대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 4, 715 ~ 730. Nov 2016

대수와 기하의 연결에 관한 Descartes의 관점 재조명 연구[1)]

반 은 섭* · 신 재 홍** · 류 희 찬***

본 연구는 대수와 기하의 영역을 연결하여 기존의 틀을 새로운 관점에서 이해하고 선대의 수학자들이 해결하지 못한 문제를 다룰 수 있었던 Descartes의 관점을 분석하고 적용 가능한 교수학적 시사점을 찾는 것을 목적으로 하고 있다. 연구의 목적을 달성하기 위하여 대수와 기하의 수학적 연결성을 기반으로 하고 있는 해석기하학의 기본 원리와 전개 방식의 특징을 조명하였으며, 국내·외 교육과정 문서 및 선행 연구를 분석하여 해석기하학의 관점에서 방정식의 기하학적 해법이 갖는 의미를 고찰하였다. 이를 바탕으로 좌표평면에 표현된 도형들의 교점으로 방정식의 기하학적 해를 제시하면서 대수와 기하의 수학적 연결성에 관한 통찰의 기회를 제공할 수 있는 가능성에 대하여 논의하였으며, 두 원뿔곡선의 교점을 활용한 삼차방정식의 기하학적 해법을 탐색 단계, 해결 단계, 반성 단계의 일련의 과정으로 해석하고 이를 교수학적으로 활용할 수 있는 방법을 제시하였다.

I. 학교수학과 수학적 연결성

수학의 서로 다른 내용 간의 연결은 학교 수학에서 중요하게 다루어지고 있으며, 특히 학교 수학에서 가장 큰 부분을 차지하고 있는 대수와 기하 영역 영역의 연결이 매우 강조되고 있는 것을 확인할 수 있다(교육부, 2015; Atiyah, 2001; CCSSI, 2010; GDE, 2014; MDE, 2013; NCTM, 1989, 2000).

교육부(2015)는 수학의 각 영역의 내용을 자연스럽게 연계하여 수학적 지식을 통합할 수 있는 방향을 제시하였고, 교수-학습을 하는 과정에서 이러한 연계성을 고려하여 지도할 것을 강조하고 있다. 또한 NCTM(1989, 2000)은 학생들이 서로 다른 영역의 연결성 및 수학적 아이디어 간의 연결성을 이해할 수 있을 때, 수학을 통합된 전체로 보게 된다고 하였으며, 학교 수학에서 가장 중요한 연결은 대수와 기하 영역의 연결이라고 하였다.

CCSSI(2010)에서도 고등학교의 대수를 함수, 기하와 연결하여 해석할 것을 강조하고 있으며, 고등학교 기하에서는 <connection to equation>항목을 별도로 제시하여 방정식의 해를 기하학적으로 해석할 수 있는 기회를 학생들에게 제공하고 있다. 이와 같은 내용을 반영하여 최근에 미

* 홍덕고등학교, hymnes@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr
1) 본 논문은 제1 저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 포함하고 있음.

국의 각 주에서 나온 교육과정을 보면 대수와 기하에 관한 연결을 매우 강조하고 있는 것을 확인할 수 있다(예, GDE, 2014; MDE, 2013).

한편, Atiyah(2001)는 “when you pass over into algebraic calculations, essentially you stop thinking; you stop thinking geometrically, you stop thinking about the meaning”이라는 표현을 통하여 대수적 조작과 더불어 기하학적 사고를 강조하였으며, 아인슈타인(Einstein)도 다음과 같은 글을 통하여 시각적 표현이 언어 및 기호 조작 이상의 역할을 할 수 있다고 주장하였다(Hadamard, 1945).

> The words or the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain sign and more or less clear image which can be ‘voluntarily’ reproduced and combined.(p. 142)

이와 같은 관점들은 기하학적인 표현이 수식을 바탕으로 하고 있는 대수적 표현에 수학적인 의미를 부여할 수 있다는 것을 의미하며, 다양한 연구의 결과에서 이러한 주장을 뒷받침해주고 있는 근거를 확인할 수 있다.

Cuoco, Goldenberg & Mark (1996)는 수학자들이 수학적 지식을 이해하거나, 새로운 개념을 창조하는데 활용되는 수학적 사고의 방법들을 기하학적 접근과 대수학적 접근으로 구분하여 정리한 내용을 바탕으로 학교 수학에서는 대수적 사고의 방법과 기하학적 접근의 연결 방법을 개발하고 그것들을 활용할 수 있도록 지원해야 한다고 주장하였다. 그리고 이러한 수학적 사고의 방법들을 통하여 수학적 아이디어를 상호 연결하는 능력을 함양할 수 있도록 지원하는 것이 무엇보다 필요하다는 차원에서 교육과정의 개정 방향을 제시하였다.

또한 표, 대수식, 그래프와 같은 다양한 표상의 연결을 통하여 함수 및 방정식의 개념을 학습하는 과정을 다루었거나, 함수나 방정식과 관련된 문제의 해결을 위하여 서로 다른 표상들 간의 연결을 활용한 연구(Knuth, 2000; Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi, 1993; Mousoulides & Gagatsis, 2004)에서는 다른 형태의 표상들의 연결을 통하여 함수나 방정식 개념의 심상을 구성할 수 있으며, 수학적 이해를 확장시킨다는 차원에서 다양한 표상의 연결의 중요성을 강조하고 있다.

이와 같이 학교 수학에서 대수와 기하의 연결은 매우 중요한 교수학적 관점이 될 수 있다는 전제하에, 본 연구에서는 대수와 기하의 연결 고리를 마련했다는 점에서 수학사에 큰 공헌을 한 17세기의 프랑스의 수학자 Descartes의 관점을 재조명하고, 교수학적 시사점을 찾는 것을 목적으로 하고 있다. 이를 위하여 해석기하학의 기본 원리와 전개 방식의 특징을 살펴보았으며, 국내·외 교육과정 문서 및 해석기하학을 다루고 있는 선행 연구에 대한 분석을 하였다. 특히, 대수 곡선들의 교점으로 방정식의 해를 제시하는 해석기하학의 관점(Allaire & Bradley, 2001)을 바탕으로, 원뿔곡선을 활용하여 기하학적인 해를 구성할 수 있는 방법을 소개하고 삼차방정식을 기하학적으로 해석하여 대수와 기하의 수학적 연결성에 관한 통찰의 기회를 제공할 수 있는 가능성을 고찰해보고자 한다.

II. 대수와 기하의 연결: Descartes의 관점

해석기하학은 대수적 조작을 활용하는 기하학의 한 방법으로, 좌표의 개념을 도입하여 점을 실수의 순서쌍 (x, y)으로 대응시키고 모든 점

들의 순서쌍으로 이루어진 곡선이 나타내는 방정식 $f(x, y)=0$의 대수적, 해석적 성질을 통하여 그에 대응된 곡선의 기하학적 성질을 연구하는 것이다(우정호, 2007; Eves, 1995).

