韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.1
2016. 2. 제 55권, 제 1호, 1-19.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2016, Vol. 55, No. 1, 1-19.

Rasch 모델을 통한 초등학교 학생들의 등호 이해 분석

김정원(대전신탄진초등학교)
방정숙(한국교원대학교)[†]
최지영(서울영남초등학교)

1. 서 론

등호는 방정식의 양 변이 같으며 교환 가능함을 나타내는 관계적 기호이다(Kieran, 1981). 이러한 등호는 수와 연산, 도형, 측정 등의 여러 영역에서 수나 양 사이의 동치 관계를 표현 하거나 추론하고 의사소통하기 위하여 빈번하게 사용되며, 특히 대수적 사고를 신장시키는데 핵심적인 개념으로 간주되기 때문에 중요하다(방정숙, 최지영, 2011; Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, & Kim, 2015; Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Carpenter, Levi, Berman, & Pligge, 2005). 특히, 초기 대수적 관점에서 볼 때 등호에 대한 이해는 초등학교 저학년부터 산술식에 내재된 수나 양 사이의 관계 및 구조를 탐색하는 과정의 바탕이 되기 때문에, 어린 학생들의 대수적 사고를 개발시키는데 기본이자 핵심이라고 할 수 있다(Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Molina & Ambrose, 2008).

그러나 이러한 등호의 중요성에 반하여 실제 학생들의 등호에 관한 이해를 살펴보면 등호에 관한 여러 오개념과 이로 인한 등식 해결의 어려움을 발견할 수 있다(예, 강명희, 2011; 기정순, 정영옥, 2008; 하수현, 이광호, 2011; Blanton et al., 2015; McNeil & Alibali, 2005; Powell & Fuchs, 2010; Rittle-Johnson, 2006). 예를 들어, McNeil과 Alibali(2005)를 살펴보면 학생들은 제시된 수를 모두 더하는 것 또는 총합으로 등호를 해석하고 있으며, 이로 인하여 $7+4+5=7+\square$와 같은 문제에서 나머지 값을 모두 더한 23을 □의 값으로 제시하는 오류를 보였다. 또한 등호 문맥에 따른 초등학교 4학년 학생들의 등호 개념의 이해를 살펴본 기정순과 정영옥(2008)에 따르면, 학생들은 등호의 왼쪽에 연산이 있는 등식 문제에 비하여 등호 오른쪽이나 양쪽에 연산이 있는 등식 문제를 해결하는데 어려움을 겪었으며, 등호를 결과로 인식하는 오류를 드러냈다.

그런데, 왜 초등학교 학생들은 1학년부터 다루어 온, 이 간결한 기호에 대해 어려움을 겪는 것일까? 여러 가지 원인 가운데 하나로 초등학생들의 산술식을 다룬 협소한 경험에 의한 것임을 유추해 볼 수 있다(McNeil & Alibali, 2005; McNeil, Fyfe, & Dunwiddie, 2014). 즉, 학생들은 등호의 왼쪽에 연산이 존재하는 산술식을 주로 다루면서 이를 해결하기 위해서는 주어진 모든 수에 대해 제시된 모든 연산을 수행하면 된다는 전략을 발견하게 되며, 이로 인하여 등호를 무언가를 하라는 의미로 해석하게 된다. 이는 등호의 관계적 의미가 아닌 연산적 의미를 반영하는 것으로 이로 인하여 등호에 관한 오개념을 유발하고 잘못된 등식 해결로 이어지게 된다.

지금까지 이루어진 등호에 관한 여러 연구를 살펴보면, 학생들의 등호 개념에 관한 이해 정도 및 그 원인을 대략적으로 파악할 수 있다. 하지만 등호 정의나 등식 해결과 같은 특정한 측면에 대해서만 살펴보거나, 연구 대상자가 초등학교 일부 학년의 학생이나 중학생을 대상으로 했다는 한계점이 있다. 같은 맥락에서 Matthews, Rittle-Johnson, McEldoon 그리고 Taylor(2012)는 측정 방법과 관련하여 지금까지 연구들이 신뢰도와 타당도가 검증된 검사 도구를 사용하지 않았으며, 여러 연구에서 사용된 검사 도구가 서로 다른 유형의 문항을 사용하였기 때문에 검사 결과를 서로 비교할 수 없다는 한계점을 언급하였다. 더 나아가 이러한 측정 도구의 한계를 극복하기 위하여 지금까지 다양한 연구들에서 사용된 검사

* 접수일(2015년 12월 26일), 수정일(1차: 2016년 2월 1일, 2차: 2016년 2월 11일) , 게재확정일(2016년 2월 18일)
* ZDM 분류 : C32
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : Rasch 모델, 등호 이해, 대수적 사고
† 교신저자

문항을 하나로 통합하였다. 이를 위하여 우선 4개의 수준으로 구성된 등호 지식의 구인지도(construct map)를 구성하고 등호 지식 측정 문항의 유형을 세분화한 뒤, 수준과 유형을 고려하여 검사 문항을 만들었다. 마지막으로 문항 반응 이론의 하나인 Rasch 모델을 이용하여 검사지의 타당도와 신뢰도를 검증하고 학생들의 능력과 문항 난이도를 검사하였다. 이러한 연구는 앞서 살펴본 연구와 다르게 검사 도구가 타당하며 초등학교 2~6학년 학생들을 대상으로 했다는 점에서 주목할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 Matthews 외(2012)에서 제시된 검사 도구와 검사 방법이 초등학생들의 등호 지식을 측정하고 평가하기에 유의미하다는 가정 아래, 동일한 검사 도구와 방법을 우리나라 초등학교 학생들에게 적용하여 등호 개념에 관한 이해를 살펴보고자 한다. 이를 통해 등호와 관련된 초등학교 학생들의 등호 개념에 관한 이해 정도 및 수준을 파악하는 한편, Matthews 외(2012)의 결과와 비교함으로써 우리나라 학생들에게 적합한 등호의 지식 및 문항에 관한 시사점을 제공해줄 수 있을 것이라고 기대한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 등호에 대한 이해

등호를 이해하기 위해서는 등호의 의미와 등호가 사용된 다양한 맥락을 파악해야 한다. 앞서 밝혔듯이, 등호는 등호의 양 변이 서로 같으며 교환 가능함을 나타내는 관계적 기호이다(Kieran, 1981). 등호를 관계적으로 이해한 학생은 9+6=b+7과 같은 문제를 해결할 때 우변의 7이 좌변의 6보다 1이 더 크기 때문에 우변의 b는 좌변의 9보다 1이 적어야 한다고 추론하여 해결할 것이며, 이는 등호의 의미를 수나 양 사이의 동치 관계를 표현한 것으로 바라보고 있다는 것을 반영한다(McNeil et al., 2014). 하지만 안타깝게도 많은 학생들은 비관계적인 의미로 등호를 해석하여, 모두 더하거나 총합을 구하라는 연산적인 의미로 이해하거나 계산 결과 또는 끝을 의미하는 것으로 이해하고 있다(Byrd, McNeil, Chesney, & Matthews, 2015). 비록 비관계적으로 등호를 해석하는 것이 일부 간단한 산술 또는 대수 문제를 해결하는데 문제가 되지 않을 수도 있다. 하지만 좀 더 복잡한 방정식을 해결하기 위해서는 등호의 관계적 의미를 이해해야만 하며 이는 등식의 중요한 성질인 대칭성, 반사성, 추이성을 이해하는데 기본이 된다.

한편, 등호가 사용되는 맥락은 연산의 위치에 따라 표준 맥락과 비표준 맥락으로 구분된다(McNeil & Alibali, 2005). 표준 맥락은 3+4=7과 같이 등호의 왼쪽에 연산이 있는 '연산-등호-답'의 유형으로 교과서에 제시되는 등식의 대부분은 표준 맥락에 해당한다. 비표준 맥락은 표준 맥락이 아닌 유형으로 3+4=5+2와 같이 등호의 양쪽에 연산이 있는 맥락, 7=3+4와 같이 등호의 오른쪽에 연산이 있는 맥락, 3=3과 같이 등호의 양쪽에 연산이 없는 맥락으로 세분된다. 이러한 등식 맥락은 학생들이 등호를 해석하고 등식 해결을 수행하는데 영향을 미치는데, 초등학교 3, 4, 5학년 학생들의 등식 구조와 등호 이해에 관한 실태를 살펴본 Stephens, Knuth, Blanton, Isler, Gardiner 그리고 Marum(2013)의 연구를 살펴보면 5+3=□+3의 값을 구하거나 39+121=121+39의 참/거짓을 판단하게 하는 과제를 해결할 때 보다 많은 학생들이 등식을 구조적으로 보고 등호의 관계적 의미를 적용했음을 알 수 있다. 하지만 등식 맥락에 따라 초등학교 1학년부터 4학년까지의 수학 교과서를 분석한 연구에서(기정순, 정영옥, 2008) 표준 맥락이 압도적으로 큰 비중을 차지하고 있다는 사실을 고려한다면, 교육과정 개발자나 교사들은 보다 다양한 맥락을 고려할 필요가 있다.

이와 같이 표준 맥락에 비하여 비표준 맥락은 학생들이 관행적으로 수행하던 연산 절차에 대해 반성할 수 있는 기회를 제공함으로써 등호의 관계적 개념을 발달시키기에 보다 적합한 것으로 간주되고 있다. 하지만 비표준 맥락을 성공적으로 해결하는 것이 반드시 등호를 관계적으로 이해하고 있음을 의미하는 것이 아니라는 점을 염두에 두어야 한다. 강명희(2011)의 연구에 따르면 5학년 학생들의 양변 연산식에 대한 정답률이 높았음에도 불구하고 등호를 관계적으로 이해하여 관계적인 해결 전략을 사용한 학생들은 그리 높은 비율을 차지하지 않았다. 이러한 결과는 학생들이 관계적으로 등호를 이해하더라도 문제 풀이 과정에 전이가 잘 되지 않고 있음을 드러낸다. 종합하면, 교사는 학생들에게 등호의 관계적 의미를 강조하고 다양한 맥락의 등식을 제시하는 것뿐만 아니라

등호의 의미를 등식 해결 과정에 적용시킬 수 있도록 교수-학습 과정에서 보다 세심한 주의를 기울일 필요가 있다.

