닿는 지점에서 꼭 끝나지 않고 화살표 중간에서도 마라톤이 끝날 수 있음을 공지함)
②: 그럼 여기에서 끝나면 되겠다
①: 일단 계산해볼게. 그럼 길은 어느쪽으로 갈까
②: 복잡하지 않게 갔으면 좋겠어
③: 아래로 내려오는게 안 복잡한 거 같아. 강으로
①: 그러면 이렇게 내려와서..
(구하던 중에 선생님이 다른 길은 고려해보았냐고 물어봄. 이에 대해 다른 쪽으로 가는 길도 생각해봤지만 모둠원이 가장 좋다고 생각한 길로 가서 구했기 때문에 다른 길도 생각해본 것이라고 말함. 이에 대해 다른 길에 대해 충분히 고려한 점이 드러나면 나중에 근거나 이유를 설명할 때 보다 설득력이 있을 것임을 조언하였음)
①: 이거 일단 구해보자
(계산기로 두드려서 구함)
③: 근데 이거 보니까 시작하는 곳이랑 끝나는 곳이 거의 같게 나와서 다른 방법 안 생각해봐도 될 것 같은데? 다른거 해봤자 이게 맞을 것 같아
②: 그러면 나중에 발표할 때 그거 말해줘
①: 알았어. 그럼 10km로 넘어가자
②: 근데 10km는 다른 동이 전체의 3분의 1을 넘어야 한다고 했잖아. 근데 10의 3분의 1은 딱 떨어지지 않는데 어떻게 하지?
①: 그러네 안나눠떨어져. 선생님한테 물어보고올게
(10km의 3분의 1의 경우 나누어떨어지지 않지만 정확히 3분의 1을 사용하는 것이 아니라 3분의 1 이상이므로 3400m 정도 이상을 다른 동이 포함되도록 하며 문제가 없는 것임을 확인하고 자리로 돌아감)
③: 그럼 아까처럼 길을 계산기로 더해서 찾으면 되겠네
(10km 20km도 반환점을 사용하여 5km와 동일한 방법으로 구하였고, 구한 것을 바탕으로 지도에 각 구간별 코스를 그렸음)
①: 음 다 계산하면서 구했고, 처음이랑 끝나는 곳이 비슷하니까 잘 한 것 같아

학생들은 교사가 다른 코스를 살펴볼 것을 언급하였음에도 불구하고 처음 고수한 길이 큰 문제가 없다고 판단하여 다른 길을 구해보지 않았다. 다른 ‘동’이 몇분의 몇 포함되어야 한다는 조건과 관련하여 정확히 얼만큼 포함되었는지 구해보지 않았다. 이렇듯 겉보기에는 합의가 잘된 듯 보이나 지난번과 마찬가지로 <모둠 B>는 ①학생 위주로 의사소통이 진행되었고, 반박과 논의보다는 ①학생이 제시한 바대로 문제를 해결하였다. 의문점이나 문제가 생기는 부분은 학생들 스스로 논의하기보다 교사에게 질문하였다. <모둠 B>는 첫 번째 모델링 활동과 마찬가지로 의사소통이 1인 주도로 이루어지는 경향이 있었으나 모둠원 각자의 의견을 반영해보려는 시도가 나타나기도 하였으며, 수학적인 고려가 미흡하기는 하나 다른 모둠에 비해 주어진 조건을 최대한 충족시키면서 코스를 정했다. 영역별로 살펴보면, ‘말하기’에서 질문, 설명, 표현, 토의는 모두 2수준까지 나타났고, ‘듣기’에서 이해는 2수준, ‘읽기’에서는 1수준을 보였으며 반응은 두 영역 모두 1수준을 보였다. ‘쓰기’는 표상에서 1수준, 표현, 설명에서 2수준까지 나타났다. 첫 번째 모델링의 경우는 문제 초기에만 조금 집중하다가 후반부에는 수학적 고려보다는 ‘적절하게’라는 애매모호한 이유를 근거로 문제를 해결했다면, 두 번째 모델링에서는 수학적으로 문

제를 해결하려고 노력한 점이 보였다.

모델 탐색활동에서 <모둠 B>는 문제에서 사용된 수학적 개념을 열심히 나열하였으나 <모둠 A>처럼 깊게 논의하지는 않았다. 그래도 이상, 반올림 등 수학적 개념을 생각하여 <모둠 A>와는 다른 시각에서 수학적 개념을 찾는 부분도 보였다. 탐색활동에서의 <모둠 B>의 의사소통 양상은 다음과 같다.

②: 우리가 푼거에 사용된거
①: 이번에는 시작 지점과 도착지점이 가깝게 나오도록 계산했고
③: 10km는 삼분의 일이 딱 나눠떨어지는게 아니라서 반올림 같은거? 그렇게 풀었잖아
②: 이상이라는거는 숫자가 더 클 수 있다는 거니까 그것도 개념이라면 개념
①: 맞아. 그리고 계산기로 더했으니까 더하기도 기본적으로 썼고
②: 그럼 잠깐. 반올림, 이상, 더하기 그리고 또?
①: 분수도 쓴거지
③: 소수도 쓴건가?
②: 또?
③: 그 정도인 거 같아
(②학생이 씀)

학생들은 발표를 하는 과정에서 반환점을 사용한 이유를 앞선 <모둠 A>와 비슷하다는 점을 설명하고, 다른 '동'이 몇분의 몇 포함되었는지에 대해서 계산은 하였으나 정확히는 활동지에 기록하지 않아 <모둠 A>처럼 말할 수 없다고 대답하였다. 모둠 내에서는 이전 모델링 활동과 마찬가지로 갈등 없이 합의만 이루어졌기에 보다 정교한 활동의 완성이 이루어지지는 못하였다. 영역별로 살펴보면, '말하기'에서 질문, 설명, 표현, 토의는 2수준까지 나타났으며 '읽기'는 나타나지 않아 분석에서 제외하였다. '듣기'에서 이해, 반응 모두 1수준을 보였으며 '쓰기'는 표상, 표현, 설명에서 2수준을 나타냈다.