해석기하학의 진정한 본질은 기하학적인 대상을 그에 대응하는 대수적인 표상으로 바꾸어 해석하는 데 있다. 이와 같은 해석기하학의 방법론은 대수적 기호 및 처리 과정이 발전되고 난 이후에 본격적으로 연구되었으며, 17세기 프랑스의 두 수학자 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)와 페르마(Pierre de Fermat, 1601-1665)에 의하여 창시되었다고 받아들여지고 있다(Eves, 1995).

Descartes와 Fermat는 동시대에 비슷한 생각을 통하여 대수학과 기하학을 연결하였지만, 해석기하학이라는 새로운 분야에 접근하는 방법과 이를 표현하기 위하여 사용한 기호는 서로 달랐다. Fermat는 대수방정식을 기하학적으로 표현했을 경우에 어떤 곡선이 되는지에 더 관심을 갖고 있었으며, 비에트(Viète) 기호를 사용하여 미지수가 두 개인 방정식에 따른 곡선의 자취를 주로 연구하였다. 반면, Descartes는 오늘날 우리가 사용하는 것과 같이 알파벳 a, b, c를 매개변수나 상수로 사용하고, x, y, z를 이용하여 미지수를 다루었으며, 곡선을 따라 역학적으로 움직이는 기하학적인 자취를 활용하여 대수방정식을 연구하는 방법을 주로 사용하였다(Dennis, 1997, 2000; Eves, 1995; Neovius, 2013).

Descartes와 Fermat는 양수의 값만을 사용한 좌표를 통하여 곡선을 다루었으나, 이후 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)가 수의 범위를 실수로 확장하고 음의 축을 사용하여 네 개의 사분면에 곡선을 표현하게 되면서 해석기하학의 형태가 완성되었다. 또한 Newton과 Leibniz는 변수들의 관계를 좌표평면에 표현하여 함수와 곡선을 시각화할 수 있었으며, Fermat가 방정식을 곡선으로 표현하면서 연구했던 극대와 극소 이론을 바탕으로 미적분학의 이론을 최초로 발전시킬 수 있었다(우정호, 2007; Neovius, 2013).

해석기하학을 비롯한 수학의 다양한 분야에서 Fermat의 연구 업적은 많았으나, 대부분이 17세기 후반까지 출판되지 않았던 반면, Descartes는 그의 철학적 방법의 전반적인 내용을 담은 <방법서설(Discours de la methode)>을 세 권의 부록과 함께 1637년에 출간하였는데, 세 권의 부록 중 마지막 권인 <La Géometrie, 기하학>의 내용을 통하여 해석기하학과 관련된 Descartes의 업적을 확인할 수 있다. Descartes가 남긴 <La Géometrie, 기하학>에 수록된 해석기하학의 내용이 후대에 계승되었으며, 차세대의 수학의 발전에 많은 영향을 미치게 되었다(Grabiner, 1995; Neovius, 2013).

<La Géometrie, 기하학>은 대수적인 방법을 통하여 기하 문제에 접근하는 방법을 세 부분으로 나누어 제시하고 있다. 처음 두 개의 부분은 '산술 계산을 기하학과 관련짓는 방법'을 다루고 있으며, 세 번째 부분에서 방정식의 차수를 활용하여 대수 곡선을 분류하는 중요한 내용을 담고 있다(Dennis, 1997; Descartes, 1954; Neovius, 2013).

<La Géometrie, 기하학>에서 Descartes는 고대 그리스의 수학자 파푸스(Pappus)가 편찬한 <Mathematical Collection, 수학 집성>[2]에 수록되어 있는 기하 문제를 대수방정식을 통하여 해결하면서 그의 해석기하학의 이론을 전개하였다(Descartes, 1954; Grabiner, 1995; Neovius, 2013).

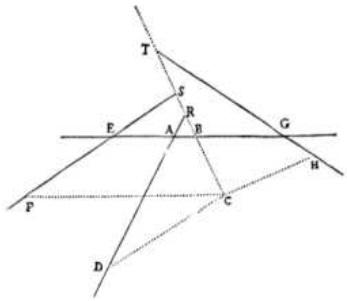
Pappus의 문제는 "평면에 여러 개의 선분과 선분의 개수만큼의 각이 주어져 있을 때, 평면 위의 점 C에 대하여 주어진 각을 이루도록 각 선

2) 유클리드(Euclid) 및 아폴로니우스(Apolonius)와 같은 고대 그리스 수학자들의 연구 결과를 집대성하여 Pappus가 A.D 320년경에 편찬한 책으로 고대 그리스의 기하학에 관하여 매우 중요한 정보를 담고 있는 역사적 자료이다. 총 여덟 권으로 되어 있으며, Descartes가 그의 해석기하학의 이론을 전개하면서 활용한 'Pappus의 문제'는 제 7권에 수록되어 있다(Eves, 1995).

분들의 끝점을 잇는 새로운 선분을 작도했을 때, 새롭게 작도한 선분들 사이의 곱의 비율이 일정하게 되는 점 C의 자취를 찾는 문제"이다 (Descartes, 1954, p. 27).

처음에 주어진 직선의 개수가 세 개 혹은 네 개일 경우에 점의 자취가 원뿔곡선이 된다는 것을 Apolonius가 이미 해결하였으며, Pappus는 이 문제를 수없이 많은 새로운 곡선을 암시하는 문제로 더욱 일반화시켰다. 그리고 직선이 몇 개가 있어도 점 C의 자취는 언제나 하나의 특정한 곡선을 결정할지도 모른다고 생각하였으나, 일반해를 얻기 위한 시도는 성공하지 못했다. 오랜 세월이 흐른 후, Descartes는 세 개 및 네 개의 선에 관한 자취 문제를 대수적인 방법으로 다루면서 자신의 방법이 가진 힘에 크게 감동 받았으며, 고대 그리스 수학자들과는 다른 방법으로 일반해에 접근하였다(Boyer & Merzbach, 1991; Eves, 1995).

[그림 II-1]은 처음에 주어진 선분이 네 개인 Pappus의 문제(4선 문제)를 해결하면서 Descartes가 그린 그림이다.



[그림 II-1] Descartes가 Pappus의 문제를 해결하면서 그린 그림 (Descartes, 1954, p. 27)

Descartes는 이 그림을 통하여 평면에 위치가 고정된 네 개의 선분(AB, AD, EF, GH)과 네 개의 각(*)이 주어져 있을 때, 평면 위의 점 C에 대하여 선분들 CB, CD, CF, CH와 처음에 주어진 선분들이 이루는 각 CBA, CDA, CFE, CHG가 처음에 주어졌던 각(*)을 이루면서 $\overline{CB} \cdot \overline{CF}$의 값과 $\overline{CD} \cdot \overline{CH}$의 값의 비율이 일정하게 되는 점 C의 자취를 찾았다(Descartes, 1954, p. 27, p. 60).