이에 초등학생들의 등호에 관한 이해를 발달시키기 위한 첫 단계로 학생들의 실태를 파악하는 것은 매우 중요하다. 본 연구에서는 지금까지 이루어진 학생들의 등호 이해 실태에 관한 연구들이 특정 학년을 대상으로 하거나 등호에 관한 일부 지식만을 다루고 있다는 제한점을 고려하여, 우리나라 초등학교 학생들의 전반적인 등호 이해 실태를 파악하고자 한다.

2. 등호 지식의 수준과 측정

Matthews 외(2012)는 등호에 관한 지식을 측정하기 위하여 선행 연구에서 사용되었던 여러 가지 검사 도구들을 하나로 통합하고 실제 2~6학년 학생들의 등호 지식을 측정하였다. 이를 위하여 연구자들은 우선 [표 1]과 같이 등호에 관한 지식수준을 4가지로 분류한 구인 지도를 개발하는데, 크게 등호를 연산적인 의미로 파악하는 1, 2수준과 등호의 관계적 의미에 도달한 3, 4수준으로 구분할 수 있다. 여기서 중요한 점은 이러한 수준은 각기 나누어져 제시되었지만 서로 분절된 것이 아니라 연속되어 발달된다는 점이다.

다음으로 Matthews 외(2012)는 등호에 관한 문항의 유형을 크게 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 3가지로 구분한 후, 각 문항의 지식수준을 가정하여 총 27개의의 문항을 개발한다. 이 때, 등식 구조 유형에는 높은 수준의 관계적 사고가 필요한 문항이 6개, 등식 해결 유형에는 문자로서의 변수가 포함된 문항이 3개 포함되었다. 개발된 문항은 2~6학년 224명에게 투입되었고, Rasch 모델을 이용하여 검사 도구의 신뢰도와 타당도 및 학생들의 능력에 관한 증거를 제시한다.

여기서 분석도구로 사용된 Rasch 모델을 간단히 살펴보면, Rasch 모델은 응답자 능력과 문항 난이도 사이의 차이를 기반으로 문항을 성공적으로 해결할 가능성을 추정하는 문항반응모형이다(Bond, & Fox, 2015). 이 모델에서는 피험자의 능력이 문항 난이도보다 높을수록 정답을 할 가능성이 높아지며 반대로 피험자의 능력이 문항 난이도보다 낮으면 정답을 할 확률이 낮아지는 것으로 기대한다. 특히 서열척도인 원점수가 로지스틱 변환(logistic transformation)됨으로써 등간척도의 측정치로 바뀌고, 이것이 선형적인 조건을 만족시키면서 덧셈과 뺄셈의 연산을 수행하는 것이 가능함에 따라 특정한 학

[표 1] 등호 지식의 구인 지도(Matthews et al., 2012, p. 320)
[Table 1] Construct map for knowledge of the equal sign (Matthews et al., 2012. p. 320)

수준	설명	핵심적인 등식 구조
4수준 비교적인 관계적 이해	· 등호 양변의 식을 비교함으로써 등식을 성공적으로 해결하고 평가함 · 보상적 전략을 사용하고 질을 유지하는 변형을 인식할 수 있음 · 지속적으로 등호를 관계적으로 해석함	- 간단한 변형을 적용하여 가장 효율적으로 해결될 수 있는 등식: 예) 67+86을 더하지 않고, 수식 67+86=68+85이 참인지 거짓인지 말할 수 있는가?
3수준 기초적인 관계적 이해	· 등호 양변에 연산이 있는 구조의 등식을 성공적으로 해결, 평가, 인식함 · 등호의 관계적 정의를 올바른 것으로 인식함	- 양쪽에 연산이 있는 등식: a+b=c+d a+b-c=d+e
2수준 유연한 연산적 이해	· 이례적인 구조의 등식을 성공적으로 해결, 평가, 인식함 · 등호를 연산적으로 바라봄	- 우변에 연산이 있는 등식: c=a+b - 연산이 없는 등식 : a=a
1수준 엄격한 연산적 이해	· 연산-등호-답의 구조인 등식에서만 성공적인 수행을 보임 · 등식을 해결, 평가, 인식함 · 등호를 연산적으로 정의함	- 좌변에 연산이 있는 등식: a+b=c (빈 칸이 좌변에 있는 등식 포함)

생이 해당 문항을 성공적으로 해결할 가능성까지도 계산할 수 있다는 장점이 있다(지은림, 채선희, 2000).

[그림 1]은 Matthews 외(2012)에서 Rasch 분석 결과를 Wright map으로 나타낸 것으로 세로선 왼편은 응답자 능력을, 오른편은 과제 난이도를 의미하며 위쪽에 있을수록 응답자의 능력이 더 높고 문항이 더 어렵다는 것으로 해석된다. 가운데 세로선에 제시된 -6부터 6까지의 숫자들은 각 문항의 난이도와 피험자의 능력을 계산하여 로지트 값으로 나타낸 것이다. 세로선 왼편에 있는 '#'과 '·' 표시는 해당되는 로지트 값의 능력을 가진 피험자의 숫자를 나타낸다. 문항 난이도 값은 그 문항을 맞힐 확률이 50%가 되게 하는 피험자의 능력으로 결정되는데, 예를 들어 [그림 1]의 □ 부분을 살펴보면 해당되는 로지트 값의 능력을 가진 피험자들이(.#######) 8=6+□ 문항을 성공적으로 해결할 확률이 50%가 된다는 의미이다. 따라서 □ 보다 위에 위치한 피험자들은 이 문제를 성공할 확률이 50% 이상이 되고, 낮게 위치한 피험자들은 성공할 확률이 50% 미만이 된다.

검사 결과, 연구에서 실험 전 가정했던 각 문항의 지식수준이 그대로 유지되고 있었는데, 즉 4수준으로 가정한 문항들이 가장 위쪽에 위치하고, 다음으로 3, 2, 1 수준으로 나타났다. 또한 평균값을 의미하는 "M"의 경우 문항 난이도 평균은 Rasch 모델에서 자동적으로 .0에 맞추어져 있는데 응답자 능력 평균 또한 동일하게 .0으로

[그림 1] Matthews 외(2012, p.328)에서 제시한 Wright map
[Fig. 1] Wright map (Matthews et al., 2012, p. 328)

드러났다. 이 연구는 Rasch 모델을 통한 분석을 통하여 등호의 지식수준 및 검사 문항의 타당성을 보이고 학생들의 능력, 문항 난이도, 성공 가능성을 구체적으로 제시했다. 따라서 우리나라 학생들의 등호에 관한 지식을 살펴보고자 하는 본 연구에 시사점을 제공해 줄 수 있을 것이라 여겨진다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 목적은 등호 개념에 관한 초등학교 학생들의 이해 실태를 알아보는 것이다. 이를 위하여 학력 및 사회경제적 수준이 중간 정도인 서울시와 경기도에 각각 소재한 초등학교를 3개 선정하고, 2학년부터 6학년의 각 학년에서 2개 학급씩 선정하여 총 695명을 연구 대상으로 하였다([표 2] 참조).

[표 2] 연구 대상(명)
[Table 2] Participants of this study

학교	2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	계
A	49	53	52	55	55	264
B	36	38	38	40	35	187
C	50	49	50	49	46	244
계	135	140	140	144	136	695

2. 검사 도구

본 연구에서는 Matthews 외(2012)에 제시된 등호 지식 검사 문항을 번역하여 사용하였다. 그 이유는 우선, Matthews 외(2012)의 연구 자체가 검사 문항 개발에 초점을 두었으며, 이를 위하여 등호 지식에 관한 구인 지도를 바탕으로 한 하나의 통합된 측정 도구를 개발하였기 때문이다. 또한 Rasch 분석을 통하여 타당도와 신뢰도에 관한 증거를 제시하였기 때문에 본 연구에 사용하기에 적합하다고 판단되었다.

검사 문항은 크게 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 3가지 유형으로 구성된다. 총 문항은 27개(1번~27번)이나 각각 6, 3, 2개의 세부 문항으로 구성된 1, 2, 12번 문항의 경우 세부 문항마다 내용 및 등식 맥락 등이 서로 달랐기 때문에 총 문항 개수를 35개로 분석하였다. 문항 유형 가운데 등식 구조에 관한 서술형 문항 6개는 높은 관계적 추론을 요구하는 문항으로 동치가 유지되는 변형을 설명할 수 있는지 알아보는 것이 목적이다. [표 3]은 검사 문항에 관한 정보를 요약하여 나타낸 것이다.

3. 자료 수집 및 분석

본 검사는 학급 담임 교사가 직접 실시하도록 안내하였고, 40분의 검사 시간 동안 학생들이 직접 검사지에 기술하도록 하였다. 수집된 검사지의 학생들 반응 가운데 정답은 1, 오답 0으로 분류하여 코딩하였다. 서술형 문항의 경우, 등호의 관계적 이해가 반영되어 방정식 양변의 동치 관계를 언급한 경우는 1로 코딩된 반면, 연산적이해가 드러나거나 오답, 무응답을 한 경우 0으로 코딩하였다([표 4] 참조).

[표 3] 검사 문항의 구성
[Table 3] Summary of the questionnaire

유형	문항 번호(번)	문항 개수(개)		계 (개)	문항의 예
		선다형	서술형		
등식 구조	1~8	8	6 (높은 관계적 추론)	14	56+85=141은 옳은 식이다. 56+85-7=141-7이 옳은 식인지, 틀린 식인지 결정하시오.
등호 정의	9~14	7	1	8	등호의 의미를 쓰시오.
등식 해결	15~27	11	2	13	48+76을 더해보지 말고, □에 알맞은 수를 써 넣으시오: 47+□=48+76
계		26	9	35	

[표 4] 서술형 문항 코딩의 예
[Table 4] Examples of coding items asking for description

문항의 예	1로 코딩된 예	0으로 코딩된 예
56+85=141은 옳은 식이다. 56+85-7=141-7이 옳은 식인지, 틀린 식인지 결정하시오.	“양변에 똑같이 7을 빼기 때문입니다.”	“56+85-7=134, 141-7=134여서 같기 때문입니다.”
등호의 의미를 쓰시오.	“같다는 뜻입니다.”	“계산하시오.”
48+76을 더해보지 말고, □에 알맞은 수를 써 넣으시오: 47+□=48+76	“47은 48보다 1 작으므로 76보다 1 큰 수를 넣어서 같게 만든다.”	“48+76=124이므로, 124에서 47을 빼면 77이 됩니다.”

