韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2015.54.4.365
2015. 11. 제 54권, 제 4호, 365-383.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2015, Vol. 54, No. 4, 365-383.

구조감각의 관점에서 인수분해 과정의 인지적 특성 분석

장혜원(서울교육대학교)
강정기(김해대곡중학교)†

Ⅰ. 서론

다항식의 곱셈 공식과 인수분해는 등식의 양변을 서로 달리 출발점과 종착점으로 하여 반대방향으로 조작한다는 의미에서 정확하게 역 조작에 해당하는 수학적 주제이다. 등호를 중심으로 상호 대칭인 등식 내에서 파악되어야 하는 법칙이지만, 곱셈 공식에 의한 다항식의 전개는 연산의 정의에 기초한 조작 기능에 의한 것인 반면, 인수분해는 주어진 다항식의 구조를 볼 수 있어야 한다. a^2-b^2의 인수분해 공식을 알고 있어도 $(x-3)^4-(x+3)^4$ 와 같은 식을 보고 구조의 상등을 인식하지 못하여 문제를 해결하지 못하는 경우(Hoch & Dreyfus, 2005)가 이를 입증한다.[1] 즉 곱셈 공식의 절차적 특성과 달리 인수분해 공식은 구조적 특성의 것이라 할 수 있다. 이와 같이 구조적 특성의 인수분해는 그 정당성이 역 과정인 곱셈 공식에 의해 뒷받침되며, 따라서 학습 계열상 곱셈 공식에 이어 인수분해 공식을 다루게 된다. 이에 2009 개정 수학과 교육과정에 따르면 중학교 2학년에서 다항식의 곱셈 공식을, 중학교 3학년에서 그 역 과정으로서 인수분해를 다루는데, 학생들은 전자에 비해 후자를 어려워하는 것으로 나타난다. 예컨대 중학교 3학년 교사용 지도서(조태근 외, 2003)에 지도의 유의점으로 제시된 '인수분해는 전개보다 다소 어렵지만 공식을 사용하면 쉽게 할 수 있음을 이해시키도록 한다.'는 인수분해가 곱셈 공식에 비해 상대적으로 어려운 과제임을 보여준다.

인수분해의 어려움은 향후 대수 학습에 부정적 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 이를테면, 인수분해는 이차방정식의 풀이에 기초가 되므로 충분한 연습을 통하여 숙달하지 않으면 이차방정식 풀이를 학습하는 데 어려움이 초래될 수 있다. 이에 인수분해와 관련하여 학생들이 경험하는 어려움을 규명하고 분석하기 위한 연구가 시도되어 왔다. 대표적인 연구로 구조감각(structure sense)이라는 개념을 도입하여, 학생들이 인수분해 문제해결에서 경험하는 어려움을 구조감각의 관점에서 분석한 연구를 들 수 있다(신은주, 2008; 서현정, 2009; 김교희, 2013; Hoch & Dreyfus, 2006).

이들 연구로부터 중학교 3학년 학생들은 매우 낮은 구조감각을 지닌다는 사실을 파악할 수 있고, 또 이를 입증하는 다양한 사례를 발견할 수 있다. 특히 구조감각과 관련한 일련의 연구를 수행해온 Hoch & Dreyfus(2006)는 구조감각을 보다 세분화하여 접근함으로써 인수분해 문제를 풀면서 경험하는 학생들의 어려움을 정량화하였지만, 구조감각 각각에 대한 학생들의 어려움을 세분화하지 못함으로써 근본적인 원인의 파악이라기보다는 어려움의 경험이라는 현상의 해석에 머문다는 한계가 있다. 이에 본 연구는 중학교 3학년 학생들의 인수분해 문제 해결 시 문제 인식 및 풀이 과정에서 나타나는 어려움과 인지적 특성을 구조감각의 관점에서 분석함으로써 인수분해 지도를 위한 교육적 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다. 이와 같은 연구 목적을 위해 다음의 연구 문제를 제기한다:

* 접수일(2015년 5월 11일), 수정일(1차: 2015년 7월 9일, 2차: 2015년 8월 25일), 게재확정일(2015년 11월 16일)
* ZDM분류 : E53
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 구조감각, 인수분해, 다항식의 전개, 과정, 대상, APOS 이론
† 교신저자

1) Hoch & Dreyfus(2005)는 190명의 고등학교 1학년 학생을 대상으로 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$을 제공하고 x^4-y^4과 $(x-3)^4-(x+3)^4$에 대한 인수분해를 요구했는데, 각각에 대한 정답률이 77%와 7.5%라는 놀라운 차이를 보였다.

1. 인수분해할 때 다항식에 대한 중학교 3학년 학생들의 구조감각은 어떠한가?
2. 인수분해 문제의 인식과 풀이 과정에서 구조감각을 지닌 학생(SS)과 결여된 학생(NS)[2)]의 인지적 특성은 어떠한가?

구체적으로, 선행 연구에서 정립한 구조감각이라는 개념을 근거로 인수분해와 관련한 우리나라의 학습 경험에 적합한 유형별 검사문항을 설정하여 적용함으로써 학생들이 세 가지 유형의 인수분해 문제를 풀면서 적절한 구조감각을 지니는지 또는 어떤 문제 유형에 대한 구조감각이 부족한지 파악하고, 문제 유형별 구조감각 보유 학생(SS)과 결여 학생(NS)을 개별 면담함으로써 구조감각 여부에 따른 학생들의 인지 과정 및 특성에 대해 파악하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 고찰

1. 구조감각

구조란 부분이나 요소가 어떤 전체를 짜 이룸 또는 그렇게 이루어진 얼개(국립국어원, 2014)로, 수학교육에서는 구조주의, 인지 구조, 수학적 구조, 대수 구조, 문제 구조, 문장제 구조란 용어가 주로 언급되어 왔다. 즉, 구조는 부분이 아닌, 전체 속에 자리한 부분들 사이의 관계를 나타내기 위한 용어이다. 이를테면 라우성, 백석윤(2009)은 문제 구조를 문제의 주요 부분과 보조요소가 이루고 있는 관계라고 정의하기도 하였다.

수학적 대상은 여러 개념 및 개체의 결합으로 이루어져 있으므로 자연스럽게 구조를 형성하게 된다. 예컨대 수나 문자 등의 여러 개체의 결합으로 이루어진 다항식 역시 구조가 있다. 이러한 구조를 볼 수 있을 때, 수학적 대상은 한결 수월하게 취급될 수 있다. 이를테면, $(x+2)^2$, $(a+4)^2$ 등은 관련 요소들 사이의 관계에 의해 $(a+b)^2$라는 구조를 지니며, 이를 인식할 때 두 다항식은 동일한 방식으로 처리될 수 있다.