이 문제를 해결하기 위하여 Descartes는 분석법[3]을 사용하였다. 문제가 해결되었다고 가정하고, 처음 주어진 선분들 중 하나인 선분 AB의 길이와 주어진 조건을 만족시키도록 작도한 선분들 중 하나인 선분 BC의 길이를 각각 x, y라 놓았다[4]. 그리고 처음에 주어진 각 선분의 연장선과 선분 AB의 연장선이 만나서 생기는 교점 E, G와 선분 BC의 연장선이 만나 생기는 교점 R, T, S에 대하여, 각 점을 잇는 선분의 길이를 x와 y에 관한 식으로 나타낼 수 있었다.

[그림 II-1] 에서 ∠CBA는 이미 주어져 있으므로 ∠ABR을 알 수 있고, 선분 AB와 선분 AD는 처음부터 위치가 고정되어 있었으므로 ∠RAB를 알 수 있다. 따라서 삼각형 ARB의 모든 각을 알 수 있으며, 삼각비를 이용하면 삼각형 ARB의 세 개의 변 사이의 길이의 비를 알 수 있다. $\overline{AB} : \overline{BR} = z : b$라고 하면, $\overline{AB} = x$이므로, $\overline{BR} = \frac{bx}{z}$이다. [그림 II-1]에서 점 B는 점 C와 점 R사이에 있으므로 $\overline{CR} = y + \frac{bx}{z}$이

3) 수학적 발견술(heuristics) 가운데 하나로 가장 오래 전부터 사용되어 온 방법이 분석법이다. 분석법은 B.C 6세기 경 고대 그리스 피타고라스 학파의 수학자들에 의하여 사용되기 시작한 것으로 받아들여지며, Platon을 거쳐 A.D 300년경 Pappus에 의하여 체계적으로 정리되었다. 이후 17세기에 Descartes는 고대 그리스 수학자들이 기하에 국한시킨 분석법을 대수방정식을 이용한 문제해결 방법으로 확장시켰다. 분석법은 구하고자 하는 것을 이미 구한 것처럼, 증명해야 할 것을 이미 증명되어 참인 것으로 가정하고 선행조건을 찾아 초기의 조건에 이르는 방법이다(강문봉, 1992; 김성준, 2007).

4) Descartes는 x좌표와 y좌표의 선택을 신중하게 했으며, 양수인 좌표만을 사용했다. 또한 해당 문제의 기하학적 상황에 맞는 (현대적인 의미의) 사교 좌표(oblique coordinates)를 사용하였다(Dennis, 1997).

다(단, 점 R이 점 C와 점 B사이에 있으면 $\overline{\mathrm{CR}}=y-\frac{bx}{z}$ 이며, 점 C가 점 B와 점 R사이에 있으면 $\overline{\mathrm{CR}}=-y+\frac{bx}{z}$ 이다).

또한, ∠CDA는 이미 주어져 있고, 선분 BC는 선분 RB의 연장선이므로, 삼각형 DRC의 모든 각을 알 수 있으며, 위와 마찬가지로 삼각비를 이용하여 선분 CR의 길이와 선분 CD의 길이의 비를 알 수 있다. $\overline{\mathrm{CR}}:\overline{\mathrm{CD}}=z:c$라고 하면, $\overline{\mathrm{CR}}=y+\frac{bx}{z}$이므로, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{z^2}$임을 확인할 수 있다. z, b, c의 값은 상수이기 때문에 결국 선분 CD의 길이를 x와 y에 대한 일차식으로 표현한 것이며, Descartes는 같은 방식으로 선분 CF, CH의 길이를 x와 y에 관한 일차식으로 나타낼 수 있었다. 선분 CB, CD, CF, CH의 길이는

$$\overline{\mathrm{CB}}=y$$
$$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{czy+bcx}{z^2}$$
$$\overline{\mathrm{CF}}=\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$$
$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$$

이며, $\overline{\mathrm{CB}}\cdot\overline{\mathrm{CF}}$와 $\overline{\mathrm{CD}}\cdot\overline{\mathrm{CH}}$의 비율이 1이 되도록 식을 세우면, 다음과 같은 방정식

$$y^2=\frac{(cfglz-dekz^2)y-(dez^2+cfgz-bcgz)xy+bcfglx-bcfgx^2}{ez^3-cgz^2}\quad\cdots(*)$$

을 얻을 수 있다. 위의 식 (*)에서 나온 상수 z는 그대로 사용하고, 나머지 상수를 대수적으로 조작하여 m, n, o, p를 사용하여 정리하면,

$$y=m-\frac{n}{z}x+\sqrt{m^2+ox+\frac{p}{m}x^2}\quad\cdots(**)$$

와 같이 방정식을 간단히 나타낼 수 있다. Descartes는 식 (**)를 만족시키는 점 C의 자취[5]를 작도하여, 점의 자취가 원뿔곡선이 된다는 것을 확인할 수 있었다. 특히 x^2의 계수 $\frac{p}{m}$가 0이 될 경우, 점 C의 자취는 포물선이 되며, $\frac{p}{m}$가 양수가 될 경우, 점 C의 자취는 쌍곡선이 되고, $\frac{p}{m}$가 음수일 경우에는 타원(경우에 따라서는 원)이 된다는 것을 보였다(Descartes, 1954, pp. 60-64, p. 67).

Descartes는 네 개의 선분에 관한 Pappus의 자취 문제의 해법을 다섯 개 이상의 선분에 대한 문제로 일반화하여 Pappus의 문제를 다음과 같이 분류하였다(Descartes, 1954, pp. 56-59; Neovius, 2013). Pappus의 문제에서 선의 개수가 $3, 4, 5(non-parallel)$개인 경우에는 결과로 생기는 자취의 방정식이 x, y에 관한 일차나 이차 방정식이 되며, 직선과 원으로 작도가 가능하다. 이러한 문제를 제 1종의 방정식 문제로 분류하였다.

또한 $5(parallel), 6, 7, 8, 9(non-parallel)$개의 선이 있는 경우의 자취의 방정식은 x, y에 관한 삼차방정식 혹은 사차방정식이 되며, 원뿔곡선의 교점을 이용하여 작도가 가능하다. 이는 제 2종의 방정식 문제에 해당한다. 마지막으로 선의 개수가 $9(parallel), 10, 11, 12, 13(non-parallel)$개인 경우에 자취의 방정식은 x, y에 관한 오차 혹은 육차의 방정식이 되며, 곡선을 작도하기 위해서는 기존에 알려진 원뿔곡선 이외의

5) 사교 좌표계에서의 자취이다.

<표 II-1> Pappus 문제에 대한 Descartes의 분류(Neovius, 2013)

Pappus의 문제에서 선분의 수	자취방정식의 차수	자취의 작도를 위해 필요한 곡선들	(방정식의) 분류
$3,4,5(non-parl)$	≤ 2	직선과 원	1
$5(parl),6,7,8,9(non-parl)$	≤ 4	원뿔곡선의 교점	2
$9(parl),10,11,12,13(non-parl)$	≤ 6	cartesian parabola와 원의 교점	3

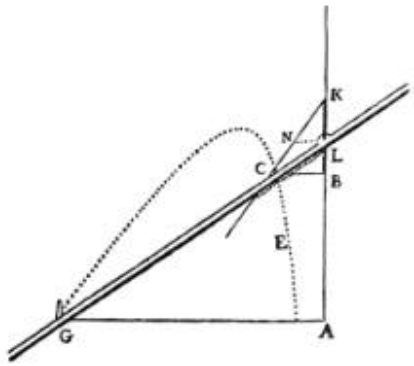
$$y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy \cdots (***)$$ 6)

와 같은 방정식으로 표현되는 새로운 곡선(cartesian parabola)이 필요하다. Descartes는 이와 같은 종류의 문제를 제 3종의 방정식 문제로 분류했다(<표 II-1>).