이러한 자료들은 Matthews 외(2012)에서 사용된 측정 방법인 Rasch 모델을 동일하게 적용하여 분석하였는데 이를 위하여 문항 반응 분석 프로그램인 Winsteps 3.91.0(www.winsteps.com)을 사용하였다. 우선 Rasch 모델에서 제공하는 Wright map을 통하여 학생들의 능력과 문항 난이도를 동시에 살펴보고 이를 바탕으로 등호 지식의 수준에 따른 문항의 성공 가능성을 계산하였다. 추가적으로 학년별 Wright map 및 수준 분포를 살펴봄으로써 학년별로 세부 문항의 분포 차이를 보다 자세히 알아보고자 했으며, Differential Item Functioning (이하 DIF) 분석에서의 집단별 각 문항에 대한 난이도 측정값을 통하여 통계적으로도 문항이 학년별로 통계적인 차이를 보이는지 살펴보았다. 여기서 DIF 분석이란 동일한 문항에 대한 집단별 난이도 측정값을 비교함으로써 문항이 서로 다른 집단에게 유의한 차이를 가지는지 검증하고자 할 때 쓰이는 방법이다(Bond & Fox, 2015).

보통 실태분석에 사용되는 빈도 분석과 다르게 본 연구에서 사용된 Rasch 모델을 통한 분석은 등호 지식에 관한 구인 지도를 고려하여 학생들의 수준이 어떤 분포를 보이는지 좀 더 명확히 파악할 수 있다는 장점이 있다. 또한 본 연구에서는 Matthews 외(2012)의 연구에 제시된 분석에 추가적으로 학년별 및 DIF 분석을 시행하였는데, 이를 통하여 학년에 따라 차이를 보이는 문항 난이도와 고학년이 되어도 어려움이 지속되거나 심화되는 문항들을 이해할 수 있다. 이와 같은 분석 방법 및 절차는 학생들의 등호 지식에 관한 실태를 보다 심도 깊게 살펴보고 이를 통해 등호 지식을 계발시킬 수 있는 방안을 보다 체계적으로 마련하기에 용이할 수 있다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 전체 학생 집단의 문항 반응 분석

1) Wright map을 통한 학생능력 및 문항난이도 분석

[그림 2]는 2~6학년의 전체 695명 학생들의 문항 반응을 분석하여 작성한 Wright map이다. 우선 평균을 나타내는 ‘M’의 값을 살펴보면 학생들의 능력 평균은 1.17로 문항 평균 .0에 비하여 높게 나타났는데, 검사 문항들이 학생들의 등호 지식을 측정하는데 평균적으로 큰 어려움이 없었다고 해석할 수 있다. 또한 측정값의 분포가 학생들의 능력은 -5.60~5.79, 문항 난이도는 -5.78~5.75로 유사한 범위로 나타나는 것은 검사 문항의 난이도가 학생들에게 적합하다는 것을 의미한다.

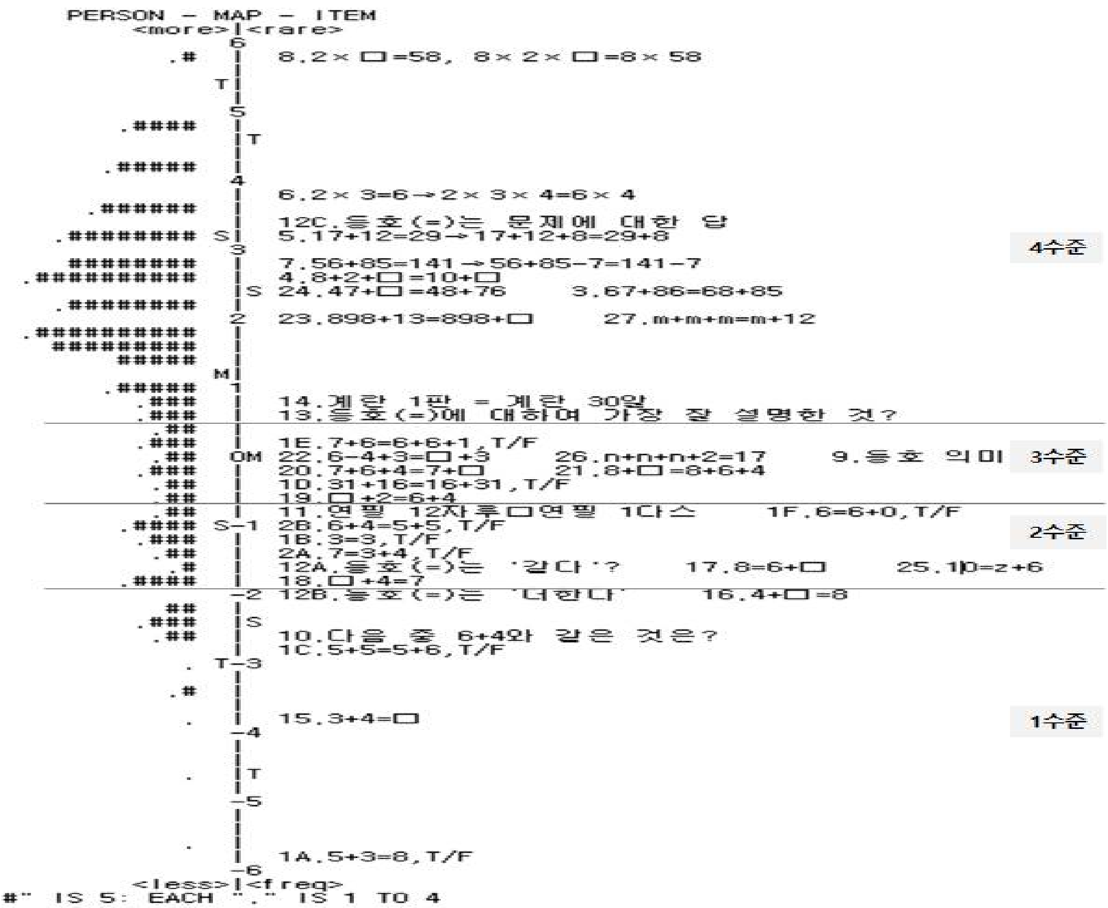
등식 구조에 관한 8번 문항이 Wright map의 가장 위쪽에 위치하여 가장 어려운 문항으로 드러난 반면, 가장 아래에 위치한 등식 구조에 관한 1A번 문항은 가장 쉬운 문항으로 모든 학생들이 정답 할 확률이 최소 50% 이상이라는 것을 알 수 있다. 8번 문항의 난이도가 가장 높은 이유를 유추하면, 나머지 등식 구조에 관한 문항들은 원래 식의 오른쪽에서 변형이 이루어지는 반면, 8번 문항은 원래 식의 왼쪽에서 변형이 이루어지며 곱셈 연산이 작용하기 때문에 학생들에게 친숙하지 않은 동치가 유지되는 변형일 수 있다. 또한 검사 문항의 3가지 유형인 등식 구조(1~8번), 등호 의미(9~14번), 등식 해결(15~27번) 가운데, 등식 구조에 해당하는 문항이 다른 유형에 비하여 Wright map의 위쪽에 분포한다는 것을 발견할 수 있다. 특히, 높은 관계적 추론이 필요한 등식

구조 유형의 서술형 문항(3~8번)이 모두 위쪽에 분

포하고 있는데 이는 계산하지 않고 등식의 전체 구조를 분석하여 참, 거짓을 파악하는 것이 학생들에게 쉽지 않은 과제라는 것을 드러낸다. 또한 덧셈 구조를 파악하는 문항(3, 4, 5, 7번)에 비하여 곱셈 구조를 파악하는 문항(6, 8번)이 Wright map의 위쪽에 분포하고 있다는 것은 연산 종류가 문제 해결에 영향을 미칠 수도 있다는 것을 암시한다.

Rasch 분석에 의해 작성된 Wright map은 원래 [그림 2]에 제시된 3개의 가로선이 없지만, 본 연구에서는 Matthews 외(2012)에 제시된 문항 수준을 참고하여 가로선을 추가하였다. 이 때 대부분의 문항이 수준에 따라 구분되었지만 몇 개의 문항 수준이 원래보다 낮거나 높게 드러나 가로선의 명확한 위치를 파악하기에 모호한 점이 있었는데, SPSS의 계층 군집 분석을 추가로 시행함으로써 유사한 수준끼리 구분할 수 있었다. 아래의 첫 번째 가로선 밑에 위치한 문항들은 1수준(예, 1A, 15번), 위로 올라갈수록 각각 2수준(예, 12A, 17번), 3수준(예, 19, 1D번), 4수준(예, 13, 14번)의 등호 지식과 관련되었음을 의미한다.

이 때, Wright map의 가로선 사이의 간격을 살펴보면 수준에 따라 값의 범위가 차이가 난다는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 1, 4수준에 해당하는 문항의 값의 범위는 2, 3수준에 비하여 매우 넓게 분포하는데, 이는 같은 수준이라도 문항에 따라 난이도의 차이가 생긴다는 것을



[그림 2] 전체 학생들의 Wright map
[Fig. 2] Wright map for all participants

의미한다. 예를 들어, 6번과 14번은 동일한 4수준의 문항이지만, 6번의 경우 전체 학생의 약 10%만이 문제를 성공적으로 해결할 확률이 50%가 넘는 반면 14번은 약 60%이상이 이에 해당한다(앞서 언급하였듯이, Wright map에서 각 문항에 나란히 위치한 학생들은 그 문항을 성공적으로 해결할 확률이 50%가 된다는 것을 의미한다). 만약 두 학생 모두가 비교적인 관계적 의미로 등호를 이해하고 있는 4수준으로 분류되었다고 할지라도 이와 같이 동일한 수준의 문항들에서도 난이도의 차이가 크게 생긴다는 사실을 염두에 둔다면 등호 지식수준에 대한 세분화를 고려할 필요가 있다.