모델 적용활동에서는 발표 후에 자신들의 활동을 반성하면서 수학적인 고려가 부족했던 부분을 논의하였다. 왜 그러한 결과가 나왔는지 수학적 근거나 이유를 다시 생각해보았고, 조건에 맞는 것임을 다음과 같이 다시 확인하였다.

①: 이번에 저번보다 좀 쉽다고 생각했나봐
③: 나도 좀 그렇게 생각했어. 계산기만 더하면 된다고 생각해서
②: 3모둠처럼 우리도 한 건데 활동지에 잘 안써서 그래
①: 분수써서 금방 할 수 있었을텐데
③: 그리고 다른 길도 좀 해볼걸 그랬나 발표할 때 저번만큼은 아닌데 이유가 좀 부족한거 같았어
①: 응. 일단 3모둠처럼 몇분의 몇인지 말을 안하니까 좀 그랬어
②: 응
③: 쉬운게 없네 어렵다
①: 그래도 저번보다는 나은 것 같은데
②: 그렇긴 한데 잘한다고 생각해도 발표하면 좀 다른 것 같아
①: 그래도 조건에 맞게 했잖아. 다음에는 이런거 더 생각하면 되지
(중략)
①: 몇분의 몇 하니까 음식 만드는거 생각나네 재료 얼만큼 넣으라는거
②: 이거랑 하나도 안비슷한거 같은데
③: 몇분의 몇이 비슷하다는거 아냐?
①: 응. 이분의 일 숟갈 뭐 이런거 없나? 냄비의 몇분의 몇 그런거 하잖아
②: 마라톤 코스랑 같은 것 같지는 않은데 분수는 그렇게 생각할 수도 있겠네
③: 또 뭐 없나?
②: 그림을 그릴 때? 색을 몇분의 몇은 어떤 색 이런거 칠하면?
①: 마라톤이랑 비슷한가?
②: 너가 몇분의 몇 해서 그런건데.. 너가 말한거랑 비슷하지 않나?
③: 그런 식으로 생각하면 진짜 많겠는데?
①: 마라톤 아니라도 길 뭐 어디 가는거 있으면 쓸 수 있겠지
②: 몇분의 몇이면 쓸 수 있는거 많지.

처음에는 모둠 나름대로 학생들의 의견을 파악하여 가장 좋은 대안을 선택함으로써 모둠 활동을 매끄럽게 수행하려 하였으나 결국 1인 주도로 문제 해결을 하였고, 발표를 하는 상황을 염두에두고 수학적 이유와 근거를 보다 확실히 제시했어야 했는데 그러한 부분을 소홀히 다루었던 점이 관찰되었다. 적용될 수 있는 다른 상황을 논의할 때에도 몇분의 몇과 관련된 분수 상황에 대해서 우리 생활 주변의 여러 상황을 생각해보았다.

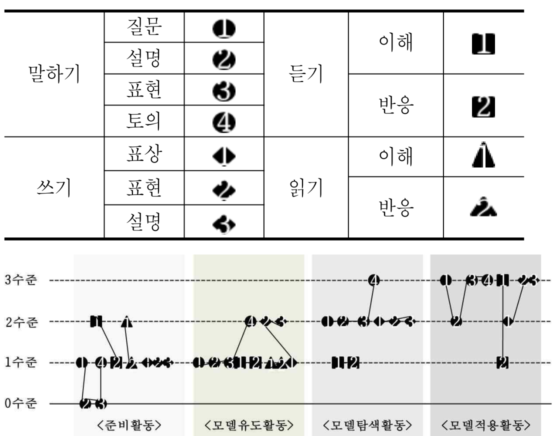
<모둠 B>는 1인 주도로 진행되던 의사소통이 모둠별 발표 이후 다른 모둠원들의 참여가 이루어졌으나 여전히 ①학생 위주로 대화가 진행되었다. 영역별로 살펴보면 '말하기'에서 질문은 3수준까지, 설명, 표현, 토의는 2수준을 보였으며 '읽기'는 이전과 마찬가지로 제외하였다. '듣기'는 이해에서 3수준, 반응에서 1수준을 보였으며 '쓰기'는 표상, 표현, 설명 모두 2수준을 보였다.

3. 두 모둠의 의사소통 수준 양상

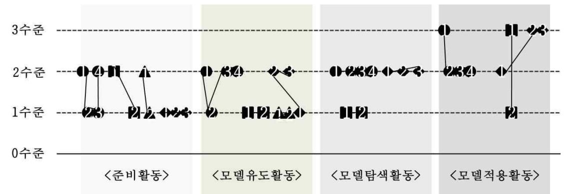
본 연구에서 수학적 모델링 과제인 <신호등 과제> 학습이 이루어지는 동안 6개 모둠의 학생은 주어진 문제 상황을 살펴보고, 모델을 형성하여 개발한 모델을 바탕

으로 문제를 해결하려 하였다. 이 과정에서 모둠원 각자 이전에 학습한 수학적 개념과 지식을 바탕으로 주어진 상황과 연결하려는 시도가 있었고, 끊임없는 의사소통이 이루어졌다. 학생들은 이 과제를 보고 해결해야 할 과제가 주어진 도로 상황에서 차가 신호등 시간을 고려하여 최대한 막힘없이 지나갈 수 있는 시간을 설정하는 것임을 파악하였고, 해결을 위해 도로의 모양, 신호등의 시간 조건 등 정보들을 수집하였다. 이를 바탕으로 문제해결 계획을 세우고 계산기를 활용하여 문제 해결에 필요한 연산을 수행하였으며, 해결과정을 프리젠테이션 자료로 만들어 공유하였다. 또한 자신들이 수행한 과제를 적용할 수 있는 다른 사례도 탐구해보았다.