고대 그리스 시대부터 작도에 이용되었던 도구는 눈금이 없는 자와 컴퍼스였지만, Descartes는 “constructible(작도 가능)”의 의미를 두 개 혹은 세 개의 직선의 교점을 움직이면서 또 다른 곡선을 그리는 것으로 확장하여 해석하였다. 그는 원뿔곡선 역시 전통적인 작도법으로는 그릴 수 없으며, 기구를 사용하여 그릴 수 있다고 하면서 복잡한 곡선의 작도는 연속적으로 움직이도록 제작된 기계적 도구를 활용하여 작도할 수 있다고 생각했다(Dennis, 2000; Descartes, 1954, p. 43; Grabiner, 1995).

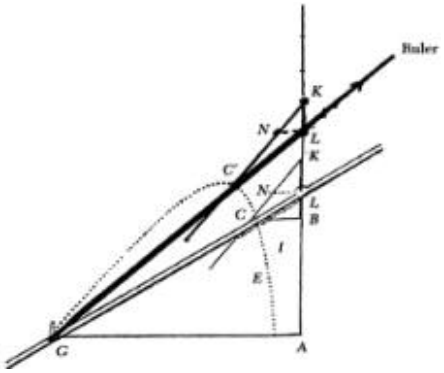
제작된 도구를 사용하여 곡선을 그릴 수 있다는 Descartes의 발상은 고전적인 그리스의 전통과는 구별되는 것이었으므로 그 당시 학자들에게 도구를 활용한 수학적 탐구에 대한 관심을 불러일으키기도 하였다(Dennis, 2000).

[그림 II-2(a)]는 쌍곡선을 작도할 수 있도록 제작된 Descartes의 기구이다. 이 그림에서 눈금이 없는 자 GL이 평행하지 않은 하나의 직선(선분 AB의 연장선)과 점 L에서 만나고 있으며, AB의 연장선 위에 선분 KL있다. 또한 ∠NKL이 일정한 선분 KN을 생각하여, 마치 점 L을 하나의 꼭짓점으로 하는 삼각형 KNL이 AB의 연장선을 따라 위 아래로 움직인다고 하면, 눈금이 없는 자 GL이 점 G주위를 회전하면서 KN의 N방향으로의 연장선과의 교점 C가 생긴다. [그림 II-2(b)]를 통하여 또 다른 교점 C′이 생기는 원리를 확인할 수 있다(Grabiner, 1995).



[그림 II-2 (a)]

6) Descartes가 ‘Pappus의 문제’에서 선분이 다섯 개 있을 경우로 확장하여 문제를 해결하면서 유도한 방정식이다. 이 방정식은 Descartes가 이미 알고 있었던 원뿔곡선의 방정식이 아니었으며, 그가 만든 기구를 통하여 구현이 가능했던 곡선을 나타내는 방정식이다. Descartes의 이 곡선은 ‘Pappus 문제’의 해결과 더불어 대수적으로 풀 수 없는 오차 이상의 방정식에 대한 기하학적 해를 제시하는 과정에서 중요한 역할을 한 곡선이며, 보통 cartesian parabola 혹은 cubical parabola라고 부른다(Grabiner, 1995; Neovius, 2013).



[그림 II-2 (b)]

[그림 II-2] Descartes의 쌍곡선 작도 기구 및 작동 원리(Descartes, 1954, p. 50; Grabiner, 1995)

Descartes는 이와 같은 기구를 사용하여 작도한 곡선으로부터 미지수 x, y와 상수 a, b, c를 사용하여 다음과 같은 쌍곡선의 대수방정식을 유도할 수 있었다.

먼저, $\overline{\mathrm{BA}}=x, \overline{\mathrm{CB}}=y$, $\overline{\mathrm{GA}}=a$, $\overline{\mathrm{KL}}=b$, $\overline{\mathrm{NL}}=c$라고 하면, $\overline{\mathrm{NL}}:\overline{\mathrm{KL}}=\overline{\mathrm{CB}}:\overline{\mathrm{BK}}$ 이므로, $\overline{\mathrm{BK}}=\frac{b}{c}y$이며, $\overline{\mathrm{BL}}=\frac{b}{c}y-b$, $\overline{\mathrm{AL}}=x+\frac{b}{c}y-b$임을 알 수 있다.

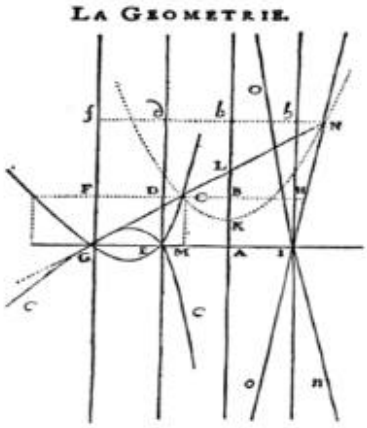
또한, $\overline{\mathrm{CB}}:\overline{\mathrm{LB}}=\overline{\mathrm{AG}}:\overline{\mathrm{LA}}$이므로,

$y:\frac{b}{c}y-b=a:x+\frac{b}{c}y-b$이다. 이 비례식을 통하여 나온 식 $\frac{ab}{c}y-ab=xy+\frac{b}{c}y^2-by$를 정리하면, 쌍곡선의 방정식

$$y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$$

를 얻을 수 있다. Descartes는 이 방정식을 통하여 기구를 사용하여 작도한 곡선 $\widehat{\mathrm{EC}}$가 쌍곡선이 된다는 것을 알 수 있었으며, 이 곡선을 제 1종에 해당하는 곡선으로 분류하였다(Descartes, 1954, pp. 52-55).

한편, Descartes는 제 3종으로 분류되는 방정식을 기하학적으로 표현하기 위하여 앞에서 제시한 (***)과 같은 식으로 표현되는, 원뿔곡선 이외의 새로운 곡선(cartesian parabola)을 작도할 필요가 있었는데, 그는 [그림 II-2]의 쌍곡선을 작도하기 위한 기구에서 선분 CNK 대신에 선분 KB를 축으로 하는 포물선을 사용하여 움직이는 포물선과 직선의 교점으로 이루어진 곡선을 작도할 수 있었다([그림 II-3]).



[그림 II-3] cartesian parabola(Descartes, 1954, p. 86)

곡선에 대한 Descartes의 관심은 더 높은 차수의 방정식의 근을 작도하기 위하여 [그림 II-3]의 곡선을 차례로 이용하는 것이었다. Descartes는 이미 16세기에 이탈리아 수학자들에 의해 밝혀진, 삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식을 알고 있었지만, 그가 제작한 기구를 통하여 작도할 수 있는 원뿔곡선과 그들의 교점을 활용한 기하학적 접근 방식에 관심을 갖고 있었다.