감각이란 눈, 코, 귀, 혀, 살갗을 통하여 바깥의 어떤 자극을 알아차림, 또는 사물에서 받는 인상이나 외부 세계의 자극을 알아차리는 느낌(국립국어원, 2014)으로 수학교육에서는 수 감각, 연산 감각, 공간 감각이란 용어가 주로 언급되어 왔다. 즉 수, 연산, 공간에 대하여 관련 지식에 기반한 인지적 처리라기보다 직관적이고 일차적인 인상이나 느낌을 표현하기 위한 용어이다.

본 연구에서 관심을 두는 것은 구조와 감각의 합성어인 구조감각(structure sense)으로, 학생들이 식의 동치 구조를 유연하고 창의적으로 사용할 수 있는 능력을 말한다(Linchevski & Livneh, 1999). 또한 구조감각은 조작 능력(manipulative ability)과는 구별되는 것으로 학생들이 이전에 학습한 대수적 기술을 보다 효율적으로 사용할 수 있게 만드는 능력들의 조합이다(Hoch, 2003). 그 발달을 위해서는 식의 분해와 재합성에 대한 탐구를 격려해야 하고, 식을 다루는 데 필요한 정신적 운동을 보장해야 한다는 것이다. 이는 근력 운동에 의해서 육체적 근육을 만들 듯이 식의 처리가 원활할 수 있도록 하는 정신적 근육을 만들기 위한 식에 대한 정신적 조작 활동을 말하는 것으로 간주된다.

수학교육에 구조감각 개념을 도입한 Linchevski & Livneh(1999)는 초기 대수 학습에서 산술적 구조의 지식 사용으로 인해 겪게 되는 학생들의 어려움을 묘사하기 위해 구조감각이란 용어를 사용하게 되었다. 그들의 연구에서 제시된 예를 보면, 산술식 $50-10+10+10$를 풀기 위해 $10+10+10$을 먼저 계산하고 50에서 빼는 것으로 식의 구조를 인식하게 되면 주어진 산술식은 올바르게 계산될 수 없는 것이다.

따라서 산술식에서 뿐만 아니라 그것의 일반화로서의 대수식을 다루는 대수 학습에서 식의 조작을 위해 구조감각의 중요성은 간과될 수 없고, 대표적인 수학 주제로 곱셈공식과 인수분해의 가역적 식 조작에서 식을 구조적으로 파악하는 능력을 포함한다.

인수분해를 성공적으로 수행하기 위해서 학생들은 절차적 과정을 결과로서 취급하며 다룰 수 있는 정신적 근육을 단련시켜야 한다. 과정이 결과가 되어 익숙한 대상으로 취급되고 다루어질 때 인수분해는 한결 수월해지게 된다(Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994). 이를테면, 다항식 $(x+y)(x-y)+(x+y)z$의 인수분해 문제에서 식 $x+y$가 x와 y를 더한다는 과정으로만 간주되고 식 자체가 하나의 결과로서 받아들여지지 않는다면 인수

2) 본 연구에서 SS는 Structure Sense를, NS는 Non structure Sense를 의미한다.

분해 과정은 쉽지 않은 과제가 될 수 있다.

인수분해는 자칫 절차적 지식으로 간주되기 쉽지만 실제로 식의 구조에 대한 안목, 즉 식을 갖고 무언가를 하기 이전에 식을 관찰하는 행동을 필요로 한다. 구조감각 결여자가 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개는 할 수 있는데, 그 가역 활동인 인수분해는 할 수 없다는 사실에 주목할 필요가 있다. 이와 같은 인수분해의 어려움은 APOS 이론에 의해서도 설명 가능하다. 다항식의 곱셈이 행동(Action) 수준 또는 과정(Process) 수준에서 수행 가능한 반면 인수분해는 곱셈공식을 대상(Object)로 보아 가역적으로 구조를 인식할 수 있어야 하기 때문인데, 이와 같이 과정에서 대상으로의 메카니즘을 가장 어려운 것이라 하였으며(Arnon et al., 2014), Sfard(1991)는 이를 하나의 과학 범주로부터 새로운 범주로의 전이를 경험하는 어려움에 비유할 정도이다.

그렇다면, 대수 학습에서 식의 구조를 파악하기 위해 구조를 본다는 것은 무엇인가? Hoch & Dreyfus(2009)에서 대수적 구조를 본다는 것은 단순히 대수식을 계산하는 것이 아니라 수식에 있는 구성요소에 대한 이해를 의미한다. 즉 구조감각을 지닌 학생은 다음을 할 수 있어야 한다.

- 다항식을 가장 간단하게 했을 때 친숙한 구조를 인식,
- 복잡한 항을 하나의 대상으로 다루며 보다 적절하게 치환함으로써 복잡한 형태에서 친숙한 구조를 인식,
- 구조를 최대한 이용하기 위해 적절한 조작을 선택할 수 있다(Hoch & Dreyfus, 2009).

이상의 고찰에 근거하여 본 연구에서 의미하는 대수적 활동의 절차적 특성과 구조적 특성을 정리할 수 있다. 김남희(1994)는 대수의 절차적인 면과 구조적인 면을 구별하면서 전자를 수치를 얻기 위해 수를 가지고 하는 산술적 연산으로, 후자를 대수식 자체에 행해지는 연산으로 보았다. 이와 같은 구분은 본 연구에서 의도하는 구조감각의 개념을 이용한 대수의 절차적 특성과 구조적 특성에 따른 구분과는 차이가 있다. 다시 말해, 대수적 처리를 위해 구조감각이 없이 조작적 기능에만 의존하는 경우를 절차적, 구조감각을 지닌 경우를 구조적이라 칭할 것이다. 이를테면, 다항식 $(x-1)^2-4$의 인수분해 문제에서 전개를 이용한 풀이는 a^2-b^2의 구조 인식이 결여된 절차적인 경우이며, $\{(x-1)+2\}\{(x-1)-2\}$로 변형한 풀이는 a^2-b^2에 대한 구조감각을 지닌 구조적인 경우이다. 즉, 구조감각은 주어진 다항식에 대하여 관련 구조를 인식하고 그 구조에 적합한 조작을 실행할 수 있는 감각인 것이다.