이와 같은 일련의 과정을 통해 <신호등 과제>를 해결하는 동안 다른 모둠과 비교할 때, 비교적 높은 의사소통 수준을 보인 모둠은 <모둠 A>와 <모둠 B>였고, 두 모둠은 모델링 수업의 각 단계에서 [그림 7], [그림 8]과 같은 의사소통 수준을 보였다. 다음의 [그림 7], [그림 8]을 살펴보면 <모둠 A>는 활동 초기에 대체로 1수준의 의사소통을 보이다가 후반에는 2~3수준의 의사소통을 나타내었고, <모둠 B>는 초기에 1~2수준으로 시작해서 후반에도 별 차이 없이 2수준 정도의 의사소통을 보였다.



[그림 7] <모둠 A>의 의사소통 수준(신호등 문제)
[Fig. 7] <Group A> communication level(traffic light problem)

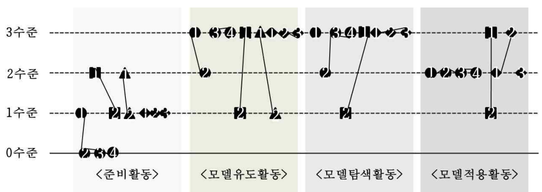


[그림 8] <모둠 B>의 의사소통 수준(신호등 문제)
[Fig. 8] <Group B> communication level(traffic light problem)

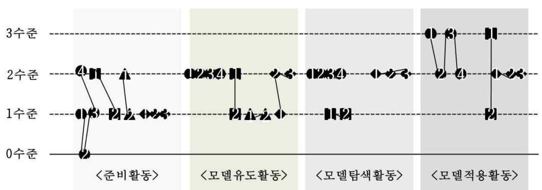
첫 번째 과제에 이어 두 번째 과제인 <마라톤 문제>를 해결하는 동안 <모둠 A>와 <모둠 B>는 다음 [그림 9], [그림 10]과 같은 의사소통 양상을 보였다.

이를 살펴보면, <모둠 A>의 경우 모델유도활동부터 대체로 3수준의 활발한 의사소통을 보였고, 모델적용활동에서는 의사소통이 약간 주춤하여 2수준을 보였다. <모둠 B>는 활동 초기에는 1~2수준, 활동 중반에는 대체로 2수준을 보였으며, 활동 후반에 2~3수준을 보였다. <마라톤 문제>를 푸는 동안 모델링의 각 단계에서 모든 모둠의 학생들이 <신호등 문제>보다는 모델링에 대한 경험으로 인해 이전보다 더 활발히 참여하여 문제를 해결하려 하였다. 학생들은 수학적 근거나 이유에 중요성을 두고 자신들이 찾은 방법에 대해 수학적 근거를 어떻게 설명할지 논의하고 기록하였다. 소통이 활발하다보니 활동에 흥미를 느끼는 학생도 이전 모델링 활동보다 늘어났다. <모둠 B>는 모델유도활동에서 <신호등 문제>에서의 <모둠 A>와 같은 모습을 보였다. 겉보기에는 큰 문제없이 합의된 듯하나 성취도가 높은 한 학생 위주로 의사소통이 진행되어 한 학생이 주도하는 대로만 진행되고 의문이나 반박이 제시되지 않았다. 전반적으로 의사소통이 1수준에서 2수준의 형태로 나타났다. 그래도 <마라톤 문제>에서 달라진 점은, <신호등 문제>에서는 문제 해결 초기에 수학적 근거를 찾아보려 시도하여 전반적으로 애매모호하게 '적절하게'구했다는 결론을 내놓은 것과는 달리, <마라톤 문제>에서는 주어진 조건을 만족하는 결과를 수학적으로 제시하기 위해 노력하려 하였다.

말하기	질문	❶	듣기	이해	
	설명	❷			
	표현	❸		반응	
	토의	❹			
쓰기	표상		읽기	이해	
	표현			반응	
	설명				



[그림 9] <모둠 A>의 의사소통 수준(마라톤문제)
[Fig. 9] <Group A> communication level(marathon problem)



[그림 10] <모둠 B>의 의사소통 수준(마라톤문제)
[Fig. 10] <Group B> communication level(marathon problem)

학생들은 전반적으로 첫 번째 모델링 활동을 인지하였기 때문에 두 번째 모델링 활동에서는 이전보다 더 수학적인 이유를 찾아보려고 노력하였다. 그럼에도 불구하고 이전 활동과 비교해볼 때 의사소통 수준에서 긍정적인 변화를 보인 <모둠 A>와는 달리 <모둠 B>는 <모둠 A>를 제외한 다른 4개 모둠의 수행보다는 나았으나, <모둠 B>자체로 볼 때에는 두 모델링 수업 사이 간 의사소통 수준에 큰 변화가 없는 것으로 나타났다. 또한 의사소통의 방향성에 있어 1인 주도로 의사소통이 이루어지고 이에 대해 아무런 반박이 없는 경우 사고 과정의 발전성이 약하며 수학성취가 부족한 학생이라도 의사소통에 적극적으로 참여할 때 모둠의 활동 결과가 더 좋게 나타나는 것을 볼 수 있었다.