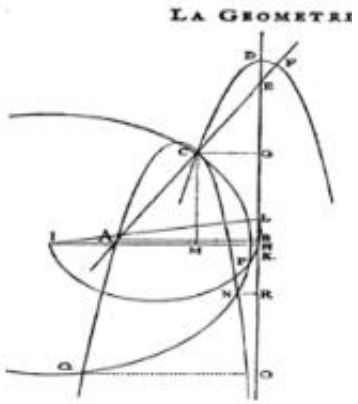
특히 <La Géometrie, 기하학>의 마지막 부분은 대수적으로 풀 수 없는 오차 이상의 방정식을 해결하기 위하여 기하학적으로 접근하는 내용으로 구성되어 있다. Descartes가 육차 방정식을 해결하기 위하여 사용한 곡선은 우리가 쉽게 생각

할 수 있는 $y=x^3$과 같은 쉬운 곡선이 아닌, 제작된 도구를 활용하여 작도한 cartesian parabola와 원의 교점이었다(Descartes, 1954; Grabiner, 1995; Neovius, 2013).

[그림 II-4]에서 $q>\frac{1}{4}p^2$라는 조건에서의 육차 방정식

$$y^6-py^5+qy^4-ry^3+sy^2-ty+u=0$$

의 기하학적 해를 확인할 수 있다(Descartes, 1954, p. 221).



[그림 II-4] 육차 방정식의 기하학적 해
(Descartes, 1954, p. 222)

Descartes는 cartesian parabola의 일부분인 ACN과 원 호 CNP의 여섯 개의 교점을 이용하여 방정식의 해를 표현하였고, 작도된 도형들의 교점이 여섯 개보다 적을 경우에는 해당 교점이 실근이 되며, 그 이외의 근은 허근이 된다고 제시하였다(Descartes, 1954, pp. 225-226).

III. Descartes의 관점과 학교수학의 관련성

이상에서 살펴본 내용들을 종합하면, Descartes는 Pappus의 문제를 통하여 기하학적 문제를 대수방정식의 용어로 환원시키고 대수방정식을 만족시키는 곡선을 작도한 후 최종적인 기하학적인 해를 제시하였으며, 다른 한편으로는 대수방정식의 기하학적 해법에도 해석기하학의 방법을 활용하였다. Descartes는 곡선을 연구하면서 반드시 곡선에 대응하는 방정식을 같이 연구하였고, 문제 해결을 위하여 기하와 대수의 장점을 종합하여 해석하였으며(Descartes, 1954, p. 8; Grabiner, 1995), <La Géometrie, 기하학>의 내용을 통하여 대수와 기하의 연결을 근간으로 하는 새로운 수학의 방법론을 창시한 것이다.

이와 같은 해석기하학의 방법론은 대수식에 대한 기하학적 해석을 강조했던 아랍 수학자들의 시도[7]와 연장선상에 있다고 할 수 있다. 특히 방정식의 기하학적 해에 관해서는 아랍의 수학자들과는 달리 좌표의 개념과 현대적인 대수의 표기법을 활용하여 방정식의 기하학적 해를 대수적으로 다양하게 변형하여 재해석하고 있다는 점에서 주목할 만하며, 아랍의 수학자들이 활동하던 당시에 대수적으로 해결할 수 없었던 삼차방정식을 해결하기 위하여 기하학적으로 접근한 것과 마찬가지로 대수적으로 해결할 수 없었던 오차 이상의 방정식에 대한 해법의 단서를 기하학에서 찾았다는 데 큰 의의가 있다고 할 수 있다(Wagner, 2013).

해석기하학은 대수방정식에 의해 좌표평면에 표현되는 곡선에 대한 연구로 기하학의 연구 방

7) 중세 시대의 아랍의 수학자들은 방정식의 기하학적인 해석에 관심이 많았으며, 특히 오마르 카얌(Omar Khayyam, 1048-1131)의 경우, 삼차방정식의 기하학적 해법을 체계적으로 연구하였다(Berggren, 1986; Boyer & Merzbach, 1991; Eves, 1995). Descartes 역시 Omar Kyayyam의 해법을 알고 있었는데(Mardia, 1999), <표 II-1>에서 원뿔곡선의 교점을 이용하여 작도가 가능한 제 2종의 방정식이 여기에 해당한다.

법을 확장시켰으며, 이에 따라 도형에 관한 다양한 문제의 대수적 해결을 가능하게 하였다. 또한 새로운 기하학적 정리를 대수적으로 증명할 수 있게 하였고, 역으로 방정식을 기하학적으로 나타내어 해결하거나 대수적인 성질을 밝히는 데 이용할 수 있게 하였다(우정호, 2007).

최근에 CCSSI(2010)를 바탕으로 미국의 각 주에서 Framework를 개발하여 'Coordinate Algebra'라는 항목을 다루고 있으며, 'Coordinate Algebra'의 한 단원을 'Connecting Algebra and Geometry through Coordinates'라는 주제로 제시하여 좌표를 통한 대수와 기하의 연결을 강조하고 있는 것을 확인할 수 있다(예, GDE, 2014; MDE, 2013).

실제로 학교 수학에서 다루는 기하 문제 해결에 접근하기 위해서는 대수 지식이 필수적으로 활용되며(Dindyal, 2004, 2007), 점이나 직선, 함수, 연립방정식의 해와 같은 개념들은 대수와 기하가 좌표평면에서 연결된 해석기하의 기본 개념들이라고 할 수 있다(Bayazit & Aksoy, 2010). 특히 고등학교에서 다루는 기하는 주로 대수적인 방법을 적용하고 있기 때문에(우정호, 2007; Timmer & Verhoef, 2012), 좌표평면에 표현된 도형을 대수적 조작과 연결하여 해석하는 것이 무엇보다 중요하다고 할 수 있다. 다음의 <표 III-1>에서 수학의 개념들이 좌표평면을 통하여 연결되어 있는 내용을 확인할 수 있다.

<표 III-1> 좌표평면에서의 기하와 대수의 연결 (Dindyal, 2007에서 변형)

수학적 개념	기하적 요소	대수적 요소
점	위치가 지정된 점	순서쌍 (x, y)
선	위치가 지정된 직선	$\left\{(x,\ y):\ \begin{matrix} ax+by=c \\ (a, b, c \in \mathrm{R}) \end{matrix}\right\}$
함수	그래프	점들의 집합
연립방정식의 해	함수의 그래프의 교점	각 방정식을 동시에 만족시키는 순서쌍 (x, y)

Dindyal(2004, 2007)은 기하 문제 해결 과정에서 변의 길이나 각을 표현하거나, 기하학적 결과를 일반화하기 위해서 변수, 상수, 매개변수와 같은 문자를 사용할 수밖에 없는 것에 주목하였다. 그리고 이미 잘 알려진 van Hiele의 기하적 사고의 수준에 초점을 맞춘 것이 아니라 기하와 대수의 연결성 관점에서 기호와 대수 조작, 다양한 대수 표현 양식, 일반화 과정을 분석하여 학생들의 대수적 사고의 활용 결과에 따른 기하 문제 해결 수준의 관계를 보고하였다.