문항 수준을 Matthews 외(2012)와 비교했을 때 대체적으로 동일하나 문항 난이도 측정값이 전반적으로 다르고 몇 개 문항(12A, 18, 25, 26번)은 다른 수준으로 분류되었다. 예를 들어, 10=z+6을 해결하는 25번 문항의 경우 Matthews 외(2012)에서는 문항 난이도 측정값이 -0.88의 3수준 문항이었으나, 본 연구의 결과 -1.54로 더 낮게 측정되었으며 2수준 문항으로 분류되었다. 앞서 이론적 배경에서 2수준은 우변에 연산이 있는 등식을 해결하나, 등호를 여전히 연산적 의미로 이해하는 것임을 상기시키면, 이러한 결과는 우리나라 학생들의 경우 2수준의 사고로도 문자 변수(letters as variables)가 포함된 등식의 미지수를 구할 수 있다고 해석할 수 있으며, 또한 연구 대상에 따라 검사 문항의 난이도 및 수준이 변화될 수도 있다는 것을 암시한다.

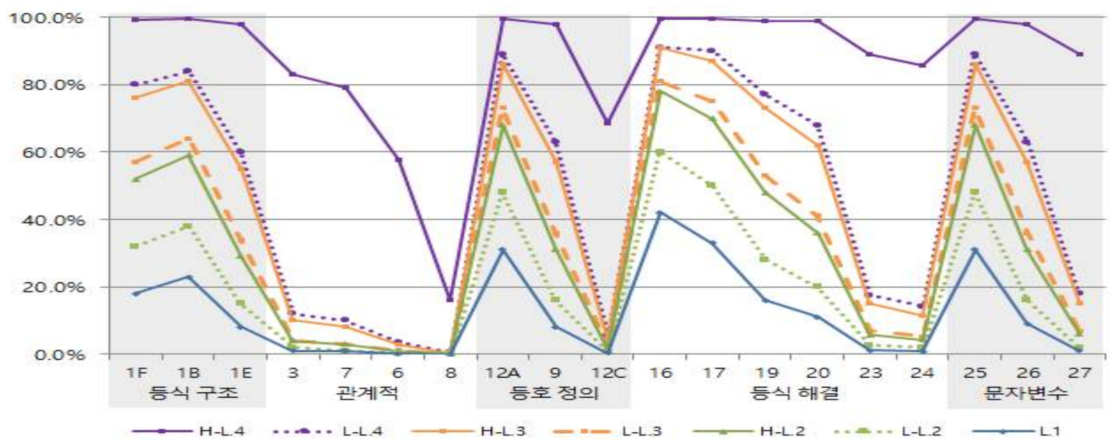
2) 문항 유형별 학생들의 가능성 분석

Rasch 모델에서는 응답자 능력과 문항 난이도의 측정값이 등간 척도를 만족하기 때문에 특정 응답자가 특정 문제를 성공적으로 해결할 가능성을 아래의 함수식을 통해 구체적인 값으로 추정할 수 있다(Bond, & Fox, 2015). 이는 응답자 능력과 문항 난이도 값의 차이를 기본으로 하기 때문에($\theta - d$), 응답자 능력과 문항 난이도 측정값이 서로 같다면 성공적인 문제 해결 확률이 0.5, 응답자 능력 측정값이 크다면 0.5 이상, 낮다면 0.5 이하의 값이 된다고 간단히 생각할 수 있다.

$$\text{확률(성공)} = \frac{1}{1+e^{-(\theta - d)}} \qquad \begin{array}{l}\theta\text{: 응답자 능력}\\ d\text{: 문항 난이도}\end{array}$$

각 수준 별로 문항에의 성공 확률을 계산하기 위해서는 응답자 능력의 측정값이 필요한데, 이를 위하여 각 수준의 대표 값을 선택하였다. 이 때 [그림 2]에서 확인할 수 있듯이 하나의 수준은 점이 아닌 구간으로 드러나기 때문에 각 수준에서 상대적으로 위쪽에 있는 값과 아래쪽에 있는 값을 각각 선택하여 높은 수준과 낮은 수준으로 구분하였다.

이와 같은 과정을 통하여 각 수준의 학생들이 특정



[그림 3] 수준별 문항 성공 확률 그래프
[Fig. 3] Graph for probability of success by students' ability

문항에 대해 성공할 확률을 계산하였으며([표 5] 참조), [그림 3]은 이 값을 백분율로 바꾼 뒤 그래프로 나타낸 것이다. 본 연구에서는 지면의 한계로 인하여 각 문항 유형 가운데 몇 가지를 선택하여 제시하였다. [그림 3]에 드러난 전반적인 결과를 살펴보면, 문항 유형에 따른 성공 확률의 차이가 확연하게 드러나지는 않지만, 유일하게 관계적 추론을 요구하는 모든 문항에서의 성공 확률은 다른 유형에 비하여 낮다는 것을 알 수 있다. 또한 등식 해결 유형의 23, 24번과 문자 변수의 27번 문항에서의 성공 확률이 타 문항들에 비하여 낮게 드러났다. 이러한 문항들이 공통적으로 4수준이라는 것을 고려한다면, 학생들은 등호의 관계적 이해를 통하여 동치가 유지되는 등식의 변형을 해결하거나 판단하는 문항에 대해 특히 어려워한다는 것을 알 수 있다.

또한 문항에 따라 성공 확률이 매우 달라지는 다른 수준의 학생들과 달리, 높은 4수준(H-L.4)의 학생들은 대부분의 문항에서의 성공 확률이 80%이상을 드러냈다. 이는 등호에 관한 '비교적인 관계적 이해' 가 매우 잘 되어있다면 등호 관련 문항을 성공적으로 해결할 확률이 높다는 것을 의미한다. 대조적으로, 1수준(L1) 학생들은 모든 문항을 성공적으로 해결할 확률이 최고 50%도 되지 않는데 이러한 결과는 엄격한 연산적인 의미로만 등호를 이해하는 것이 성공적인 문제 해결의 큰 장애가 될 수 있다는 것을 암시한다.

[표 5]에 제시된 값들은 학생들의 수준과 문항 난이도를 고려한 성공 확률로써 다음과 같은 예로 해석될 수 있다: 수식 3=3의 참, 거짓을 파악하는 문항(1B)의 난이도는 -1.13이다. 1B문항에 대해 1수준 능력(-2.36)을 가진 임의의 학생이 성공적으로 해결할 가능성은 23%인 반면, 높은 4수준 학생(4.11)이 성공적으로 해결할 가능

[표 5] 수준별 문항 성공 확률

[Table 5] Probability of success on selected items by students' ability estimates

문항 난이도			응답자 능력						
문항 유형	문항	측정값	1수준 (L.1)	2수준 낮은 (L-L.2)	2수준 높은 (H-L.2)	3수준 낮은 (L-L.3)	3수준 높은 (H-L.3)	4수준 낮은 (L-L.4)	4수준 높은 (H-L.4)
			-2.36	-1.63	-0.78	-0.57	0.29	0.52	4.11
등식 구조	1B. 3=3, T/F	-1.13	0.23	0.38	0.59	0.64	0.81	0.84	0.994
	1F. 6=6+0, T/F	-0.85	0.18	0.31	0.52	0.57	0.76	0.80	0.993
	1E. 7+6=6+6+1, T/F	0.10	0.08	0.15	0.29	0.34	0.55	0.60	0.98
관계적 사고	3. 직접 더하지 않고 67+86=68+85, T/F	2.49	0.01	0.02	0.04	0.04	0.10	0.12	0.83
	7. 직접 빼보지 않고, 56+85=141 → 56+85-7=141-7, T/F	2.76	0.01	0.01	0.03	0.03	0.08	0.10	0.79
	6. 2×3=6 → 2×3×4=6×4, T/F	3.80	0.002	0.004	0.01	0.01	0.03	0.04	0.58
	8. 2×□=58, 8×2×□=8×58, □는 같은 수?	5.75	0.0003	0.0006	0.001	0.002	0.004	0.005	0.16
등호 정의	12A. 등호(=)는 '같다' ,T/F	-1.54	0.31	0.48	0.68	0.73	0.86	0.89	0.996
	9. 등호 의미	-0.02	0.08	0.16	0.31	0.36	0.57	0.63	0.98
	12C. 등호(=)는 '문제에 대한 답' , T/F	3.34	0.003	0.007	0.02	0.02	0.05	0.06	0.68
등식 해결	16. 4+□=8	-2.04	0.42	0.60	0.78	0.81	0.91	0.91	0.997
	17. 8=6+□	-1.64	0.33	0.50	0.70	0.74	0.87	0.90	0.996
	19. □+2=6+4	-0.68	0.16	0.28	0.48	0.53	0.73	0.77	0.99
	20. 7+6+4=7+□	-0.22	0.11	0.20	0.36	0.41	0.62	0.68	0.99
	23. 898+13=898+□	2.01	0.01	0.03	0.06	0.07	0.15	0.18	0.89
	24. 47+□=48+76	2.33	0.01	0.02	0.04	0.05	0.12	0.14	0.86
문자 변수	25. 10=z+6	-1.54	0.31	0.48	0.68	0.73	0.86	0.89	0.996
	26. n+n+n+2=17	0.01	0.09	0.16	0.31	0.36	0.57	0.62	0.98
	27. m+m+m=m+12	2.04	0.01	0.02	0.06	0.07	0.15	0.18	0.89

성은 99.4%이다. 모든 값들은 확률이기 때문에 실제로도 반드시 그렇다고 장담할 수는 없지만 여러 수준의 학생들의 문항 성공 확률을 살펴보는 것은 등호 지식에 관한 학생들의 다양한 실태를 비교하는데 도움이 될 수 있다. 다음은 각 문항 유형별 특징을 살펴 본 것이다.

우선, 등식 구조 유형은 제시된 수식의 참 또는 거짓을 파악하는 문항들로 구성되었는데, 연구 결과 연산이 없는 문항(예, 1B번)이 우변에 연산이 있거나(예, 1F번) 양변에 있는 문항(예, 1E번)에 비하여 난이도가 낮게 나타났는데, 이는 등식의 연산의 위치가 문항 난이도에 영향을 미친다는 것을 의미한다. 특히 3가지 문항 가운데 1E번 문항의 경우 관계적 이해를 하고 있는 3수준 학생들조차 성공할 확률이 높지 않다는 것을(34%, 55%) 알 수 있다. 또한 이러한 문항들은 모두 비표준 맥락에 해당하기 때문에 1수준과 2수준의 학생들에게는 쉽지 않은 과제였을 것이라 예상할 수 있다(최대 59%). 이러한 결과는 등식 해결 유형에서도 유사하게 드러났는데, 구체적인 측정값은 서로 달랐지만, 연산이 우변에 위치한 문항(등식 구조-1F번, 등식 해결-17번)이 양변에 위치한 문항(등식 구조-1E번, 등식 해결-20번)에 비하여 성공 확률이 더 높았다. 이러한 결과는 문항 유형에 상관없이 우리나라 초등학교 학생들은 연산이 없는 비표준맥락보다 연산이 있는 비표준맥락을 어려워하며, 특히 양변에 연산이 존재하는 맥락을 우변에 연산이 존재하는 맥락보다 어려워한다고 정리할 수 있다.