이상의 각 모델링 단계에서 의사소통 양상을 살펴보았는데, 대체로 준비단계에서는 의사소통 수준이 낮게 나타나고 모델유도활동부터 의사소통 수준 변화가 있었다. 이는 준비단계가 주어진 정보를 받아들이는 활동이 주가 되고, 모델유도활동에서부터 문제 해결 방법을 찾기 위한 논의가 계속 이어지기 때문으로 볼 수 있다. 문제 해결 시 성취도가 높은 한 학생의 주도로 문제 해결이 이루어지는 것보다는 성취도가 고루 퍼져있어도 여러 학생들이 서로 의문점을 공유하고 대안을 찾아가는 것이 해결을 더욱 수월하게 하며 해결방안을 공유하는 자리에서도 수학적 근거를 가지고 자신감 있는 태도로 결과를 제시할 수 있는 것으로 나타났다. 또한 한 학생의 주도로 이루어지던 모델링 활동도 모둠별 발표 후 의사소통의 양상이 바뀌는 경우가 많았는데, 이는 발표 후 의문점에 대해 질문하고 답하는 과정에서 한 학생의 주도로 이루어진 방법이 이전에는 당연히 맞고 완벽할 것이라는 판단이 잘못되었다는 것을 생각한 뒤에 성취도가 낮은 학생들도 의사소통에 참여하여 의문점을 제기하는 것으로 보였다. 평소 학생들은 교과서 문제만 접할 경우 맞고 틀리는 것에만 신경을 써서 점수가 높게 나오는 학생들의 판단만 믿는 경향이 있었다. 하지만, 학생들에게 인지적인 갈등 상황을 제시하고 논의할 거리를 주는 것, 그리고 서로의 생각에 반박하고 질문하고, 의문점을 제시하고 답하는 과정에 대한 기회 제시가 의사소통의 진전을 위해 매우 중요한 것임을 파악할 수 있었다. 모델링 과제는 그러한 면에서 학생들에게 인지적 갈등의 경험을 제공했다고 볼 수 있겠다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 5학년 수와 연산 영역 내용을 수학적 모델링을 적용하여 그 과정에서 나타나는 초등학생의 수학적 의사소통을 분석하였다. 모델링 학습단계에 따라 의사소통의 수준과 사례를 살펴보았으며, 총 6개의 모둠 중 <모둠 A>와 <모둠 B>를 선정하여 보다 면밀히 분석하였다.

수학적 모델링에서 나타나는 의사소통과 관련하여 <신호등 문제>에서 <모둠 A>는 모델유도활동에서부터 의사소통이 시작되었으나 성취도가 높은 한 학생의 주도로 의사소통이 전반적으로 1수준을 보였다. 모델탐색활동에서 모둠별 발표 이후 해결 과정에서 잘못된 점을 인

식한 이후 모둠원이 모두 참여하는 양상으로 의사소통이 2~3수준으로 나타났다. <모둠 B>는 모델유도활동에서 자신들이 생각하는 수학적 근거를 만들어내기위한 토의 과정에서 2~3수준의 의사소통을 보였으나 활동이 진행될수록 문제가 어렵다고 판단하여 의사소통이 잘되지 않았고, 문제해결결과가 수학적으로 유의미하지 않았다. <모둠 A>와 마찬가지로 모둠별 발표 이후 모둠원들의 참여가 이루어지면서 2~3수준의 의사소통을 보였다.

<마라톤 문제>에서 <모둠 A>는 이전 모델링 경험을 떠올리며 모둠원들이 활발히 참여하여 모델유도활동과 탐색활동에서 2~3수준의 의사소통을 보인 반면, <모둠 B>는 이전과 의사소통 양상이 크게 다르지 않았다. 의견을 공유하려는 시도는 했으나 결국 한 학생의 주도로 의사소통이 이루어지는 바람에 모든 모델 활동에서 2수준을 넘지 않는 의사소통을 보였다.

첫 번째와 두 번째 의사소통 수준을 통합적으로 살펴볼 때, 두 모델링 학습 과정을 겪으면서 모든 모둠이 이전보다 의사소통 수준이 향상된 것으로 나타났다. 특히 <모둠 A>는 이전 경험에 근거하여 문제를 해결할 때 수학적 근거와 이유를 찾기 위해 의사소통이 활발했다. 첫 번째 모델링 과정에서 모든 학생들이 이전에 경험하지 못했던 형태의 문제여서 혼란스럽고 어려움이 있었다면 두 번째 모델링 활동에서 학생들은 이미 진행 방향을 알고 있었기 때문에 모둠원이 어떤 역할을 해야 하고, 진행을 어떻게 해야 하는지 파악하여 서로 의견을 제시하려고 노력하였다. 물론 모든 학생이 똑같은 정도의 변화를 느낀 것은 아니지만, 일부 학생들은 수학을 좀 더 깊이 알게 된 것 같다는 정의적 영역에서의 긍정적인 영향도 보여주었다.

이러한 결과는 본 연구에서 실시된 수학적 모델링 학습이 학생들에게 수학적 의사소통의 경험을 제공함으로써 수학적 의사소통 수준과 형태의 발달에 의미 있는 영향을 미쳤음을 의미한다. 이는 우리나라 학생들이 수학적 의사소통 능력이 요구되는 문항에 많이 취약하다는 보고서(김경희, 2010b)에도 나타나듯이 학생들이 의사소통을 경험하는 자체에 많은 어려움이 있으며(김선희 외, 2002; 방정숙, 정희진, 2006; 오영열, 오태욱, 2009; 이종희 외2002; 이혜영, 2005), 앞으로 2007개정(교육과학기술부, 2008) 및 2009개정교육과정(교육과학기술부, 2009)에서 요구하는 수학적 능력 신장을 위해 본 연구에서 제시한 수학적 모델링과 같은 형태의 프로그램 개발과 보급이 이루어져야 실질적인 의사소통 능력의 신장이 가능할 것이다.

이상의 본 연구의 결과에 대한 수학교육 주는 시사점은 다음과 같다.

먼저, 수학적 의사소통이 다른 수학적 능력과 크게 연결되기에 의사소통에 대한 경험이 충분히 주어져야 할 것이다. 현재 수학교육과정에서 강조하고 있는 수학적 힘의 신장, 수학적 능력의 신장을 위해서는 의사소통의 경험이 기초가 되어야 가능하며 나아가 수학 수업에서 수학적 모델링이 적용된 활동을 통해 학생들이 실생활의 여러 상황을 수학적으로 해석하고 해결하는 과정 속에서 다른 학생들과 서로 지닌 수학적 지식을 여러 형태로 공유할 필요가 있다.