이러한 정의는 Linchevski & Livneh(1999)의 구조감각 정의와도 구별된다. '식의 동치 구조를 유연하고 창의적으로 사용할 수 있는 능력'이라는 그들의 정의는 '유연하고 창의적으로 사용하는' 것에 대한 명확한 정의를 필요로 한다. 따라서 본 연구에서는 또 다른 정의를 필요로 하는 정의 대신, 구분이 명확한 위와 같은 정의를 택한 것이다.

2. 선행연구

인수분해는 대수 학습의 기초로 학교수학에서 그 중요성이 인정되어 온 만큼, 다양한 연구가 진행되어 왔다(최상기, 이지혜, 2009; 조영주, 김경미, 황우형, 2013; 전미혜, 황우형, 2015).

하지만 이번 절에서는 본 연구의 주제인 인수분해 과정에서의 인지적 특성 및 어려움을 구조감각의 관점에서 접근한 연구를 고찰한다. 신은주(2008)는 인수분해와 방정식 단원에서 중학교 3학년 학생들이 지닌 구조감각을 문제 수준, 즉 괄호의 개수 및 변수의 위치에 따라 조사하였다. 구조감각 수준은 0~3수준 중 2/3 이상이 0 또는 1수준에 머물렀고, 곱이나 거듭제곱의 경우보다 합의 경우에 낮은 구조감각을 보였고, 많은 학생들이 괄호를 제거의 대상으로 보는 경향이 있으며 변수가 한 변에 있는 경우보다 양변에 있는 경우 구조감각이 더 잘 발휘되어 등호의 개념이 구조 인식에 도움을 준다는 결론을 내렸다.

한편 서현정(2009)은 이차방정식의 해결 과정에서 중학교 3학년 학생들의 구조감각을 분석하였다. 연구 결과는 많은 학생들이 괄호 안에 있는 다항식을 하나의 실재로 다루지 못하고 전개하여 식을 정리하였다는 의미에서 구조감각이 결여되어있음을 보여주었다. 더욱이 구조 파악의 미흡으로 인한 식의 전개는 불필요한 복잡한 계산을 야기하여 계산 오류를 야기하였다. 김교희(2013)는 고등학교 2학년 학생들의 인수분해시 구조감각 실태 및 조작기술과의 관계를 조사함으로써 학생들의 식의 구조 파

악 능력에 대한 분석을 담고 있다. 연구 결과는 요구되는 구조감각 수준이 높을수록 구조 인식에 어려움을 야기한다는 자연스런 사실에도 불구하고, 식에 대한 익숙함이 높은 수준의 구조감각 문제도 해결하게 한다는 것이다. 또한 문제별로 적절한 구조감각을 지닌 학생일수록 조작기술 역시 높아지는 경향이 있으나 양자가 반드시 일치하지 않는다는 사실을 보여준다.

Hoch & Dreyfus(2006)는 165명의 고등학교 학생들의 구조감각을 측정할 목적으로 구조감각을 보다 세분화하여 접근하였다. 특히 그들은 학생들이 높은 수준의 조작기술과 낮은 수준의 구조감각을 보유하고 있다는 사실을 보여주고자 하였지만, 예상과는 정반대의 결과가 나타났다. 다시 말해, 학생들은 낮은 수준의 조작기술과 높은 수준의 구조감각을 드러냈다.

Hoch & Dreyfus(2006)의 연구에서 주목할 것은 구조감각을 세분화하여 접근했다는 점이다. 가장 간단한 형태에서 친근한 구조를 인식하는 능력을 SS1, 합이 아닌 곱이나 거듭제곱으로 이루어진 복잡한 항을 다루고 그 속에서 구조를 인식하는 능력을 SS2a, 합 그리고 곱이나 거듭제곱으로 이루어진 복잡한 항을 다루고 그 속에서 구조를 인식하는 능력을 SS2b, … 등으로 구분하여 인수분해의 어려움을 세분화하였다. 예컨대, 다항식 $81-x^2$, x^4-y^4, $(x-3)^2-(x+3)^2$에 대한 구조감각을 구분하고 각각 SS1, SS2a, SS2b로 코딩한 것이다. 이러한 코딩을 써서 구조감각과 관련한 어려움을 조작기술(MS)과 구조감각(SS)으로 구분하여 점수화함으로써, 총체적인 측면에서 구조감각의 어려움을 정량화할 수 있었다. 그러나 자신들이 세분화한 구조감각 각각의 어려움에 대한 정량화 또는 정성화는 간과하였기 때문에 인수분해의 어려움을 구체화하지 못한 한계를 지닌다. 예컨대 다항식 $(x-2)^2-(y+2)^2$의 인수분해 문제에서 구조인식에 어려움을 겪는 학생들을 'SS2b'라는 구조감각의 부족으로 진단내릴 뿐 그 학생들이 어떠한 인지 과정을 거치고 그 과정에서 어떤 특징을 띠는지에 대해서는 분석하지 못한 한계를 지닌다. 따라서 그와 같은 분석틀 및 분석 결과는 학생이 인수분해 문제를 어떠한 시각에서 인식하고 있기에 어려움을 겪는 것인지에 대한 구체적인 파악을 어렵게 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 참여자

연구 문제 1을 위해 검사 문항을 적용하기 위한 대상으로 경남 창원의 N중학교 3학년 한 학급 학생 32명을 연구 참여자로 선정하였다. 모두 남학생이며, 수학학습부진아가 없고 학급 평균이 51.24점으로 학년 평균 53.27과 같은 수준의 성적을 보이는 학급이다. 중학교 수학과 교육과정에 따라 2014년 1학기 수학 수업에서 다항식의 곱셈공식과 인수분해를 이미 경험하였기 때문에[3] 본 연구의 참여자로 적합한 것으로 판단되는 학생들이다. 특히 2014년 1학기가 아닌 2학기를 검사 시기로 정한 것은 수업 직후 검사 시 단기 기억에 의존한 문제 해결 가능성이 있기 때문에 이를 배제하고 학생들의 구조감각에 의존한 문제 해결 과정을 분석하려는 연구 목적을 따른 것이다.