대수적인 방법으로 기하 문제를 해결할 수 있었던 Descartes의 시도에서 확인할 수 있듯이, 도형에 대한 대수적 해석은 역사적으로 매우 의미있는 시도였으므로 학교 수학에서는 도형을 연구하는 중요한 방법으로 대수적 접근을 보다 분명히 다룰 수 있는 기회가 제공될 필요가 있을 것이다.

하지만, 현재까지 국내·외에서 진행되고 있는 해석기하와 관련된 선행 연구는 곡선과 대수방정식의 연결성 관점에서 접근했다기보다는 기하에 대한 지나친 대수적 접근 경향을 보완할 수 있는 종합기하학의 방법을 제시하였거나(권영인·서보억, 2007; 도정철·손홍찬, 2015; 이지현·홍갑주, 2008; Timmer & Verhoef, 2012), 대수곡선의 개념지도 및 곡선이 포함되어 있는 문제 해결 지도를 위한 교수학적 방법에 주로 초점이 맞춰지고 있는 바(윤인준·고상숙, 2012; 홍성관·박철호, 2007; Donevska-Todorova, 2011; Ertekin, 2014; Ljajko, 2013), 학교 수학에서 대수와 기하의 수학적 연결성을 근간으로 하고 있는 교수학적인 현상에 관하여 선행 연구들이 제공하는 정보가 다소 제한점이 있다는 가정을 할 수 있으며, 지금까지 살펴본 해석기하학 관점에서의 방정식에 대한 기하학적 접근 방법을 토대로 대수와 기하의 수학적 연결성에 관한 통찰의 기회를 제공할 수 있는 이론적인 틀을 고찰해보고자 한다.

Ⅳ. 교수학적 논의

곡선의 본질을 탐구하기 위하여 기하학적 대상인 곡선의 자취를 그에 대응하는 방정식으로 나타낸 후 곡선을 대수적인 방법으로 해석한 Descartes의 방법은 학교 수학에서 방정식의 기하학적 해법으로 구체적으로 구현할 수 있다.

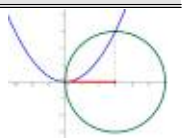
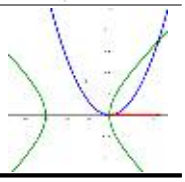
최근의 수학교육과정에서는 일차방정식 및 이차방정식의 해결을 위하여 일차함수 및 이차함수의 그래프를 활용하는 기하학적 해결 방법을 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015). 이는 주어진 방정식의 양변에 있는 식을 이용하여 각각을 좌표평면에 표현하고 이들의 교점을 통하여 해를 제시하는 기하학적 해법이라고 할 수 있으며, 이에 대한 내용을 다룬 다수의 연구가 진행되어 왔다(예, 박정미 · 이중권, 2013; Dikovic, 2009; Knuth, 2000; Tossavainen, 2009; Yerushalmy & Gilead, 1997).

본고에서는, Descartes가 분류한 2종의 방정식에 해당하는 삼차방정식에 대한 기하학적 해법을 고찰해보고자 한다. 삼차방정식은 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 연립한 형태로 해석할 수 있으며, 좌표평면에 표현된 원뿔곡선들의 교점을 활용하여 삼차방정식의 해를 기하학적으로 제시할 수 있으므로 삼차방정식의 기하학적 해법을 다루면서 Descartes가 해석기하학을 발전시키면서 주로 사용했던 원뿔곡선을 통하여 기하학적 해를 제시할 수 있다는 교수학적인 시사점이 있다.

다음의 <표 IV-1>과 같이 $x^3+9x-54=0$과 $x^3-9x-54=0$의 기하학적 해법을 구체적인 한 예로 제시할 수 있다.

삼차방정식 $x^3+9x-54=0$의 경우는 현행 교육과정의 고등학교 1학년 과정에서 제시되고 있는 인수분해로 해결이 가능한 형태의 삼차방정식이다. 이 방정식을 해결하기 위하여 기하학적으로 접근하면서 $y=x^3+9x-54$의 그래프와 $y=0(x\text{축})$의 교점을 활용할 수 있다. 또한 중세의 아랍의 수학자들 및 Descartes가 제시한 서로 다른 두 원뿔곡선의 방정식을 활용하는 방법이 있다.

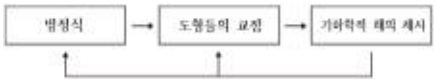
<표 IV-1> 삼차방정식의 기하학적 해

삼차방정식	원뿔곡선의 조합	기하학적 해
$x^3+9x-54=0$	$y=\frac{1}{3}x^2$ & $x^2-6x+y^2=0$	
$x^3-9x-54=0$	$y=\frac{1}{3}x^2$ & $x^2+6x-y^2=0$	

삼차방정식 $x^3+9x-54=0$을 기하학적으로 해결하는 과정에서 주어진 삼차방정식으로부터 대수적 조작을 통하여 원뿔곡선의 방정식 $y=\frac{1}{3}x^2$과 $x^2-6x+y^2=0$을 찾는 것이 선행되어야 한다. 이후 두 원뿔곡선의 자취를 표현하여 교점의 x좌표를 제시하면 문제가 해결된다. 그런데, 이 방법을 활용하여 고등학교의 수준에서 대수적으로 해결할 수 없는 $x^3-9x-54=0$과 같은 삼차방정식의 해를 기하학적으로 제시할 수 있다. 이 방정식의 기하학적 해를 구하기 위하여 필요한 원뿔곡선의 조합은 $y=\frac{1}{3}x^2$과 $x^2+6x-y^2=0$이다.

<표 IV-1>에 제시된 두 가지 형태의 삼차방정식을 기하학적으로 해결하면서 대수적 조작을 통하여 두 개의 도형의 방정식을 찾고, 이들을 좌표평면에 표현하여 해를 제시하는 순서로 수학적 사고 과정이 이루어질 수 있으며, 이 과정

에서 두 원뿔곡선의 방정식을 연립하여 처음에 주어진 삼차방정식을 구성할 수 없는 경우에는 일련의 과정을 반복하여 수정된 해를 제시할 수 있다([그림 IV-1]).



[그림 IV-1] 삼차방정식의 기하학적 해결을 위한 일련의 접근 방법

주어진 삼차방정식으로부터 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 찾아 좌표평면에 표현하고, 이들의 교점을 이용하여 삼차방정식의 해를 기하학적으로 제시하는 모든 과정을 Polya(2005)의 문제 해결의 네 단계인 <문제에 대한 이해>, <계획의 작성>, <계획의 실행>, <반성>의 단계를 기반으로 하여 <문제에 대한 이해> 및 <계획의 작성> 단계를 탐색(inquiring) 단계로, <계획의 실행> 단계를 해결(solving) 단계로, <반성 단계>를 반성(reflecting)단계로 재해석하고 이와 같은 탐색, 해결, 반성의 단계를 방정식의 기하학적 해결 단계로 활용할 수 있다.