다음으로, 학생들이 복잡한 문제 상황을 처음 접하면서 어려움이 많았기에, 복잡성에 익숙할 수 있도록 여러 활동 모델을 연구하고 개발할 필요가 있다. 본 연구의 대상인 초등학교 5학년에게 수학적 의사소통의 과정은 쉽지 않은 과정이었다. 교육과정에서 수학적 능력과 힘을 강조하고 있으나 교과서에 제시된 문제와 수업만으로는 학생들이 실생활과 관련한 복잡한 문제를 받았을 때 매우 혼란스러워하고 어려움을 나타냈다. 이는 교육과정에서 강조되었던 것이 실제 현장에 반영되지 못한 것을 나타내며, 이는 실질적으로 수학적 의사소통을 길러 줄 수 있는 활동 모델의 개발을 필요로 하는 것이다.

마지막으로, 학생들이 모델링 과정에서 보인 양상에 대해 보다 깊은 관심과 논의가 필요할 것이다. 본 연구 결과에서 학생들은 수학적 의사소통의 변화를 보였다. 본 연구에서 학생들은 정해진 하나의 해결방법이 아니라 주어진 조건을 최대한 만족시키는 방안을 찾기 위해 여러 방법을 여러 형태로 공유하고 논의하면서 가장 적합하다고 생각하는 방안을 제시하였다. 수학적 모델링 문제해결과정에서 나타나는 이와 같은 의사소통 및 상호작용 양상에 대해 앞으로 보다 깊이 있는 관심과 논의가 필요할 것이다.

이러한 여러 시사점을 바탕으로 학교 현장에서 수학적 모델링을 적용할 수 있는 문제 상황 제시와 함께 모델링을 적용함으로써 신장시킬 수 있는 다른 분야의 고

차적인 사고 능력에 대한 연구가 필요할 것이다. 본 연구는 수학적 의사소통을 경험하도록 한 데에는 의미가 있으나 대상의 수가 적고, 기간도 짧아 결과를 일반화하기위해서는 대상의 확대와 보다 장기간의 후속연구가 요구된다. 또한 본 연구에서는 학생들 간의 의사소통만을 고려하였을 뿐 교사와 학생간의 의사소통은 고려하지 않았다. 모델링 학습 과정에서 교사의 역할도 학생들의 학습에서 중요한 부분을 차지한다고 생각할 때, 이에 대한 연구도 필요할 것으로 보인다. 그리고 초등학교 수학 교과서에 실생활 관련 문제가 포함되어야 할 것이다. 이전 교과서에 비해 실생활과 관련지으려는 노력은 많이 엿보이나 학생들의 사고를 공유하는 형태의 문항은 부족하며, 교사들도 이러한 형태의 수업을 꺼리는 실정이다. 중등뿐만 아니라 초등에서도 모델링 학습이 충분히 적용될 수 있다는 점(김민경, 2010)에서 교육과정에서 모델링과 같은 학습을 포함하여 수학적 능력 신장에 힘써야 할 것이다. 끝으로, 평가의 변화가 필요한데, 기록이 학생의 사고를 나타내는 의사소통의 한 과정이라고 할 때, 단순히 계산만 나열한다거나 답만 쓰도록 하는 평가 방식에서 의사소통 능력의 변화를 기대하기는 힘들다. 기록, 말하기 등 다양한 평가 방식을 사용하여 학생 개인의 능력을 파악하고 후속 학습에 활용하여 학생들의 능력을 발전시킬 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설(IV), 서울: 대한교과서 주식회사.

Ministry of Education, Science and Technology. (2008). *Elementary school curriculum explanation(IV),* Seoul: Daehan textbook.

교육과학기술부 (2009a). 수학 6-가, 서울: ㈜두산.

Ministry of Education, Science and Technology. (2009a). *Elementary mathematics 6-ga,* Seoul: Doosan.

교육과학기술부 (2009b). 초등학교 교육과정 해설, 국가교육과정정보센터(http://ncic.re.kr/)

Ministry of Education, Science and Technology. (2009b). *Elementary school curriculum explanation,* http://ncic.re.kr

교육부 (1997). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ), 서울: 대한교과서.

Ministry of Education. (1997). *Elementary school curriculum explanation(IV),* Seoul: Daehan textbook..

교육인적자원부 (2007). 초등학교 교육과정, 교육인적자원부.

Ministry of Education & Human Resources Development. (2007). *Elementary school curriculum,* Seoul: Ministry of Education & Human Resources Development.

권기석, 박배훈 (1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 수학교육 36(2), 149-159.

Kwon, G. S., & Park, B. H. (1997). A study on the use of mathematical modeling in high school, *The Mathematical Education 36*(2), 149-159.

김경희 (2010a). OECD 학업성취도 국제비교 연구(PISA 2009) 결과 보고서, 서울: 한국교육과정평가원.

Kim, K. H. (2010a). *The programme for international students assessment(PISA 2009) results,* Seoul: KICE

김경희 (2010b). 수학·과학 성취도 추이변화 국제비교 연구(TIMSS 2011) 예비검사 시행보고서, 서울: 한국교육과정평가원.

Kim, K. H. (2010b). *A technical report of the field survey in Korea = The trends in international mathematics and science study(TIMSS 2011),* Seoul: KICE

김민경 (2004). 현실적인 문장제에 관한 초등학생의 반응 분석, 학교수학 6(2), 135-151.

Kim, M. K. (2004). Children's realistic response on realistic word problems, *School Mathematics 6*(2), 135-151.

김민경 (2010). 수학적 모델링: 초등수학 중심으로, 서울: 교우사.

Kim, M. K. (2010). *Mathematical modeling in the elementary school curriculum,* Seoul: kyowoosa.

김민경, 민선희, 강선미 (2009). 초등교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구, 학교수학회논문집 12(4), 411-431.

Kim, M. K., Min, S. H., & Kang, S. M. (2009). A survey of the elementary teachers' perception and the status about mathematical modeling, *The Korean School Mathematics Society 12*(4), 411-431.

김민경, 홍지연, 김은경 (2009). 수학적 모델링 사례 분석을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구, 수학교육 48(4), 365-385.

Kim, M. K., Hong, J. Y., & Kim, E. K. (2009). Exploration of teaching method through analysis of cases of mathematical modeling in elementary mathematics, *The Mathematical Education 48*(4), 365-385.