연구 문제 2를 위해 학생 면담을 실시하였는데, 이를 위한 연구 참여자는 앞의 검사 결과에 기초하여 선정된 6명이다. 검사 문항이 3가지 유형별로 2문제씩 구성(2절 참조)되므로 검사 결과로부터 문제 유형별로 두 문제 모두 구조감각을 지닌 해법을 보여준 학생은 SS, 한 문제 이상 구조감각이 결여된 해법을 보여준 학생은 NS로 구분함으로써 면담 참여자의 다양한 인지적 특성을 파악하고자 하였다. 면담을 위한 연구 참여자의 선정 기준은 [표 1]과 같이 분류된다. 이 기준은 Hoch & Dreyfus(2006)가 분류한 복잡한 항으로 이루어진 다항식에 대한 구조감각 분류를 참조하되, 이를 보다 세분화하여 설정한 것이다. 각각의 유형별 학생 빈도수는 [표 4]에 제시되어 있으며, 구체적인 선정 방식도 연구 결과에 기초하여 Ⅳ장에서 함께 설명하였다.

3) 연구 참여자가 학습한 수학 교과서는 이준열 외(2009a, 2009b)이다.

[표 1] 면담을 위한 연구 참여자
[Table 1] Participants to interview with

문제 유형	기준 (단순, 복잡형태 중)	면담 참여자
S1	둘 다 구조감각 보유	SS1
	하나 이상 구조감각 결여	NS1
S2	둘 다 구조감각 보유	SS2
	하나 이상 구조감각 결여	NS2
S3	둘 다 구조감각 보유	SS3
	하나 이상 구조감각 결여	NS3

2. 검사문항 작성 및 적용

Hoch & Dreyfus(2006)의 연구를 토대로 [표 2]와 같은 인수분해 문항으로 구성된 검사지를 작성하였다.

학생들에게 제공된 인수분해의 유형은 모두 3가지이다. 중학교 수학에서 다루는 전형적인 세 가지 유형 a^2-b^2, $ab+ac+ad$, $a^2\pm 2ab+b^2$을 다룬다. 각각의 유형에 있어 구조감각의 복잡성을 두 가지 수준으로 나누어, 인수 중 하나만 다항식인 경우와 모든 인수가 다항식인 경우를 구분하였다. 따라서 검사 문항은 3(유형)×2(수준)의 총 6개의 문제이다. 이는 각각의 유형별, 수준별로 학생들의 구조감각을 세분화하여 고찰하기 위한 의도를 담은 선택이다. 각 문제는 연구 참여자가 수학 수업에서 다루는 이준열 외(2009b, 2009c)에서 발췌하는 것을 기본으로 하되, 다만 문제 2, 문제 4와 문제 6은 각각에 정확하게 일치하는 형태의 식을 찾을 수 없었기 때문에 연구자가 개발한 문항이다. 문제 2의 경우 $(x+a)^2-(y+a)^2$의 문항이 다루어지지만 문제 1, 3, 5에서 숫자가 등장하는 특징을 고려하여 a를 2로 변형한 것이다.

다만 동일 유형끼리 제시할 경우 구조와 관련한 암시를 받을 우려를 배제하기 위해서 검사지 구성 시 위의 문항 번호를 따르지 않고 순서를 재배열하여 1, 3, 5, 4, 2, 6의 순으로 배열하였고 또한 실제 적용 시 동일 유형의 문항끼리 앞서 제시된 문항이 다음에 제시된 문항의 해결에 영향을 미칠 가능성이 예상되었다. 이러한 영향을 최소화하기 위해 1, 3, 5로 구성된 검사지를 우선 제공하고 문제 해결이 완료되면 이를 수거한 후 4, 2, 6으로 구성된 검사지를 제공하였다. 검사지는 2014년 10월 31일 아침 자습 시간을 활용하여 연구 참여자에게 적용되었으며 약 30분 동안 개별적으로 문제를 풀게 한 후 수합하여 학생들의 풀이를 분석하였다. 이 결과로부터

[표 2] 검사문항
[Table 2] Test items

번호	인수분해 문제	유형	구분	코드[4]
1	$(x-1)^2-36$	a^2-b^2	a, b 중 하나만 다항식	S1S
2	$(x+2)^2-(y+2)^2$		a, b 모두 다항식	S1C
3	$a(x-y)-b(x-y)+6(x-y)$	$ab+ac+ad$	a만 다항식	S2S
4	$(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$		모든 인수가 다항식	S2C
5	$(x-1)^2-6(x-1)+9$	$a^2\pm 2ab+b^2$	a, b 중 하나만 다항식	S3S
6	$(x+3)^2+2(x+3)(y-3)+(y-3)^2$		a, b 모두 다항식	S3C

인수분해 문제 유형별로 구조감각을 지닌 학생(SS)과 구조감각이 결여된 학생(NS)을 구분함으로써 연구 문제 1에 대한 답을 찾고자 한다.

3. 학생 면담

연구 문제 2와 관련하여 문제 유형별로 구조감각 여부에 따라 분류된 6개의 그룹으로부터 학생을 각각 1명

4) 코딩은 structure sense를 의미하는 이니셜 S에 이어 하나의 숫자와 S 또는 C로 구성된다. 숫자는 문항의 유형 세 가지로서 1, 2, 3으로 표시되며, 이어지는 S와 C는 인수 중 일부만 다항식인지 모두 다항식인지에 따른 구분으로 각각 단순형태(simple)과 복잡형태(compound)를 나타낸다. 예컨대 S1S는 structure sense 1 simple을 나타내며, 유형 1의 구조감각 중 인수 중 일부만 다항식인 간단한 식을 의미한다. I장에서 기술한 Hoch & Dreyfus(2006)의 코딩 방법과는 차별화된다.

씩 선발하여 면담하였다([표 1]). 2014년 11월 10일 1차례, 11월 11일 2차례, 11월 12일 1차례, 11월 17일 2차례의 면담을 가졌으며, 각 면담은 30~40분가량 소요되었다.5)

면담은 크게 두 가지로 구분된다. 같은 유형의 두 문항에 대해 구조감각의 보유를 보여준 SS와의 면담과 같은 유형의 두 문항에서 적어도 한 문항에 대해 구조감각의 결여를 나타낸 NS와의 면담이다. 두 문제에 대한 SS와 NS의 면담은 [그림 1]과 같은 계획을 따랐으며, 학생의 응답에 따라 질문을 추가하는 반구조화된 면담법을 이용하였다.

SS와의 면담은 다음의 절차로 진행되었다.

① 면담은 답안지를 제공하지 않고 다시 풀 것을 요구하면서 이를 관찰하는 것으로부터 시작된다. 이는 대상자가 구조감각을 지녔음을 재확인하기 위한 목적을 지닌다.

② 다음 왜 전개를 하지 않았는가에 대한 물음으로 면담을 이어갔으며, 이를 통해 구조감각 형성에 도움이 된 요인을 파악하고자 하였다.