다음으로 높은 수준의 관계적 추론이 요구되는 3~8번 문항에 대해 살펴보면, 예상대로 전체 문항 가운데 가장 낮은 성공 확률을 드러냈는데 높은 4수준 학생들을 제외하고 성공 확률이 최대 12%라는 것은 놀랄만하다. 즉, 계산에 의존하지 않고 보상 전략이나 등호의 관계적 의미만을 통하여 등식 양 변의 식이 변하더라도 동치가 유지됨을 이해하는 것이 초등학생들에게 얼마나 어려운 과제인지 여실히 보여준다. 또한 등호의 의미를 서술하는 9번 문항의 성공 확률과 비교했을 때, 관계적 추론을 요구하는 모든 문항의 성공 확률이 더 낮다는 것은 학생들이 등호 자체의 의미를 관계적으로 서술할 수 있다는 것이 이를 문제 해결에 적용할 수 있다는 것을 보장하지 않는다는 것을 의미한다.

등호 정의에 관한 문항을 살펴보면 많은 학생들이 등호의 의미를 불완전하게 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 관련 문항의 난이도에서 12C문항의 값이 상대적으로 크게 나온 것으로 보아 많은 학생들이 등호를 '문제에 대한 답'으로 잘못 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 심지어 등호를 '같다'라고 판단하거나 서술할 수 있는 학생들조차도 등호의 또 다른 의미가 '문제에 대한 답'이 될 수 있다고 간주하는 것을 알 수 있다. 비교적인 관계적 이해에 도달했다고 판단할 수 있는 4수준의 학생들조차도 12C 문항을 성공적으로 해결할 확률이 각각 6%, 68%로 매우 낮게 드러났는데, 이러한 결과는 평소 학생들이 연산-등호-답의 표준 맥락을 자주 접하면서 등호 다음에 답을 쓰는 행동을 반복적으로 하게 됨에 따라 자연스럽게 등호가 '문제에 대한 답'의 의미도 될 수 있다고 이해했을 것이라 유추할 수 있다. 따라서 학생들의 등호 이해 정도를 파악하기 위하여 단지 등호가 같은지의 여부를 묻거나 서술하게 하는 것이 충분하지 않으며, 등호의 의미를 완전히 이해할 수 있도록 다양한 맥락에서 등식을 해결하거나 구조를 파악할 때 등호의 의미가 무엇인지 지속적으로 살펴보는 것이 필요하다.

등식 해결에 관한 문항은 □나 문자 변수에 적합한 미지수를 구하는 문항들로 구성되었다. 연구 결과, 23번과 24번이 가장 어려운 문항으로 드러났는데, 이 문항들은 우변에 연산이 있다는 점에서는 20번과 동일하지만 직접적인 계산 없이 등호의 관계적 이해를 바탕으로 문제를 해결해야하기 때문에 문항의 난이도가 높아지고 성공 확률도 낮아졌다. 특히 높은 4수준 학생들을 제외하고는 성공 확률이 대부분 10% 내외를 드러냈다는 것은 학생들의 어려움을 확실히 보여준다. 반면 학생들은 표준 맥락의 16번 문항을 가장 쉽게 해결할 수 있을 것으로 드러났으며, 양변에 연산이 있는 문항은 3수준의 학생들부터 성공 확률이 50% 이상을 드러냈다. 이러한 결과는 좌변에 연산이 있는 등식에 비하여 우변에 연산이 있는 등식 문항의 성공 확률이 낮고, 한 변에만 연산이 있는 등식에 비하여 양 변에 연산이 있는 등식의 문항의 성공 확률이 더 낮다는 것을 보여준다. 하지만 이들 문항을 면밀히 살펴보면 연산의 위치뿐만 아니라 미지수의 개수 및 위치, 항의 개수 등이 서로 다르기 때문에 이러한 요인들이 성공에 영향을 미쳤을 가능성을 완전히 배제할 수 없다.

한편, 25, 26, 27번 문항은 등식 해결 유형이지만 특히 문자 변수 z, n, m을 사용하였기 때문에 따로 분류하였다. 우선, 25번은 앞서 살펴본 17번 문항과 등식의 맥락은 동일하지만 준 변수인 □ 대신 문자 z를 사용했다는 점에서 차이가 있는데, 연구 결과 이러한 차이가 문항 난이도 및 성공 확률에 큰 영향을 미치지 않았음을 알 수 있다. 즉, 문자 변수 자체가 학생들에게 큰 어려움이 되지 않을 수도 있다고 가정할 수 있다. 하지만 26번의 경우 표준 맥락임에도 불구하고 상대적으로 난이도가 높아졌으며, 특히 27번은 연산이 양변에 제시되어 4수준에 속한 일부 학생들조차 성공 확률이 18%에 그쳤다. 난이도가 높아진 26번과 27번은 공통적으로 한 변에 제시된 가수의 개수 및 변수가 3개 이상이었는데, 등식 구조의 1E번과 등식 해결의 20번 또한 유사한 난이도로 나타났음을 고려한다면, 이러한 요인이 문항 난이도에 영향을 미칠 수도 있다는 것을 암시한다.

지금까지 살펴본 결과를 종합하면 학생들의 등호 이해는 다양한 문항 유형을 통하여 파악되어야 한다는 것을 알 수 있다. 또한 동일한 문항 유형에서도 등식 맥락뿐만 아니라 연산의 종류, 가수 및 미지수의 개수 등의 문제 해결에 영향을 미칠 수 있는 다양한 요인이 고려된 문항을 적용하여 살펴봐야 한다는 것을 알 수 있다.

2. 학년에 따른 문항 반응 분석

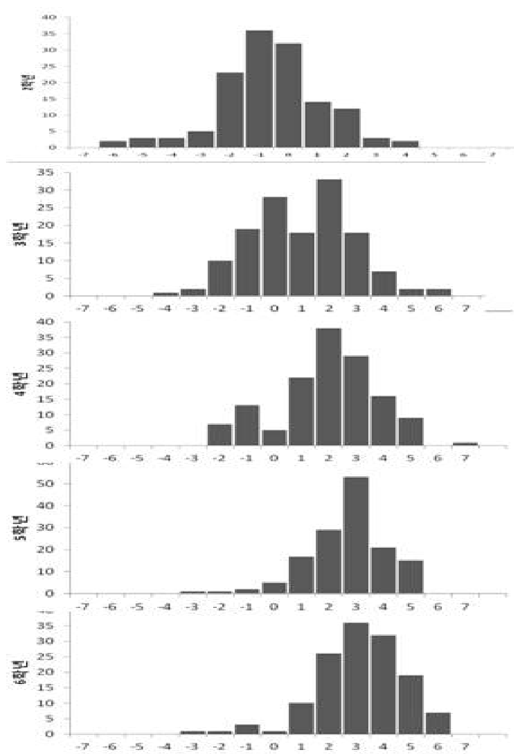
1) 평균값 비교를 통한 학년별 비교

본 연구의 대상인 2~6학년 학생들의 등호 지식에 대한 학년 간 차이를 알아보기 위하여 우선 학년별 평균 득점 및 범위를 살펴보았다. [표 6]에 제시된 바와 같이 학년이 올라갈수록 학생들의 평균 득점 및 능력값 범위의 최대·최소값이 증가하고 있다. 이러한 추세는 학생들의 능력 측정값의 분포를 히스토그램으로 나타낸 [그림 4]를 통해서도 확인할 수 있는데, 이 때 가로축은 학생들의 능력값을, 세로축은 해당하는 학생들의 숫자를 의미한다. 즉, 2학년에서는 학생들의 능력이 음수값에 많이 분포하고 있는 반면 학년이 올라갈수록 오른쪽으로 이동하여 양수값에 대다수의 학생들이 분포하고 있다. 이와 같은 결과는 등호 지식에 관한 학생들의 지식이 학년이 올라감에 따라 점점 발달하고 있다는 것을 보여준다.

[표 6] 학년에 따른 학생 능력 평균 및 범위

[Table 6] Average and range of students' ability estimates by grades

		2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	전체
평균 득점	(/35개)	12.8	19.9	23.9	26.7	27.6	22.2
	(로지트)	-1.18	0.51	1.45	2.19	2.71	1.17
능력값 범위		$-6.11<A<3.96$	$-4.75<A<5.02$	$-2.65<A<6.47$	$-3.56<A<4.96$	$-3.38<A<5.94$	$-5.60<A<5.79$



[그림 4] 학년별 학생들의 능력 분포

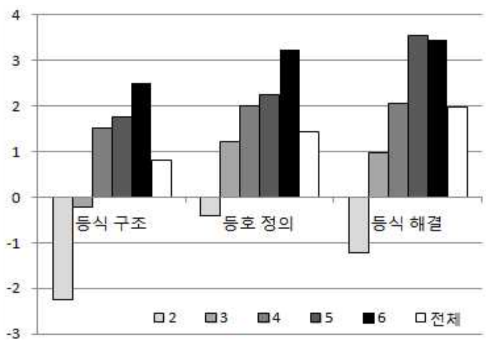
[Fig. 4] Distribution of students' ability estimates by grades

다음으로, 학년별 학생 능력을 문항 유형별로 세분화하여 학년별 학생들의 능력을 살펴보았다([그림 5] 및 [표 7] 참조). 값이 클수록 학생들의 능력이 더 높다는 것을 고려하면, 모든 학년의 학생들은 등식 해결 유형에서 가장 높은 능력을 보인 반면 등식 구조 유형에서 가

장 낮은 능력을 보였다. 즉, 학생들은 등식의 미지수를 구하는 문항에 비하여 제시된 등식이 참 또는 거짓인지 판단하는 문항을 해결하는데 더 어려움을 겪었다. 이는 등식 구조 유형의 문항의 대부분이 서술형 문항이며 높은 관계적 추론을 요구하기 때문에 등호의 연산적인 이해만으로는 문제를 해결하기 어렵다는 것과 관련된다.