김민경, 홍지연, 김혜원 (2010). 수학적 모델링 적용을 위한 문제상황 개발 및 적용, 수학교육 49(3), 313-328.

Kim, M. K., Hong, J. Y., & Kim, H. W. (2010). A study on development of problem contexts for an application to mathematical modeling, *The Mathematical Education 49*(3), 313-328.

김상화 (2010). 초등학교 수업에서 수학적 의사소통의 목표설정 및 지도의 실제. 박사학위논문, 한국교원대학교.

Kim, S. H. (2010). *Standards and practices for promoting mathematical communication in elementary classrooms.* Unpublished doctoral dissertation, Korea National University of Education.

김선희 (1998). 의사소통 지도가 수학 학습에 미치는 효과. 석사학위논문, 이화여자대학교.

Kim, S. H. (1998). *Effects of communication learning mathematics.* Unpublished master's thesis, Ewha Womans University.

김홍희 (2009). 초등 수학영재학급 학생의 수학적 모델링 과정에 관한 분석. 석사학위논문, 경인교육대학교.

Kim, H. H. (2009). *Analysis of the mathematical modeling process of mathematically gifted elementary schoolers.* Unpublished master's thesis, Gyeongin National University of Education.

박경미 (2004). 학업 성취도 국제 비교 연구에 나타난 우리나라 학생들의 수학 성취도 심층 분석, 수학교육학연구 14(4), 87-401.

Park, K. M. (2004). An in-depth analysis of the result of the international comparative study of mathematics, *The Journal of Educational Research in Mathematics 14*(4), 87-401.

박경미, 김동원 (2011). 우리나라 수학교육의 문제점 진단을 위한 조사 연구, 수학교육 50(1), 89-102.

Park, K. M., & Kim, D. W. (2011). A survey research to diagnose the problems of mathematics education in Korea, *The Mathematical Education 50*(1), 89-102.

방정숙, 정희진 (2006). 학습자 중심 교수법에 대한 초등교사의 이해와 실행형태: 수학적 의사소통을 중심으로, 학습자중심교과교육연구 6(1), 297-321.

Pang, J. S., & Jeong, H. J. (2006). Elementary school teachers' understanding and practice on learner-centered instruction: focused on mathematical communication, *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction 6*(1), 297-321.

신성기 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 수학적 의사소통 수준. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Shin, S. K. (2009). *An analysis of elementary school 6th grade students' mathematical communicative level.* Unpublished master's thesis, Korea National University of Education.

신은주, 권오남 (2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구, 수학교육학연구 11(1), 157-177.

Shin, E. J., & Kwon. O. N. (2001). A study of exploration-oriented mathematical modeling, *The Journal of Educational Research in Mathematics 11*(1), 157-177.

신은주, 이종희 (2004). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구, 수학교육학연구 14(4), 403-419.

Shin, E. J., & Lee, C. H. (2004). An analysis of metacognition on the middle school students' modeling activity, *The Journal of Educational Research in Mathematics 14*(4), 408-419.

오영열, 오태욱 (2009). 동료 피드백을 활용한 수학적 의사소통이 수학 학습에 미치는 효과, 한국수학교육학회지 23(2), 327-347.

Oh, Y. Y., & Oh, T. W. (2009). The effects of mathematical communication-centered teaching using peer feedback on mathematics learning, *Communication of Mathematical Education 23*(2), 327-347.

유현주 (2000). 수학적 의사소통과 수학의 교수-학습, 학교수학 2(1), 53-72.

Yu, H. J. (2000). Mathematical communication and mathematics learning-teaching, *School Mathematics 2*(1), 53-72.

이미애, 김수환 (2001). 초등학교 수학 수업에서의 구체물 활용과 수학적 의사소통에 관한 연구, 한국초등수학교육학회지 5, 99-120.

Lee, M. A., & Kim, S. H. (2001). A study of using concrete materials and mathematical communications in the primary mathematics class, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 5*, 99-120.

이종희, 김선희 (2002). 수학적 의사소통의 지도에 관한

실태조사, 학교수학 4(1), 63-78.

Lee, C. H., & Kim, S. H. (2002b). Investigation of present state for teaching mathematical communication, *School Mathematics 4*(1), 63-78.

이종희, 김선희, 채미애 (2001). 수학적 의사소통 능력의 평가 기준 개발, 수학교육학연구 11(1), 207-221.

Lee, C. H., Kim, S. H., & Chae, M. A. (2001). The assessment rubric development of mathematical communication ability, *The Journal of Educational Research in Mathematics 11*(1), 207-221.

이종희, 최승현, 김선희 (2002). 수학적 의사소통을 강조한 수학 학습 지도의 효과, 수학교육 41(2), 157-172.

Lee, C. H., Choi, S. H., & Kim, S. H. (2002). Effects of mathematics instruction that emphasize the mathematical communication, *The Mathematical Education 41*(2), 157-172.

이해영 (2005). 초등학교 5, 6학년 교사들의 수학적 의사소통 수업에 대한 인식과 교수의 실제. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Lee, H. Y. (2005). *5th and 6th-grade teachers' perception of mathematical communication and their teaching practice.* Unpublished master's thesis, Korea National University of Education.

전상림 (2008). 수학적 모델링 지도가 학업 성취도에 미치는 영향. 석사학위논문, 강원대학교.

Jun, S. L. (2008). *The effect of the mathematical modeling instruction on mathematical learning accomplishment.* Unpublished master's thesis, Kangwon National University.

정유리 (2010). 수학적 모델링을 활용한 수업이 학업성취도에 미치는 효과. 석사학위논문, 강원대학교.

Jung, Y. R. (2010). *The effects of mathematical modeling on learning performance.* Unpublished master's thesis, Kangwon National University.

조영준, 신항균 (2010). 초등학교 수학교실에 나타난 수학적 의사소통 유형 분석, 한국초등수학교육학회지 14(3), 681-700.