탐색 단계, 해결 단계, 반성 단계의 일련의 과정을 통하여 이루어질 수 있는 문제 해결의 단계 및 교수학적 활용 관점을 <표 IV-2>와 같이 종합하여 나타낼 수 있다.

삼차방정식을 기하학적으로 해결하면서 두 개의 원뿔곡선의 교점을 찾는 탐색의 과정에서 원뿔곡선의 성질, 주어진 삼차방정식의 차수 등을 고려한 수학적 추론을 통하여 방정식을 조직하고 주어진 삼차방정식과의 대수식을 비교하여 최종적으로 기하학적 해를 제시하게 되며, 제시한 기하학적 해를 반성하는 단계를 통하여 삼차방정식의 기하학적 해에 대한 의미를 보다 풍부하게 이해할 수 있다.

한편, 학생들이 방정식을 해결하는 과정에서 대수적 표상과 그에 대한 기하학적 표상을 내적으로 연결하는 것이 인지적으로 어렵기 때문에 수학 교실에서의 구체적인 교수 및 학습의 과정에서 대수와 기하의 수학적 연결성 구현을 위한 다양한 교수학적 방법이 필요할 것이며, 공학 도구의 활용이 이러한 인지적 갈등을 해소하는 데 도움을 줄 수 있다는 다수의 연구 결과를 참고할 수 있다(예, Yerushalmy, 1999; Yerushalmy, 2005; Yerushalmy & Gilead, 1997).

Yerushalmy(1999), Yerushalmy(2005), Yerushalmy & Gilead(1997)와 같은 연구에서는 전통적으로 방정식의 해결은 해석적이었으며, 비맥락적인 단순한 대수적 조작으로 학습되었다고 비판하면서, 공학 도구를 활용하여 방정식을 해결하는 과정

<표 IV-2> 삼차방정식의 기하학적 해의 제시 단계 및 교수학적 활용 관점

Polya(2005)의 문제 해결 단계	⇔	삼차방정식의 기하학적 해결 단계	교수학적 활용 관점
문제에 대한 이해	⇔	탐색(inquiring)	• 주어진 삼차방정식으로부터 새로운 원뿔곡선의 방정식을 구하는 과정에서 원뿔곡선의 성질, 주어진 대수식의 차수 등을 고려한 수학적 추론
계획의 작성			
계획의 실행	⇔	해결(solving)	• 식의 조작 및 주어진 삼차방정식과의 비교를 통한 기하학적 해의 제시 및 제시한 기하학적 해에 대한 검증
반성	⇔	반성(reflecting)	• 다양한 도형을 추가적으로 탐색하여 삼차방정식의 기하학적 해와의 관련성을 분석 • 실근의 개수 판별 및 삼차방정식의 기하학적 해에 대한 구조를 전체적으로 이해

에서 음함수와 양함수를 모두 다룰 수 있으며, 함수에 대한 동적 이미지가 제공될 수 있어 방정식의 해를 함수들의 그래프의 교점으로 해석할 수 있다고 하였다. 그리고 이러한 접근은 식의 조작과 그래프 해석을 통한 해의 관찰이라는 두 과정을 분리시킬 수 있기 때문에 결과적으로 방정식의 해결에 도움이 된다고 주장하였다.

학생들이 풍부한 자원을 사용하여 융통성 있게 문제를 해결할 때, 수학적으로 사고하는 방법을 이해할 수 있으므로(Schoenfeld, 1985), 방정식의 기하학적 해결 과정에서 공학 도구의 활용을 보다 적극적으로 고려할 필요가 있을 것이다.

본 연구에서 다룬 내용을 토대로 수학 교실에서의 교수-학습 및 후속 연구를 위한 다음과 같은 제언을 남긴다.

첫째로, 방정식을 다루는 교수-학습 상황에서는 대수방정식과 함수의 그래프를 연결하여 다룰 필요가 있으며, 대수와 기하의 수학적 연결성에 대한 정보를 제공해줄 수 있는 교수학적 접근이 요구된다고 할 수 있다. 현행 교육과정 문서에서는 일차방정식과 이차방정식을 함수의 그래프와 연계하여 지도하도록 명시하고 있지만, 고등학교 교육과정에서는 삼차방정식, 삼차함수, 원뿔곡선의 내용을 다루는 과정이 모두 분리되어 있어 삼차방정식의 실근을 기하학적으로 해석할 수 있는 기회가 부족하다고 할 수 있다. 삼차방정식의 실근에 대한 보다 심도 있는 해석을 제공하기 위하여 교육과정을 유연하게 재구성하여 삼차방정식의 실근을 기하학적으로 다루는 교수학적 접근을 시도해 보는 것도 의미가 있을 것이다.

둘째로, 본 연구에서는 대수와 기하의 수학적 연결성을 기본적인 틀로 하고 있는 해석기하학의 관점에서 방정식의 기하학적 해법이 갖는 의미를 고찰해보고, 특히 삼차방정식의 기하학적 해법을 교수학적으로 활용할 수 있는 가능성을 이론적으로 고찰해보았다. 하지만, 본 연구에서 하나의 틀로 제시한 대수와 기하의 연결에 관한 해석기하학 관점의 논의는 수학적 연결성과 관련된 학교 수학의 다양한 교수학적 현상의 일부분에 해당하는 것이다. 본 연구를 토대로 학교 수학의 다양한 영역에서 수학적 연결성의 구체적인 예가 될 수 있는 과정을 분석하고, 이를 교수 및 학습에 적용할 수 있는 방법을 제시해줄 수 있는 후속연구가 이루어져야 할 것이다.

셋째로, 교육부(2015)에서 제시한 수학과 교육과정의 교수-학습 방향에 따르면 교수 및 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 시에 주제의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다. 현행 고등학교 교육과정에서 이차곡선을 다루면서 고대 그리스 이래로 알려져 온 원뿔곡선을 문자 x와 y를 사용하여 대수적으로 표현하고, 이들 원뿔곡선 방정식을 다양한 방법으로 활용하여 기하 문제를 해결한 Descartes의 업적을 소개할 수 있을 것이다. 더 나아가 직접 제작한 기구를 활용하여 구현한 원뿔곡선의 자취를 활용하여 고차방정식을 기하학적으로 해결할 수 있었던 Descartes의 관점을 토대로, 이미 학습한 삼차방정식의 해를 기하학적으로 탐구할 수 있는 기회를 학생들에게 제공할 수 있을 것이다.

또한 교육부(2015)에서는 교육과정에 제시된 내용을 지도한 이후, 우수 학생에게는 심화학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다고 하였는데, 실제로 학교 현장에서는 우수 학생을 위한 영재교육 프로그램도 있으며, 수행평가 및 동아리 활동도 있어 삼차방정식의 기하학적 해결과 관련된 학습 자료를 활용할 수 있는 기회는 충분히 있다고 볼 수 있다. 수학 교실에서 교사의 실천적인 노력이 수반될 경우에 본 연구에서 다룬 삼차방정식의 기하학적 해법에 대한 교수학적 의미가 반영될 수 있을 것으로 기대한다.