[표 7] 학년별 문항 유형별 능력 평균
[Table 7] Average of students' ability by item types

유형 \ 학년	2	3	4	5	6	전체
등식 구조 (14문항)	-2.24 (4.1)	-0.23 (6.8)	1.51 (8.8)	1.76 (9.2)	2.50 (10.1)	0.82 (7.8)
등호 정의 (8문항)	-0.41 (3.6)	1.23 (5.2)	1.99 (5.7)	2.26 (6.3)	3.23 (6.3)	1.43 (5.4)
등식 해결 (13문항)	-1.22 (5.1)	0.98 (7.9)	2.05 (9.4)	3.56 (11.2)	3.46 (11.2)	1.97 (9.0)
전체 문항 (35문항)	-1.18 (12.8)	0.51 (19.9)	1.45 (23.9)	2.19 (26.7)	2.71 (27.6)	1.17 (22.2)



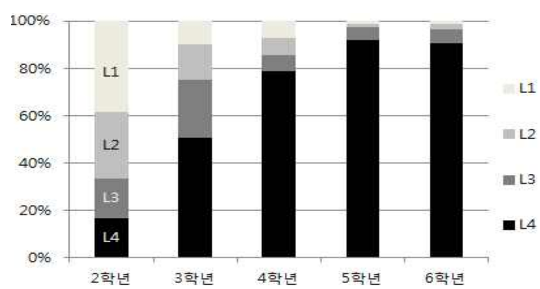
[그림 5] 학년별 문항 유형별 능력 분포
[Fig. 5] Distribution of students' ability by item types

각 유형에서 학년이 증가함에 따라 학생들의 능력이 대체적으로 증가추세를 보이기 때문에, 3가지 유형 모두에서 학년이 증가할수록 학생들의 등호 지식이 발달한다고 해석할 수 있다. 특히, [그림 5]를 보면 2학년에서 3학년, 3학년에서 4학년으로 갈수록 학생들의 능력값이 큰 폭으로 상승한다는 것을 알 수 있다. 한편 2학년의 능력값은 모든 유형에 대하여 음수값을 보이며 전체 학생들의 평균 및 문항 평균인 .0보다도 낮은 것으로 보아 2학년 학생들은 모든 유형에서 검사 문항을 해결하는데 전반적으로 어려움을 겪었을 것이라 예상할 수 있다.

다음으로 학년에 따라 등호 지식의 수준이 어떠한 분포를 보이는지 살펴보았다. [표 8]과 [그림 6]에서 알 수 있는 바와 같이, 2학년의 경우 1수준이 가장 많았고 그 다음 2수준, 3수준, 4수준으로 나타났으며 1수준과 2수준을 합하면 약 70%정도였다. 이는 많은 2학년 학생들이 등호를 연산적 의미로 이해하고 있으며 그 가운데 표준 맥락의 등식만을 성공적으로 수행하는 학생들이 적지 않다는 것을 의미한다. 반면 3학년부터 6학년 학생들의 경우 4수준의 학생들이 가장 높은 비율을 차지하는 것으로 드러났으며 특히 5학년과 6학년은 4수준의 학생이 90% 이상을 차지하여 많은 학생들이 등호를 관계적으로 이해하고 있다는 것을 알 수 있다.

[표 8] 학년별 수준 분포
[Table 8] Distribution of levels by grades

수준		2학년	3학년	4학년	5학년	6학년	계
1	명	52	14	10	2	2	80
	(%)	(39)	(10)	(7)	(1)	(2)	(11)
2	명	38	21	10	2	3	74
	(%)	(28)	(15)	(7)	(1)	(2)	(11)
3	명	23	34	10	8	8	83
	(%)	(17)	(24)	(7)	(6)	(6)	(12)
4	명	22	71	110	132	123	458
	(%)	(16)	(51)	(79)	(92)	(90)	(66)
계		135	140	140	144	136	695

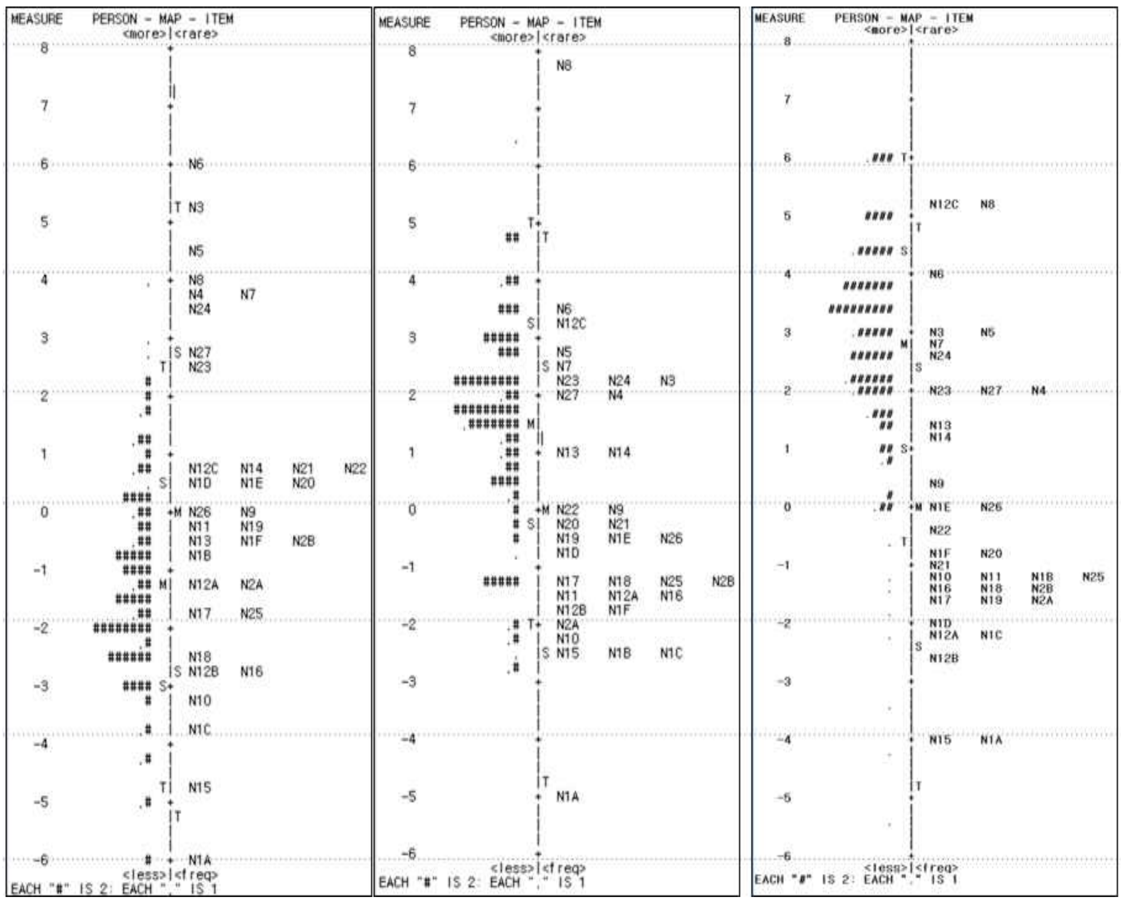


[그림 6] 학년별 수준 분포
[Fig. 6] Distribution of levels by grades

2) Wright map 분석을 통한 학년별 비교

각 학년의 Wright map을 작성하여 학생들의 능력과 문항 난이도를 서로 비교하였다. 본 연구 대상은 2~6학년이지만 지면 관계상 저, 중, 고학년을 대표하는 2, 4, 6학년만을 비교 대상으로 제시하였다([그림 7] 참조). 시각적으로 쉽게 확인할 수 있듯이, 각 학년마다 학생들의 능력과 문항 난이도의 분포가 다르게 나타났으며 대체적으로 6학년으로 갈수록 학생들의 능력이 Wright map 위쪽에 분포하기 때문에 높아지고 있다는 것을 알 수 있다.

우선, 2학년의 Wright map을 살펴보면 학생들의 능력 평균이 문항 난이도 평균보다 낮게 나타남을 알 수 있는데, 이는 본 검사문항들은 초등학교 2학년 학생들의 등호 지식을 측정하는데 평균적으로 어려움이 어느 정도 있었다고 여겨진다. 4학년과 6학년의 경우, 2학년과 다르게 학생들의 능력 평균은 문항 난이도 평균보다 높게 나타났는데 이는 본 검사문항들이 초등학교 4학년과 6학년 학생들의 등호 지식을 측정하는데 평균적으로는 큰 어려움이 없었다고 볼 수 있다. 특히 6학년 학생들의 경우 문항 난이도 평균인 로지트 .0에 대응하는 학생들 능력이 전체 6학년의 하위 수준으로 해당하는데 이는 학생들의 능력이 문항 평균보다 대체적으로 높다는 것을 드러낸다. 따라서 2학년들의 등호 지식을 검사하기 위해서는 본 검사에서 제시한 문항보다 좀 더 낮은 수준으로, 6학



[그림 7] 2학년(왼쪽), 4학년(가운데), 6학년(오른쪽) 학생들의 Wright map
[Fig. 7] Wright map for 2nd(left), 4th(middle), and sixth(right) graders

년을 위해서는 좀 더 높은 수준으로 조정하여 각 학년들의 실태를 보다 정확하게 파악하는 것이 필요하다.