Cho, Y. J., & Shin, H. K. (2010). Analysis of pattern of mathematical interaction occurring in the elementary school mathematics class, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14*(3), 681-700.

최인숙 (1998). 수학 학습 과정에서 일지 쓰기의 효과에 관한 연구. 석사학위논문, 이화여자대학교.

Choi, I. S. (1998). *Effects of journal writing as a communication in learning mathematics.* Unpublished master's thesis, Ewha Womans University.

한국교육과정평가원 (2004). 교사, 수업, 그리고 학생 성취: TIMSS 1999 결과를 중심으로, 서울: 선명인쇄주식회사.

Korea Institute for Curriculum and Evaluation(KICE). (2004). *Teacher, lesson, and student achievement: Focused on TIMSS 1999 results,* Seoul: Sunyung Publishers.

한국교육과정평가원 (2007). PISA 2006 결과 분석 연구: 과학적 소양, 읽기 소양, 수학적 소양 수준 및 배경 변인 분석, -연구보고 RRE 2007-1.

Korea Institute for Curriculum and Evaluation(KICE). (2007). *The results from PISA 2006,* Research report RRE 2007-1.

홍우주, 방정숙 (2008). 초등학교 6학년 수업에서의 수학적 의사소통과 학생의 수학적 사고 분석, 학교수학회 논문집 11(2), 201-219.

Hong, W. J., & Pang, J. S. (2008). An analysis of teacher-student communication and students' mathematical thinking in sixth grade mathematics classrooms, *Journal of the Korean School Mathematics Society 11*(2), 201-219.

홍정희, 송순희 (1995). 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구수업 효과의 고찰, 수학교육 34(1), 93-96.

Hong, J. H., & Song, S. H. (1995). Consideration of effect of mathematical inquiry learning with the application of mathematical modeling, *The Mathematical Education 34*(1), 93-96.

홍지연 (2007). 수학적 모델링을 활용한 수업이 초등학교 4학년 수와 연산 학습에 미치는 효과. 석사학위논문, 이화여자대학교.

Hong, J. Y. (2007). *Effect of the instruction using mathematical modeling elementary school's 4th graders' learning of numbers and operations in elementary school.* Unpulished master's thesis, Ewha Womans University.

Adams, T. (2003). Reading mathematics: More than words can say, *The Reading Teacher 56*(8), 786-795.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glaserfeld (ED.), *Radical constructivism in mathematics education* (89-110). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Boaler, J. (2001). Mathematical modeling and new theories of learning, *Teaching Mathematics and Its Application 20*(3), 121-127.

Bransford, J. D., Zech, L., Schwartz, D., Barron, B., Bye, N., & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt University (1996). Fostering mathematical thinking in middle school students: Lessons from research. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of mathematical thinking* (203-250). NJ: Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: An integrated instructional approach to the concept of force, *International Journal of Science Education 19*(3), 265-282.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students′ mathematical reasoning about data, *Journal for Research in Mathematics Education 34*(2), 110-136.

English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective, *Educational Studies in Mathematics 54*, 225-248.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children′s construction of a consumer guide, *Educational Studies in Mathematics 63*, 303-323.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005a). Mathematical modeling in the early school years, *Mathematics Education Research Journal 16*(3), 58-79.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005b). Mathematical modeling with 9-year-olds. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2* (.297-304). Melbourne: PME.

Freudenthal. H. (1991). *Revisiting mathematics education,* Dordrecht: Kluwer.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing, communicating, and mathematizing* (361-383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In H. M. Doerr & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (.3 - 58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers, *Mathematical Thinking and Learning 5*(2), 109-130.

Lesh, R., Middleton, J. A., & Caylor, E. (2008). A science need: Designing tasks to engage students in modeling complex data, *Educational Study Math 68*, 113-130.

Llinares, S., & Roig, A. I. (2008). Secondary school students′ construction and use of mathematical models in solving word problems, *International Journal of Science and Mathematics Education 6*, 505-532.

Middleton, J. A., Lesh, R., & Heger, M. (2003). Interest, identity, and social functioning: Central features of modeling activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum,* Reston, VA: Author

National Council of Teachers of Mathematics (2000).

Principles and standards for school mathematics, Reston, VA: Author.

Niss, M. (1989). Aims and scope of application and modeling in mathematics curriculum. In W. Blum, J. S. Berry et al. (Eds.), *Applications and modeling in learning and teaching mathematics* (22-31). Chichester, UK: Elis Horwood Limited.

Open University (1990). Some approaches to modeling. In D. Blane & M. Evans (Eds.), *Mathematical modeling of the senior years* (43-55). Parkville: Acacia Press.

Skovsmose, O. (1994). *Toward a philosophy of critical mathematics education,* Dordrecht: Kluwer Academic.

Swetz, F. (1991). Incorporating mathematical modeling into the curriculum, *Mathematics Teacher 82*(9), 722-726.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: A resource guide of classroom exercises,* Reston, VA: NCTM.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders, *Journal for Research in Mathematics Education 28*(5), 577-601.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective teachers' use of computing tools to develop and validate functions as mathematical models, *Journal for Research in Mathematics Education 29*(2), 184-201.

A study on the communication in process of applying mathematical modeling to children in elementary mathematics classroom

Ji Young Lee
Department of Elementary Education, Ewha Womans University Graduate School
roana@naver.com

Min Kyeong Kim†
Department of Elementary Education, Ewha Womans University
mkkim@ewha.ac.kr

The purpose of this study is to investigate elementary students' communication in process of applying mathematical modeling. For this study, 22 fifth graders in an elementary school were observed by applying mathematical modeling process (presentation of problem → model inducement activity → model exploration activity → model application activity). And the level of their communication with their activity sheets and outputs, observation records and interviews were also analyzed. Additionally, by analyzing the activity cases of <Group A> and <Group B>, this study researched that what is a positive influence on students′ communication skills. Whereas <Group A> showed significant advance in the level of communication, <Group B> who communicated actively on speaking area but not on every areas showed insensible changes. To improve communication abilities, cognitive tension and debate situation are needed. This means, mathematical education should continuously provide students with mathematical communication learning, and a class which contains mathematical communication experiences (such as mathematical modeling) will be needed.