반면 NS와의 면담은 다음의 절차로 진행되었다.

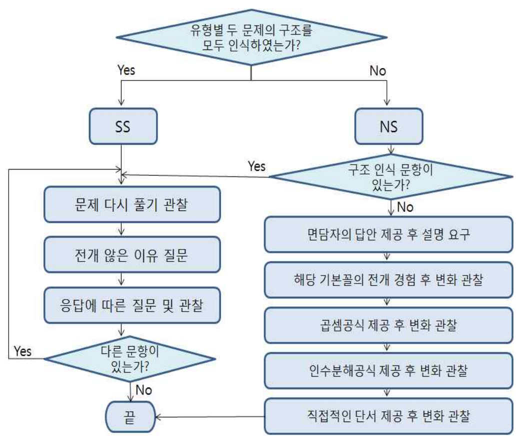
① 구조인식을 보여준 문항이 있으면 SS와 같이 풀이로부터 시작하였으며, 구조인식이 결여된 문항에 대한 면담자의 답안을 제공하여 풀이에 대한 설명을 요청하였다.

② NS에게는 결여된 구조의 역방향인 기본 꼴의 전개문제를 제공하여 풀게 하였다. $(x-1)^2-36$의 경우 $(a+b)(a-b)$의 전개문제를 제공하였다. 전개조차 못하면 당연히 구조감각을 기대하기 어렵지만 전개 했다면 그것이 곧 인수분해를 위한 실마리이자 정당화에 해당하므로, 이후 구조인식의 변화 여부를 확인하였다. 이때 전개에 곧이어 주어진 인수분해 문제를 풀 수 없다면, 비록 역방향으로 표현되었지만 구조를 보여주는 전개식이 주어져 있음에도 불구하고 인수분해를 할 수 없다면 구조 인식의 어려움을 드러내는 증거가 될 것이다.

③ 만약 구조인식에 변화가 없다면 전개한 식을 잘 보라고 언급하면서 재차 인수분해 해볼 것을 요구하였다. 즉, 곱셈공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 잘 보고 $(x-1)^2-36$을 인수분해 해 보도록 하는 것이다.

④ 그럼에도 불구하고 변화가 없다면 곱셈공식의 역과정인 인수분해 공식을 제공한 체 인수분해 할 것을 요구함으로써 구조인식의 변화를 확인해 보고자 하였다.

⑤ 이후에도 변화가 없다면 식을 하나의 대상으로 보라는 등의 더욱 직접적인 암시를 제공하여 구조인식의 변화를 관찰하였다. 이러한 관찰을 통해 구조인식에 도움이 될 수 있는 요인을 파악하고 그 어려움을 구체화하고자 하였다.



[그림 1] 면담 내용 및 절차
[Fig. 1] Contents and procedure of the interview

모든 면담 내용은 필드노트에 기록되어 자료 분석의 근거로 활용되었다. 필드노트에 전사된 면담 내용은 다음과 같이 분석되고 정리되었다. 먼저, 자료 전체를 대표할 수 있는 핵심 특징을 추출하여 이를 사례의 제목으로 기술하였다. 구조감각을 지닌 학생(SS)의 경우, 그들이 보이는 특징이나 구조감각 보유에 도움이 된 요인을 핵심 특징으로 추출하였다. 구조감각이 결여된 학생(NS)의 경우, 구조감각 결여와 관련한 인지적 어려움 및 인식 전환에 도움이 되는 요인을 중심으로 추출하였다. 한편, 전체 사례는 면담을 진행한 시간 순으로 정리함으로써

5) 연구문제 1의 조사 후 자료를 정리하고 면담자 선정의 원칙을 선정하고, 면담자와의 시간 약속을 정하는 과정에서 시일이 소요되어 면담은 10일 뒤인 11월 10일부터 진행된 것이다.

면담을 사실적으로 묘사하고자 하였으며, 특히 구조감각과 관련한 인식과 그 변화를 중심으로 분석이 이루어졌다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 인수분해시 다항식에 대한 구조감각

본 연구에서 실시한 검사 문항 6개에 대한 학생들의 반응은 [표 3], [표 4], [표5]와 같이 정리된다. 구체적으로, 연구 참여자 중 구조인식 학생은 유형 S1의 S1S, S1C에 대해 18.75%, 21.88%, 유형 S2의 S2S, S2C에 대해 37.5%, 12.5%, 유형 S3의 S3S, S3C에 대해 25.0%, 31.25% 로 나타났다. 이는 다항식의 인수분해를 다루면서 학생들이 실제로 식의 구조를 인식하는 데 매우 취약함을 보여준다. 특히 각 유형별로 간단한 형태에서의 구조인식이 복잡한 형태일 때보다 우세할 것이라는 기대와 달리 유형 S1과 S3에서는 오히려 복잡한 형태일 때 구조인식을 더 잘하는 것으로 나타났다. 이는 구조인식 가능 학생의 빈도수에 대한 단순 비교가 지니는 한계를 보여준다. 본 연구가 의도하는 구조인식과 관련한 학생들의 인지 과정을 조사한다는 연구 과정의 타당성을 확보할 수 있었다.

유형 S1에서 구조를 인식하지 못한 것으로 판단되는 학생들의 반응 유형을 살펴보면, S1S에서는 전개하여 인수분해를 시도한 사례가 31.25%(10명)에 달하였으며 방정식으로 인식한 사례도 25%(8명)로 적지 않은 것으로 나타났다. S1C에서는 전개의 오류가 40.63%(13명)로 나타났다. 특히 전개하여 인수분해 했을 때 성공 사례가 없었다는 점은 주목할 만하다. S1C는 S1S에 비해 식이 복잡하기 때문에 전개시 많은 오류가 나타난 것으로 보인다. 또한 S1S의 방정식으로 오인한 사례가 S1C에서는 전혀 등장하지 않았는데, 이는 학생들이 관련 미지수의 영향을 받고 있음을 보여준다. 즉, S1S는 x에 관한 방정식으로 오인될 여지가 있는데 반하여 S1C는 미지수 x, y로 이루어진 식이기 때문에 혼란을 초래하지 않은 것으로 해석된다.