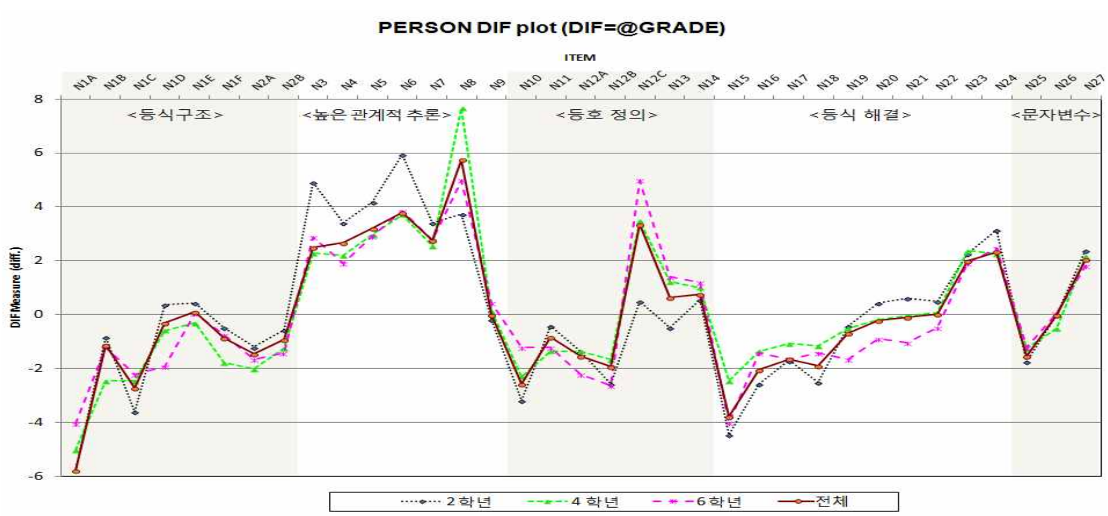
또한 2, 4, 6학년 공통적으로 높은 관계적 추론이 요구되는 3~8번 문항이 Wright map의 위쪽에 분포하고 있는데, 이는 등호의 관계적 이해를 바탕으로 동치가 보존되는 변형을 이해하는 것이 모든 학년의 학생들에게 쉽지 않은 과제라는 것을 시사한다. 특히 2학년의 경우 3번부터 8번까지의 모든 문항들이 Wright map의 위쪽에 위치하며 유사한 능력을 가진 학생들이 거의 대응되지 않는데, 이러한 양상은 높은 관계적 추론을 요구하는 과제들을 통해 2학년 학생들의 실태를 파악하는 것이 다소 무리일 수도 있다고 예상할 수 있다. 한편, 4학년은 특히 8번 문항의 난이도가 나머지 문항에 비하여 유독 높게 나타났으며 유사한 로지트 값에 해당하는 학생이 대응되지 않고 있다. 이와 다르게, 6학년의 경우 가장 높은 문항 난이도 로지트값보다 더 높은 학생들이 표시되며 전체적으로 문항 난이도 분포보다 학생들 능력이 더 높은 값에서 분포하고 있기 때문에 6학년 학생들의 능력을 변별하고 좀 더 정확한 실태를 파악할 수 있는 추가적인 문항들을 고려할 필요가 있다.

3) DIF 분석을 통한 학년별 비교

마지막으로 2, 4, 6학년 학생들의 문항 반응 결과를 종합하여 DIF 분석을 시행하였다. DIF 분석을 통하여 동일한 검사지에 대한 각 집단의 문항 난이도 측정값을 서로 비교함으로써 집단 사이의 차이를 좀 더 구체적으로 살펴볼 수 있다. [그림 8]에서 가로축은 각 문항을, 세로축은 DIF 값을 나타내는데, 일부 문항의 구체적인

[표 9] 2, 4, 6학년의 문항별 DIF 측정값
[Table 9] DIF measures for 2nd, 4th, and 6th graders on selected items

학년 \ 문항	1C	8	9	12A	12C	13	14	16	18	25
2	−3.5890	3.7296	−0.1835	−1.3624	0.4992	−0.4635	0.5632	−2.5590	−2.5092	−1.7399
4	−2.4419	7.6593	0.1372	−1.3472	3.4812	1.2351	1.0094	−1.3472	−1.1582	−1.2510
6	−2.2263	4.9841	0.4460	−2.2263	4.9841	1.3988	1.1914	−1.4192	−1.4192	−1.2204
전체	−2.7157	5.7475	−0.0191	−1.5387	3.3388	0.6374	0.7564	−2.0355	−1.8989	−1.5387



[그림 8] DIF 그래프
[Fig. 8] DIF graph

DIF 값은 [표 9]를 통하여 확인할 수 있다.

[표 9] 및 [그림 8]에서 문항의 DIF 값이 크고 그래프의 위쪽에 위치할수록 해당 문항이 그 학년 학생들에게 어려웠음을 나타낸다. 또한 [그림 10]에서 각 문항에 해당하는 학년별 점들의 간격이 클수록 그 문항에 대한 반응이 학년별로 차이가 많이 난다고 해석할 수 있다. 예를 들어, 12A문항의 난이도 측정값은 4학년(-1.3472) > 2학년(-1.3624) > 6학년(-2.2263)의 순서이므로 4학년에게 상대적으로 더 어려운 반면, 6학년에게는 더 쉬웠다고 볼 수 있다. 반면, 12C문항의 난이도 측정값의 순서는 6학년(4.9841) > 4학년(3.4812) > 2학년(0.4992)이므로 6학년 학생들에게 상대적으로 더 어려웠고, 2학년에게는 더 쉬웠다고 해석된다. 또한 12A에 비하여 12C문항의 간격이 더욱 크게 드러나므로 12C문항이 학년별 차이를 보여줄 수 있는 문항이 될 수 있다. 12A문항은 등호가 '같다'를, 12C문항은 등호가 '문제에 대한 답'을 뜻하는 것이 옳은지, 또는 틀린지를 판단하는 문항이다. 두 문항에 대한 각 학년의 DIF 측정값을 살펴보면, 6학년 학생들은 다른 학년에 비하여 등호가 '같다'를 의미하는지에 대해서는 더 쉽게 판단할 수 있는 반면, '문제에 대한 답'인지를 판단하는 데에는 더 어려움을 겪고 있다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 6학년 학생들이 다른 학년에 비하여 표준 맥락을 접한 경험이 많기 때문에 비록 등식 구조나 등식 해결 문항을 다른 학년보다 관계적으로 더 잘 해결할 수 있더라도, 다른 학년보다 더 쉽게 문제에 대한 답을 등호의 의미로 간주할 수 있다고 유추할 수 있다.

[그림 8]을 보면 전반적으로 2학년에 비하여 4학년이나 6학년에 해당하는 점이 더 아래에 위치하지만, 예외적으로 앞서 제시한 12C문항과 같이 6학년이나 4학년이 2학년에 비하여 더 위쪽에 위치한 경우도 발견할 수 있다. [표 9]는 6학년에 비하여 2학년 또는 4학년의 DIF 측정값이 더 낮은 문항들을 정리한 것으로, 등호 정의 유형에 관한 문항들이 많이 포함되어 있다는 것을 알 수 있다. 이는 6학년 학생들은 2, 4학년에 비하여 상대적으로 등식 구조나 높은 관계적 추론이 요구되는 유형의 문항들을 쉽게 문제를 해결하는 반면, 등호 자체에 관한 문항에서는 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있다.

학년별 간격을 살펴보면, 높은 관계적 추론과 등호 정의 유형과 관련된 대부분 문항은 점들 사이의 간격이 비교적 떨어져 있다. 반면 등식 구조나 등식 해결, 문자 변수 유형에 관련된 대부분 문항들은 점들 사이의 간격이 좁으며 특히 문자 변수와 관련된 문항들은 학년별 점들이 조밀하게 모여 있어 차이가 뚜렷하게 나타나지 않는다. 따라서 전반적으로 높은 관계적 추론과 등호 정의 유형과 관련된 문항들이 2, 4, 6학년 학생들의 차이를 파악하는데 용이하게 사용될 수 있다는 것을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 Rasch 측정 모델을 사용하여 초등학교 2~6학년 학생들의 등호에 관한 지식이 어느 정도인지 살펴보았다. 주요 연구 결과를 토대로 결론 및 제언을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 대다수의 초등학교 2학년 학생들은 다른 학년의 학생들과 달리 등호를 연산적으로 이해하고 있다. 본 연구에서 학년별 등호 지식수준을 살펴보면([표 8] 및 [그림 6] 참조), 2학년 학생들의 등호 지식수준 분포는 다른 학년 및 전체 학생들과 차이가 있었는데, 전체 학생들은 약 80% 정도가 3수준 이상으로 최소한 등호가 같음을 의미한다는 것을 인지하고 있는 반면, 2학년의 경우 약 70% 학생들이 등호를 연산적으로 이해하고 있었다. 물론, 등식 구조나 등식 해결 유형의 문항에 대해서는 2학년 학생들이 이러한 유형을 다루어 본 경험이 상대적으로 부족하기 때문에 타 학년에 비하여 낮은 수준의 해결을 보일 수는 있다. 하지만 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 1학년 교과서에서 5+2=7의 덧셈 방정식을 '5 더하기 2는 7과 같습니다'로 읽는다는 것을 명확히 제시하고 있고 이것이 계속적으로 반복되어 학습된다는 점을 염두에 두었을 때(교육부, 2015), 비교적 등호 정의에 관한 내용을 가장 최근에 학습한 2학년 학생들이 문항 난이도 평균보다 낮은 능력을 보였다는 점은 주목할 필요가 있다. 이와 관련하여, 초등학교 3, 6학년 학생들의 양변 연산식에서의 문제 풀이 전략 유형과 등호 개념 발달을 조사한 강명희(2010)의 연구에서, 초등학교 1학년부터 배우기 시작하는 등호 개념이 6학년이 되어서도 크게 발달되지 않으며 오히려 학년이 올라갈수록 관계성을 간과하고 문제 풀이 기술만 익히는 가운데 잘못

된 등호 개념이 강화될 수 있다는 결론을 염두에 두었을 때, 저학년부터 등호에 관한 관계적 개념이 지속적으로 지도될 필요성을 적극적으로 고려해볼 필요가 있다.

둘째, 본 연구를 통해 문항 유형에 따라, 또는 같은 유형이라도 문항 내용에 따라 학생들의 반응 및 문항 난이도가 차이가 있다는 것을 발견할 수 있다. 예를 들어, 대체적으로 등호 정의 유형의 문항은 등식 구조나 등식 해결 유형보다 문항 난이도가 낮게 드러났는데 이는 등호 정의를 판단하거나 기술할 수 있다는 것이 성공적인 등식 해결을 보장하지 않음을 의미한다. 뿐만 아니라, 등호 정의 유형 내에서도 전반적으로 등호의 정의를 판단하는 문항에 비하여 서술하는 문항에 대한 난이도가 더 높게 드러났는데, 예외적으로 등호가 '문제에 대한 답'인지 판단하는 문항은 등호 정의 유형 가운데 가장 높은 난이도를 보였으며 심지어 6학년이 2, 4학년보다 더 높은 난이도를 드러냈다. 이러한 결과는 등호 지식의 정의 실태와 같은 등호 지식의 단면만을 살펴봄으로써 학생들을 파악하는 연구들에 큰 시사점을 주는데, 실제 비표준 구조 연산식 정답 반응 분석을 통하여 초등학생들의 등호 개념을 살펴본 선행 연구에 따르면(강명희, 2011), 많은 학생들이 등호를 관계적 개념으로 이해하고 있으면서도 사실상 정답을 도출할 때는 비관계적 전략을 사용하고 있었다. 따라서 학생들의 등호 이해를 발달시키기 위한 첫 단계가 현재의 수준을 정확히 파악하는 것임을 염두에 두었을 때, 등호 지식을 보다 복합적이고 체계적으로 측정할 수 있는 도구 및 방법이 개발될 필요가 있다.