* ZDM classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Mathematical modeling, Mathematical communication, Modeling process, Number and operation
† The corresponding author

<부록 1> 본 연구에 사용된 수학적 의사소통 분석 기준

<Appendix 1> Analysis criteria of mathematical communication in this study

의사소통 구분		의사소통 수준
1. 말하기	1-A. 질문	0수준: 질문을 하지 않거나 문제 해결과 전혀 관련 없는 질문을 함 1수준: 문제와 관련은 있으나 질문의 수준이 낮아 문제 해결에 큰 도움이 되지는 않음 2수준: 문제와 관련 있고 수학적 개념이나 지식이 요구되는 질문을 하나 내용이 불분명함 3수준: 문제와 관련이 있고, 문제 해결에 필요한 수학적 개념이나 지식과 관련된 질문을 하며 질문의 내용이 비교적 분명하고 모호하지 않음
	1-B. 설명	0수준: 타인에게 설명을 전혀 하지 않거나 문제 해결과 전혀 관련 없는 이야기를 함 1수준: 문제와 관련은 있으나 수학적 개념이나 지식과 연결지어 설명을 하지 못함 2수준: 문제와 관련 있고 수학적 개념이나 지식이 요구되는 설명을 타인에게 시도하나 불완전함 3수준: 문제와 관련이 있으면서도 문제 해결에 필요한 수학적 지식이나 개념을 분명하게 설명함
	1-C. 표현	0수준: 타인에게 자신의 수학적 지식을 전혀 전달하지 않음 1수준: 문제와 관련은 있으나 수학적 개념이나 지식을 연결지어 표현하지 못함 2수준: 문제와 관련 있고 수학적 개념이나 지식이 요구되는 내용을 바탕으로 표현할 수 있으나 불완전함 3수준: 문제와 관련이 있으면서도 문제 해결에 필요한 수학적 지식이나 개념을 포함하여 표현할 수 있음
	1-D. 토의	0수준: 서로 문제해결과 관련한 이야기를 나누지 않고 개별적인 논의만 함 1수준: 문제해결과 관련한 논의를 하나 수학적 개념이나 지식을 수학적으로 논의하지 못하고 계속 겉돌기만 하여 문제해결의 진척이 없음 2수준: 문제해결과 관련한 논의를 통해 수학적 개념이나 지식을 이끌어내지만 1인 주도로 토의가 진행되어 토의 과정에서의 갈등이 나타나지 않음 3수준: 문제해결과 관련한 논의를 진행하면서 상대방의 의견을 반박하고 갈등 구조가 나타나면서 문제해결 과정에서의 내용 반성이 수시로 일어남
2. 듣기	2-A. 이해	0수준: 들은 내용을 전혀 이해하지 못함 1수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 들었으나, 무엇을 구해야 하는지 정확히 파악하지 못하였으며, 문제에 주어진 정보를 불완전하게 이해함 2수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 이해하여 무엇을 구해야 하는지, 어떤 정보를 이용해야 하는지 파악할 수 있음 3수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 정확히 이해하고, 어떤 정보를 이용하여 어떠한 수학적 개념을 적용할 수 있을지 생각할 수 있음
	2-B. 반응	0수준: 들은 후 내용에 대해 전혀 반응하지 않거나 문제 해결과 관련 없는 반응을 함 1수준: 내용과 관련된 반응을 하고, 집중하여 주어진 내용에 반응할 수 있음
3. 읽기	3-A. 이해	0수준: 내용을 읽고 전혀 이해하지 못함 1수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 읽었으나, 무엇을 구해야 하는지 정확히 파악하지 못하며, 문제에 주어진 정보를 불완전하게 이해함 2수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 이해하여 무엇을 구해야 하는지, 어떤 정보를 이용해야 하는지 파악할 수 있음 3수준: 문제 상황과 관련하여 내용을 정확히 이해하고, 어떤 정보를 이용하여 어떠한 수학적 개념을 적용할 수 있을지 생각할 수 있음
	3-B. 반응	0수준: 읽은 후 내용에 대해 전혀 반응하지 않거나 문제 해결과 관련 없는 반응을 함 1수준: 내용과 관련된 반응을 하고, 집중하여 주어진 내용에 반응할 수 있음
4. 쓰기	4-A. 표상	0수준: 문제 해결과 관련한 어떤 것도 나타낼 수 없음 1수준: 문제 해결과 관련하여 간단한 그림이나 풀이과정이 있으나 문제 해결에 결정적인 연관은 짓지 못함 2수준: 문제 해결과 관련하여 의미 있는 표상을 하고 불완전하지만 간단한 그림이나 수학적 기호나 표현을 사용하여 나타낼 수 있음 3수준: 문제 해결과 관련하여 정확한 수학적 기호나 표현을 사용하여 표상할 수 있음
	4-B. 표현	0수준: 타인에게 자신의 수학적 지식을 전혀 전달하지 않음 1수준: 문제와 관련은 있으나 수학적 개념이나 지식을 연결지어 표현하지 못함 2수준: 문제와 관련 있고 수학적 개념이나 지식이 요구되는 내용을 바탕으로 표현할 수 있으나 불완전함 3수준: 문제와 관련이 있으면서도 문제 해결에 필요한 수학적 지식이나 개념을 포함하여 표현할 수 있음
	4-C. 설명	0수준: 타인에게 쓴 내용이 전혀 설명 되지 않음 1수준: 문제와 관련은 있으나 수학적 개념이나 지식과 연결 지어 설명 하지 못함 2수준: 문제와 관련 있고 수학적 개념이나 지식이 요구되는 설명을 타인에게 시도하나 불완전함 3수준: 문제와 관련이 있으면서도 문제 해결에 필요한 수학적 지식이나 개념을 분명하게 설명할 수 있음