유형 S2에서 구조를 인식하지 못한 것으로 판단되는 학생들의 반응 유형을 살펴보면, S2S에서는 전개하여

[표 3] S1에 대한 학생 반응
[Table 3] Students' responses to S1

문항	구조인식	유형	반응	학생수(명)	비율(%)
S1S	SS	구조인식	치환 등의 구조인식으로 인수분해 성공	6	18.75
	NS	전개 후 인수분해	전개하여 인수분해 성공	9	81.25
			올바른 전개 후 잘못된 인수분해	1	
		방정식으로 오인	전개하여 방정식으로 알고 근을 구함	8	
		전개 후 어려움 직면	$x^2-2x-35$로 전개 후 막힘	3	
		전개 오류	주어진 식을 잘못 전개하고 막힌	2	
		무응답	-	3	
S1C	SS	구조인식	치환 등의 구조인식으로 인수분해 성공	6	21.88
		구조인식 & 계산 오류	치환 후 $(x+y+4)(x-y-2)$	1	
	NS	구조인식 오류	$\{(x+2)-(y+2)\}^2$	1	78.13
		전개 후 인수분해	올바른 전개 후 잘못된 인수분해	2	
		전개 오류	잘못된 전개 후 인수분해	13	
		전개 후 어려움 직면	$x^2-y^2+4x-4y$에서 그침	3	
		전개 후 계산 오류	$(x^2+4x+4)-(y^2+4y+4)=x^2-y^2$	1	
		기타 오류	$x^2+2^2-y^2+2^2$, $2x+4-3y+4$, $2y-4-2x+4=0$ $(x+2)(x-2)-(y+2)(y-2)$	2	
		무응답	-	3	

인수분해에 성공한 학생이 12.5%(4명)로 나타났다. 또한 전개 후 어려움에 직면한 사례도 25%로 적지 않은 것으로 드러났다. 그에 반해 S2C에서는 전개하여 인수분해에 성공한 사례가 28.13%(9명)로 나타났다. 이는 문자의 개수와 관련되는 것으로 간주된다. 즉, S2S는 식 $a(x-y)-b(x-y)+6(x-y)$의 전개 후 포함된 네 개의 문자에 대해 적절한 방법으로 동류항을 고려해야 하는 반면 S2C는 x에 관한 식이므로 비교적 익숙하게 정리될 수 있다. 따라서 S2C에서는 전개하여 인수분해에 성공한 비율이 S2S에 비해 높은 것으로 설명된다.

또한 S2C에서 등호를 추가하여 방정식으로 오인한 경우가 다섯 사례인데 반해 S2S에서는 두 사례로 적게 나타난 것 역시 문자와 관련된 것으로 보인다. S2S에서는 문자가 a, b, c, x, y인데 반하여 S2C에서 문자는 x이므로, x에 관한 이차방정식을 주로 다루었던 경험이 작용한 것으로 설명된다.

유형 S3에서 구조 결여 학생들의 반응 유형을 살펴보면, S3S에서는 전개하여 인수분해에 성공한 학생이 28.13%(9명), 전개에서 어려움을 겪은 사례도 15.63%(5명)로 적지 않은 것으로 나타났다. 이에 반해 S3C에서는 전개하여 인수분해에 성공한 학생이 9.38%(3명)로 S3S에 비해 적게 나타났으며, 전개에서 어려움을 겪은 사례

[표 4] S2에 대한 학생 반응
[Table 4] Students' responses to S2

문항	구조인식	유형	반응	학생수(명)	비율(%)
S2S	SS	구조인식	치환 등의 구조인식으로 인수분해 성공	8	37.5
		구조인식 & 오류	괄호 오류 $a-b+6(x-y)$	1	
			괄호 오류 $x-y(a-b+6)$	2	
			방정식으로 오인 $(x-y)(a-b+6)=0$	1	
	NS	전개 후 인수분해	전개하여 인수분해 성공	4	62.5
		방정식으로 오인	전개하여 방정식으로 알고 근을 구함	2	
		전개 후 어려움 직면	전개 후 $x(a-b+6)-y(a+b+6)$에서 막힘	2	
			$ax-bx-ay+by+6x+6y$에서 막힘	2	
			$ax-ay-by+by+6x-6y$에서 막힘	4	
		원 식으로의 복귀	$ax-ay-by+by+6x-6y$, $x(a-b)-y(a-b)+6(x-y)$	1	
		기타 오류	$3x-3y$, $a-b+6(3x-3y)$	1	
		무응답	-	4	
S2C	SS	구조인식	치환 등의 구조인식으로 인수분해 성공	4	12.5
	NS	전개 후 인수분해	전개 후 인수분해 성공	9	87.5
		전개 오류	주어진 식을 잘못 전개한 후 막힘	1	
		전개 후 어려움 직면	$3x^2-4x-4$에서 막힘	2	
			$3x^2-4x-4$, $x(3x-4)-2$에서 막힘		
		전개 후 계산 오류	전개 후 계산 오류	2	
		방정식으로 오인	전개하여 방정식으로 알고 근을 구함	3	
			$x^2+x-6+x^2+2x-8+x^2-7x+10$, $3x^2-4x-4=0$	1	
			$x^2+x-6+x^2+2x-8+x^2-7x+10=0$, $3x^2-4x-4=0$, $(x-2)(3x+2)=0$	1	
		기타 오류	$x(-2+3+4-2-2-5)$	1	
			$(x^2-6)+(x^2-6)+(x^2+10)$	1	
			$(x-2)(x+2)$	1	
		무응답	-	6	

[표 5] S3에 대한 학생 반응
[Table 5] Students' responses to S3

코드	구조인식	유형	반응	학생수(명)	비율(%)
S3S	SS	구조인식	치환 등으로 구조인식하여 인수분해 성공	7	25.0
		구조인식 & 오류	치환하여 인수분해 후 $x=4$	1	
	NS	전개 후 인수분해	전개하여 인수분해 성공	9	75.0
		방정식으로 오인	전개하여 =0 추가 또는 인수분해하여 $x=4$	4	
		전개 후 어려움 직면	$x-8x+16$에서 막힘	1	
		전개 오류	주어진 식을 잘못 전개하고 막힘	5	
		기타 오류	$(x+1)(x-1)-(6x-6)+9$, $(x^2-1)(6x-6)+9$, x^2-6x+9, $(x-3)(x-3)$, $-6(x-1)2+9$	2	
		무응답	-	4	
S3C	SS	구조인식	치환하여 인수분해 성공	10	31.25
	NS	전개 후 인수분해	올바른 전개 후 인수분해 성공	3	68.75
		전개 오류	주어진 식을 잘못 전개하고 막힘	6	
		전개 후 어려움 직면	x^2+y^2+2xy에서 막힘 또는 =0 추가	3	
		기타 오류	$2x+6+2x-6$, $2x-2x=-6-6$, $x=-12$ $y-3+9y-6$, $-9y=-3$, $-3y=0$	1	
		무응답	-	9	