셋째, 본 연구를 통해 전반적으로 초등학교 학생들은 높은 관계적 추론을 요구하는 문항을 해결하는데 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있다. 특히 높은 4수준으로 분류된 학생들조차도 이러한 문항을 성공적으로 해결할 확률이 매우 낮게 드러났으며([표 5] 참조), 특히 보상적 전략이 필요한 문항(예, 3번 문항)에 비하여 양변에 같은 수를 더하거나 곱하여도 동치가 유지됨을 이해해야하는 문항(예, 6번)을 학생들이 보다 어려워하였다. 사실상, 문자 변수가 포함된 n+n+n+2=17과 같은 등식 해결 문항이 외형적으로 보다 추상적인 형태임에도 불구하고, 이와 같은 결과는 계산하지 않고 관계적 추론만을 통하여 문제를 해결하는 것이 쉽지 않다는 것을 분명하게 알 수 있다. 이러한 연구 결과는 초등학교 3학년 학생들의 대수적 사고를 발달시키기 위한 교수 중재의 효과를 살펴본 연구에서(Blanton et al., 2015), 높은 관계적 추론 문항에 대한 사전 검사의 정답률이 10% 내외로 낮게 나타나며, 특히 교수 중재가 이루어진 후에도 계산하여 해결하는 학생들이 관계적 사고를 한 학생들의 비율과 유사하게 드러난 결과와 부합한다. 하지만, 이러한 문항에서 등호의 관계적 이해를 바탕으로 내재된 등식의 성질을 추론하는 것은 대수적 사고를 개발시키기 위한 필수적인 요소라는 점을 염두에 두었을 때(Blanton et al., 2011), 수학 수업에서 학생들이 수식을 해결할 때 무의식적으로 계산에 의존하는 습관에서 벗어나 등호의 관계적 이해를 바탕으로 등식의 전체 구조를 바라볼 수 있도록 지도할 필요가 있다.

넷째, 연구 결과에 따르면 문자 변수의 유무가 등식 해결의 어려움을 가중시키지 않는다는 것을 알 수 있다. 본 연구의 검사 문항 가운데 17번(8=6+□)과 25번(10=z+6) 문항은 동일하게 오른쪽에 연산이 있는 등식맥락이지만 전자는 준 변수(□)를 후자는 문자 변수(z)를 사용했다는 차이점이 있는데, 연구 결과 두 문항의 난이도와 학생들의 문제 해결 성공 확률이 유사하게 드러났다([표 5] 참조). 오히려 문자 변수를 사용한 25, 26, 27번 문항을 서로 비교했을 때 난이도 차이가 드러나는 것으로 보아 문자 변수가 사용된 횟수나 위치 등이 등식 해결의 어려움을 가중시켰다고 유추할 수 있다. 또한 세 개의 문자 변수 문항에 대해 학년에 따른 DIF 측정값 차이는 거의 없는 반면([그림 8] 참조), 수준에 따른 문제 해결 성공 가능성은 매우 큰 차이를 보였다([그림 3] 참조). 이와 같은 결과는 문자 변수가 포함된 등식 해결의 성공을 가늠하는 것은 학년이 아닌 등호 지식수준으로, 저학년이라도 등호를 관계적으로 이해한 학생들은 충분히 문자 변수가 포함된 등식을 성공적으로 해결할 가능성이 높다고 해석할 수 있다. 실제 어린 학생들의 변수 사용에 관한 연구를 살펴보면 6살의 어린 학생들조차도 세련되지 않지만 변수를 이해하여 사용할 수 있다는 가능성을 보여주고 있다(Blanton et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Gardiner, 2015). 따라서 현행 초등학교 수학 교육과정을 살펴보면 문자가 포함된 등식은 6학년 2학기 '정비례와 반비례'에서 도입되는데(교육부, 2015) 본 연구 결과를

고려하여 더욱 이른 학년에서의 도입 가능성 및 도입 방법에 대한 연구가 필요할 것으로 간주된다.

마지막으로, 본 연구는 Matthews 외(2012)와 유사한 검사 문항 및 대상 학년, 분석 방법 등을 적용하였지만, 연구 결과 전반적으로 문항 난이도 측정값이 다르며 일부 문항의 수준 또한 더 낮거나 높게 드러났다. 이는 연구 대상에 따라 등호 지식의 구인 지도 및 문항 수준이 달라질 수 있다는 것을 암시한다. 물론 Matthews 외(2012)는 등호 지식을 측정하기 위하여 체계적인 방법으로 구인 지도 및 통합된 검사 문항을 제시했기 때문에 의미 있으나, 세부적으로 본 연구 결과 우리나라 초등학생들의 경우 같은 맥락의 문제라도 연산의 종류, 미지수의 개수, 동치를 유지하는 변형의 모습 등이 문항 난이도에 영향을 미칠 수도 있음을 유추할 수 있었다. 따라서 본 연구의 바탕이 된 Matthews 외(2012)의 등호 구인 지도는 우리나라 학생들에게 보다 적합할 수 있도록 등호 지식에 영향을 줄 수 있는 또 다른 요인을 검증할 수 있는 연구가 계속적으로 이루어져 수정, 보완되거나 세분화될 필요가 있다.

참 고 문 헌

강명희 (2010). 양변 연산식에서 문제풀이전략 유형과 학생들의 등호개념 발달 연구: 정답반응은 등호의 관계적 개념을 뜻하는가?. 학습자중심교과교육연구 10(2), 15-33.

Kang, M.H. (2010). Analysis of children's two sides of equivalence problems solving strategies and development of the concept of equality: does a correct response imply the relational concept of equal sign?. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction 10*(2). 15-33.

강명희 (2011). 비표준 구조 연산식 정답반응 분석을 통한 초등학생들의 등호개념 이해 연구. 열린교육실행연구 14, 17-30.

Kang, M.H. (2011). Study of elementary school students' concept of equal sign through the analysis of their correct responses to nonstandard structure of equivalent equation problems. *Open Education 14*, 17-30.

교육부 (2015). 수학 1-1. 서울: (주)천재교육.

Ministry of Education (2015). *Korean national elementary mathematics 1-1*. Seoul: Chunjae Education.

교육부 (2015). 수학 6-2. 서울: (주)천재교육.

Ministry of Education (2015). *Korean national elementary mathematics 6-2*. Seoul: Chunjae Education.

기정순, 정영옥 (2008). 등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구. 학교수학 10(4), 537-555.

Ki, J.S. & Chong, Y.O. (2008). The analysis of elementary school students' understanding of the concept of equality sign in contexts and the effects of its teaching methods. *School Mathematics 10*(4), 537-555.

방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. 수학교육 50(1), 41-59.

Pang, J.S. & Choi, J.Y. (2011). An analysis of the whole numbers and their operations in mathematics textbooks: focused on algebra as generalized arithmetic. *The Mathematical Education 50*(1). 41-59.

지은림, 채선희 (2000). Rasch 모형의 이론과 실제. 서울: 교육과학사.

Ji, E.L. & Chae, S.H. (2000). *Applying the rasch model*. Seoul: Kyoyookbook.

하수현, 이광호 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 사례 연구. 수학교육 50(2), 213-231.

Ha, S.H, & Lee, G.H. (2011). Case study on the 6th graders' understanding of concepts of variable. *The Mathematical Education 50*(2). 213-231.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education 46*(1), 39-87.

Bond, T. G., & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences*. Mahwah, NJ: Routledge.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning 17*, 34-63.

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences 38*, 61-67.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school.* Port smouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Berman P., & Pligge, M. (2005). *Developing algebraic reasoning in the elementary school.* In T. Romberg, T. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), Understanding mathematics and science matters (pp.81-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics 12*(3), 317-326.

Li, X, Ding, M, Capraro, M. M, & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: comparative analysis of teacher guides and student texts in China and United States. *Cognition and Instruction 26*(2), 195-217.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education 43*(3), 316-350.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why don't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development 76*, 883-899.

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., & Dunwiddie, A. E. (2015). Arithmetic practice can be modified to promote understanding of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology 107*(2), 423.

Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics 30*(1), 61-80.

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2010). Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. *Journal of Educational Psychology 102*, 381-394.

Rittle-Johnson, B. (2006). Promoting transfer: Effects of self-explanation and direct instruction. *Child Development 77*, 1-15.

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior 32*(2), 173-182.

An Analysis of Elementary Students' Understanding of the Equal Sign by Using Rasch Model

JeongWon Kim
Shintanjin Elementary school, Daejeon, Korea
E-mail : nymph019@hanmail.net

JeongSuk Pang†
Korea National University of Education, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

JiYoung Choi
Youngnam Elementary school, Seoul, Korea
E-mail : ji2006@empal.com

Given the importance of understanding the equal sign in developing early algebraic thinking, this paper investigated how a total of 695 students in grades 2~6 understood the equal sign. The students completed a questionnaire with three types of items (equation structure, equal sign definition, and open equation solving) based on the construct map by four different levels of understanding the equal sign. The questionnaire was analyzed by Rasch model. The results showed that about 80% of the students were at least Level 3 which means a basic relational understanding of the equal sign. However, the success rates varied across grades and it was noticeable that about 70% of the second graders remained at Level 1 or 2 which maintains an operational understanding of the equal sign. The results of item types demonstrated that item difficulty for the advanced relational thinking was the highest and this is the same even for the Level 4 students. This paper is expected to investigate elementary school students' understanding of the equal sign and provide implications of how to deal with the equal sign in the elementary school.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Classification : 97C30
* Key Words : Rasch model, understanding of the equal sign, algebraic thinking
† Corresponding author