참고문헌

강문봉(1992). 분석법에 관한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 2**(2), 81-93.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-261호 [별책 8].

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

권영인・서보억(2007). 고등학교 도형의 방정식 단원에서 논증기하의 활용에 대한 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E. 수학교육논문집, 21**(3), 451-466.

김성준(2007). 학교수학에 제시된 분석적 아이디어의 고찰. **교과교육학연구, 11**(2), 499-515.

도정철・손홍찬(2015). GSP를 사용한 기하수업에서 수준별 학생의 논증기하와 해석기하의 연결에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 18**(4), 411-429.

박정미・이중권(2013). 동일한 수학적 상황에서 문제해결 능력 분석 연구: 방정식・부등식과 함수를 중심으로. **한국학교수학회논문집, 16**(4), 883-898.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초**(증보판 2판). 서울대학교 출판부.

윤인준・고상숙(2012). 탐구형 소프트웨어를 활용한 해석기하에서 학습부진학생들의 개념형성에 관한 연구: 관계적・도구적 이해를 중심으로. **한국학교수학회논문집, 15**(4), 643-671.

이지현・홍갑주(2008). 교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성. **학교수학, 10**(4), 573-581.

홍성관・박철호(2007). 동적기하가 원뿔곡선 문제 해결에 미치는 영향. **한국수학교육학회 시리즈 A. 수학교육, 46**(3), 331-349.

Allaire, P. R., & Bradley, R. E. (2001). Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. *Mathematics Teacher, 94*(4), 308-319.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century: geometry versus algebra. *Mathematics Today, 37*(2), 46-53.

Bayazit, I., & Aksoy, Y. (2010). Connecting representations and mathematical ideas with GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania, 1*(1), 93-106.

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics (2nd ed)*. New York: McGraw-Hill.

Common Core State Standards Initiative(CCSSI). (2010). *Common Core State Standards For Mathematics*. U.S.A.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375-402.

Dennis, D. (1997). Rene Descartes' curve-drawing devices: Experiments in the relations between mechanical motion and symbolic language. *Mathematics Magazine, 70*(3). 163-174.

_____ (2000). *The Role of Historical Studies in Mathematics and Science Educational Research*. Published in Research Design in Mathematics and Science Education. Lawrence Erlbaum Assoc. 2000. Retrieved from http://quadrivium.info/mathhistory/History.pdf.

Descartes, R. (1954). *The Geometry*. Translated by D. E. Smith & M. L. Latham. New York, NY: Dover. (원저는 1637년에 출판).

Dikovic, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college

level. *Computer Science and Information Systems, 6*(2), 191-203.

Dindyal, J. (2004). Algebraic thinking in geometry at high school level: Students' use of variables and unknowns. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville)* (pp. 183-190). Sydney: MERGA, Inc.

_____ (2007). The need for an inclusive framework for students' thinking in school geometry. *The Montana Mathematics Enthusiast, 4*(1), 73-83.

Donevska-Todorova, A. (2011). Developing concept in linear algebra and analytic geometry by the integration of DGE and CAS. *Proceedings of the 16th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM)*.

Ertekin, E. (2014). Is cabri 3D effective for the teaching of special planes in analytic geometry?. *International Journal of Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 27-36.

Eves, H. (1995). **수학의 역사**(이우영, 신항균 역). 서울: 경문사. (원저는 1953년에 출판).

Georgia Department of Education(GDE). (2014). *Common Core Georgia Performance Standards Frameworks of Mathematics, CCGPS Coordinate Algebra Unit 6: Connecting Algebra and Geometry through Coordinates*. U.S.A.

Grabiner, J. (1995). Descartes and problem-solving. *Mathematics Magazine, 68*(2), 83-97.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Knuth, E. J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher, 93*(1), 48-53.

Ljajko, E. (2013). Development of ideas in a geogebra: aided mathematics instruction. Mevlana *International Journal of Education, 3*(3), 1-7.

Mardia, K. V. (1999). *Omar Khayyam, Rene Descartes and solutions to algebraic equations*. Presented to Omar Khayyam Club, London. Retrieved from http://www1.maths.leeds.ac.uk/~sta6kvm/omar.pdf.

Maryland Department of Education(MDE). (2013). *Maryland Common Core State Curriculum Unit Plan for Geometry. Geometry Unit 4: Connecting Algebra and Geometry through Coordinates*. U.S.A.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69-100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. *Proceedings of the 28th PME Conference, vol 3*, 385-392.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author. 구광조, 오병승, 류희찬 공역(1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 서울: 경문사.

_____ (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author. 류희

찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Neovius, S. (2013). *René Descartes' Foundations of Analytic Geometry and Classification of Curves*. U.U.D.M. Project Report 2013:18.

Polya, G. (2005). **어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고와 방법-**(우정호 역). 서울: 경문사. (원저는 1956년에 출판).

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Timmer, M., & Verhoef, N. (2012). Increasing insightful thinking in analytic geometry using frequent visualization and a synthetic approach. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/13*(3), 217-219.

Tossavainen, T. (2009). Who can solve 2x=1? -An analysis of cognitive load related to learning linear equation solving. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 435-448.

Wagner, R. (2013). A historically and philosophically informed approach to mathematical metaphors. *International Studies in the Philosophy of Science, 27*(2), 109-135.

Yerushalmy, M. (1999). Making exploration visible: On software design and school algebra curriculum. *International Journal for Computers in Mathematical Learning, 4*(2-3), 169-189.

_____ (2005). Function of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computer for Mathematical learning, 10*(3), 217-249.

Yerushalmy, M., & Gilead, S. (1997). Solving equations in a technological environment. *Mathematics Teacher, 90*(2), 156-162.

Re-Interpreting the Descartes's Perspectives on the Connection of Algebra and Geometry

Ban, Eun Seob (Heungdeok Highschool)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to analyze Descartes's point of view on the mathematical connection of algebra and geometry which help comprehend the traditional frame with a new perspective in order to access to unsolved problems and provide useful pedagogical implications in school mathematics. To achieve the goal, researchers have historically reviewed the fundamental principle and development method's feature of analytic geometry, which stands on the basis of mathematical connection between algebra and geometry. In addition we have considered the significance of geometric solving of equations in terms of analytic geometry by analyzing related preceding researches and modern trends of mathematics education curriculum. These efforts could allow us to have discussed on some opportunities to get insight about mathematical connection of algebra and geometry via geometric approaches for solving equations using the intersection of curves represented on coordinates plane. Furthermore, we could finally provide the method and its pedagogical implications for interpreting geometric approaches to cubic equations utilizing intersection of conic sections in the process of inquiring, solving and reflecting stages.

* Key Words : Descartes(데카르트), analytic geometry(해석기하학), mathematical connection(수학적 연결성), geometric solving of equation(방정식의 기하학적 해결)

논문접수 : 2016. 10. 10
논문수정 : 2016. 11. 5
심사완료 : 2016. 11. 10