는 18.75%(6명)로 S3S에 비해 많이 나타났다. 이는 S3C가 S3S에 비해 복잡하기 때문에 나타난 현상으로 해석된다. 또한 S3C에서 무응답은 28.13%(9명)로 다른 유형에 비해 비교적 높은 비율로 나타났는데, 이는 구조를 인식하지 못하고 전개하여 인수분해를 시도할 경우에 전개와 동류항끼리의 정리라는 다소 복잡한 과정을 필요로 하기 때문으로 해석된다. 한편, S3C에서 한 식에 등장하는 두 문자 x와 y를 서로 독립적으로 다룬 경우가 한 사례 등장하고 있는데, 이는 하나의 식에 있는 두 변수가 종속적이라는 사실을 올바르게 인식하지 못한 경우로 볼 수 있다.

이상과 같은 학생들의 풀이에 기초하여 문항 유형별 단순형태와 복잡형태의 구조인식 여부를 파악하기 위하여 [표 6]과 같이 인식 유형에 따른 빈도수를 조사하였다. 유형은 OO, OX, XO, XX의 네 가지로 구분되며, 두 표기는 순서대로 각각 단순형태의 해결 여부와 복잡형태의 해결 여부를 나타낸다. 이를테면, OX는 단순형태는 구조를 인식하였고 복잡형태는 구조를 인식하지 못하였음을 의미한다.

[표 6] 문제유형별 SS와 NS의 빈도수
[Table 6] Frequency of SS and NS by the problem types

문제유형	구조인식	구조인식 유무유형	학생수(명)	비율(%)
S1	SS	OO	6	18.75
	NS	OX	0	81.25
		XO	1	
		XX	25	
S2	SS	OO	4	12.5
	NS	OX	8	87.5
		XO	0	
		XX	20	
S3	SS	OO	8	25.0
	NS	OX	0	75.0
		XO	2	
		XX	22	

이로부터 면담 참여자를 선정하였다. 연구 계획시 의도한대로 구조인식 학생(SS)은 유형 OO로부터 1명씩 선정하였다. 구조인식 결여 학생(NS)은 세 종류로 분류되므로 학생들의 다양한 인지 특성을 조사하기 위해 각

유형에서 1명씩을 선정하였다. 결과적으로 S1에서는 XX, S2에서는 OX, S3에서는 XO 중 1명씩을 면담 참여자로 선정하였다. 이때 유형 S1, S2, S3에 대한 반응 간 관련성은 고려하지 않았다. 예를 들어, 학생이 S1에서는 OO, S2에서는 OX, S3에서는 XX인 경우가 있을 수 있지만, 이를 고려하지 않은 독립적 선정이었다. 단지 각 유형별로 구조인식 학생과 결여 학생의 인지적 특성 파악을 파악하고자 한 것이다.

2. 구조감각을 지닌 학생(SS)과 결여된 학생(NS)의 인지적 특성

여기서는 면담 절차([그림 1])에 따른 학생 반응과 그에 대한 인지적 특성을 도출할 것이다.

1) SS의 인지적 특성

(1) SS1의 사례: 신속하고 간단한 방법의 추구

면담은 $(x-1)^2-36$에 대한 인수분해로 시작되었다. SS1은 문제를 보자마자 A^2-6^2으로 나타내고 $(x+5)(x-7)$이라고 답하였다. 연구자의 설명 요구에 다항식 $x-1$을 A로 치환하여 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 이용한 것이라고 답함으로써 주어진 식의 구조를 잘 파악하였음을 보여주었다. 관련한 인지적 특성을 파악하기 위한 면담에서 전개하는 것에 대해 '문제를 최대한 빨리 풀고 오답률을 낮추고 정확도를 높이기 위해' 치환 방식을 따랐다고 하여 구조인식에 대한 가치 인식을 보여주었다.

RS: 너는 처음부터 그렇게 인수분해할 수 있었니?
SS1: 아니오. 맨 처음에는 일일이 전개하고 해 봤는데 귀찮더라고요. 그래서 더 빠르고 간단한 방법 없나 책 찾아보고 선생님에게도 물어봤어요.[6)]

SS1은 전개의 귀찮음을 경험하고 빠르고 간단한 방법을 추구하는 과정에서 구조를 인식하게 되었음을 알 수 있다. 한편 친구들의 전개 선호에 대해 놀라움을 표하여 구조인식 결여자를 이해하지 못하는 모습을 보였다.

6) 여기서 '책을 찾아보고 선생님께 물어봤다'는 SS1의 말은 3학년 1학기에 SS1이 학습하면서 겪은 경험을 의미한다.

SS1: 걔들이 이것을 생각 못하는 것처럼 저도 전개하는 것을 생각 못해요. 이게 더 간단한데 굳이 전개해서 할 필요가 없을 것 같아요.

이어 다항식 $(x+2)^2-(y+2)^2$에 대한 인수분해를 요구하자, SS1은 순식간에 $(x+4+y)(x-y)$라고 써 나갔다. 같은 방법으로 $x+2$, $y+2$의 치환 방법을 설명한 후 자신에게 보이는 구조가 다른 아이들에게는 보이지 않는다는 사실에 다시 한 번 놀라워하였다. 이는 구조인식 가능자가 결여자의 인식을 이해하기 쉽지 않음을 보여준다.

(2) SS2의 사례: 반복 연습 및 숙고의 도움과 지나친 대상화

면담은 $a(x-y)-b(x-y)+6(x-y)$에 대한 인수분해로 시작되었다. SS2는 문제를 보자마자 단숨에 $(x-y)(a-b+6)$이라고 썼다. 연구자의 설명 요구에 SS2는 $x-y$가 3개 있는 것을 보고 묶어내야 한다는 생각을 할 수 있었다고 답하였다.

RS: 대다수는 전개하는데, 너는 어떻게 전개를 안 할 수 있었니?
SS2: 손에 익어서
RS: 어떻게 손에 익을 수 있었니?
SS2: 처음 할 때는 어떻게 하는지 몰랐는데, 그때 이것만 잡고 엄청 많이 해서 기억에 남아요.
RS: 네가 말한 이게 뭐니?
SS2: 묶어내는 거요.
RS: 묶어내는 게 뭐니?
SS2: 아이 참! 똑 같은 게 있으면 그것을 빼내는 거요.

SS2는 유형 S2를 '묶어내기'로 범주화하였고, 이에 대한 해결 스키마는 반복된 연습을 통한 것임을 알 수 있다. 이어 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$의 인수분해가 요구되었고, SS2는 주저없이 곧바로 $(x-2)\{(x+3)+(x+4)+(x-5)\}$라고 답하였다. 이에 대한 설명에서도 $x-2$가 다 들어있으니까 묶어낸다고 답함으로써 식의 구조를 잘 파악하였음을 보여주었다.

RS: 대다수는 전개를 하는데 너는 어떻게 전개를 안 한 거니?
SS2: 음… 이것도 예전에는 못했는데 이것 한 문제 푼다고 오래했어요.

RS: 그때 왜 그렇게 오래 걸렸지? 무엇이 문제였지?
SS2: 그렇게 풀 거라고 생각 못했어요.
RS: 그럼 어떻게 극복할 수 있었니?
SS2: 예전에 배운 것을 생각하면서 설마 되겠나 생각했는데 풀렸어요.
RS: 그럼 그 때 한 번의 경험이 큰 도움이 된 거니?
SS2: 예.
RS: 왜?
SS2: 그 만큼 집중했고 시간도 많이 들었어요. 잘 안 풀려서 오래두고 생각하다 보니까 알게 되었어요.

SS2는 잘 안 풀려서 어려웠던 묶어내기 유형을 끈기있게 해결한 경험에 기반하여, 시간이 많이 지났음에도 유형 S2의 구조를 확실히 인식하게 되었음을 알 수 있다. SS2의 답 $(x-2)\{(x+3)+(x+4)+(x+5)\}$이 완결된 식이 아니므로 연구자는 이에 대한 SS2의 인식을 파악하기 위해 면담을 이어갔다.

RS: (‘$(x-2)\{(x+3)+(x+4)+(x-5)\}$’을 가리키며) 여기서 계산이 더 안 되니?
SS2: 그건 모르겠어요.
RS: 무엇을 모르겠니?
SS2: 계산이 되는지 안 되는지요.
RS: 네 생각은 어때?
SS2: 안 될 것 같아요.
RS: 왜?
SS2: 만약에 치환이라고 잡으면 각자 다른 문자를 써야 되잖아요. 같은 문자가 아니면 계산을 못할 것 같아요.
RS: 여기서 다른 문자는 뭐니?
SS2: 치환을 했을 때, a, b, c, d로 잡아 치환을 해서 똑같은 문자는 묶어내고 남은 문자는 각자 다르기 때문에 계산을 못할 것 같아요.
RS: 네 말은 $ab+ac+ad=a(b+c+d)$인데 b, c, d끼리 다른 문자니까 계산이 안 된다는 거니?
SS2: 예. 맞아요.
RS: (‘$(x-2)\{(x+3)+(x+4)+(x-5)\}$’을 가리키며) 그런데 여기서는 같은 문자 아니니?
SS2: 그래서 아까 잘 모른다고 했잖아요.
RS: 계산이 될 것 같니 안 될 것 같니?
SS2: 잘 모르겠어요. 될 것 같기도 하고 안 될 것 같기도 해요.

이 경우에는 $x+$(상수항)을 하나의 대상으로 인식하는 지나친 대상화의 경향이 각 항을 분리하여 고려해야만 가능한 동류항의 계산을 방해하고 있음을 보여주어 주목할 필요가 있다.

(3) SS3의 사례: 어려운 전개 경험의 도움

면담은 $(x-1)^2-6(x-1)+9$에 대한 인수분해로 시작되었다. SS3은 문제를 보자마자 $(x-1)$을 A로 치환하여 주어진 식을 A^2-6A+9로 변형하였다. 이어 $(A-3)^2$이기 때문에 $(x-4)^2$이라고 답하였다. 연구자의 설명 요구에, SS3은 $x-1$이 공통으로 들어있어 이를 치환하고 9가 제곱수고 그게 6의 반의 제곱이므로 완전제곱식이 된다고 답하였다. SS3는 공통인수 $x-1$을 하나의 대상으로 인식하여 식의 완전제곱식 구조를 볼 수 있었던 것이다.

이어 $(x+3)^2+2(x+3)(y-3)+(y-3)^2$의 인수분해가 요구되었다. SS3는 곧바로 $x+3$, $y-3$을 각각 A, B로 치환하여 $A^2+2AB+B^2$으로 변형하였으며, $(A+B)^2$라고 쓴 다음 $(x+3+y-3)^2=(x+y)^2$라고 이어갔다. 이에 대한 SS3의 설명, ‘완전제곱식은 $A^2\pm 2AB+B^2$. 이 형태가 되면 완전제곱식이니까 $x+3$, $y-3$을 한 개씩 있는 걸로 보면 그 형태가 되니까요.’는 구조인식을 보여준다. 완전제곱식의 형태 $A^2\pm 2AB+B^2$에 대한 명시적인 언급이나 ‘$x+3$, $y-3$을 한 개씩 있는 걸로 보면…’이라는 설명은 SS3가 다항식을 대상화[7]할 수 있음을 보여준다. 한편 전개에 대해서는 ‘일단 전개하면 시간도 오래 걸리고 그게 어렵게 될 수 있으니까 다른 방법으로 생각했어요/ 하나하나 제곱하는 것 다 풀고 정리하니까 시간이 오래 걸리고 그렇게 정리했는데 인수분해가 안 될 수도 있기 때문에 어려워요/ 전개하다 보니까 제곱을 다 푸는 것도 어렵고, 적고 정리하려니까 칸도 모라라고 헷갈려서 어려운 걸 알았어요.’ 라는 자신의 경험을 통해 전개가 어렵고 시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라 그렇게 해서 얻은 결과가 쉽게 인수분해가 되지 않는 경우가 있음을 알고 있었다. 이와 같은 경험이 다항식만 보면 전개해야 한다는 생각에서 벗어나 구조를 보게 만드는 강력한 요인으로 작용하였음을 알 수 있다.

2) NS의 인지적 특성

7) 역동적 특성의 과정(process)으로부터 정적 특성의 대상(object)로의 전이를 의미하는 APOS 이론(Dubinsky, 1991)의 encapsulation과 Sfard(1991)의 reification에 해당하는 개념을 나타내고자 한다.

(1) NS1의 사례: 괄호 풀기에 대한 관념의 고착

NS1은 S1 유형인 $(x-1)^2-36$, $(x+2)^2-(y+2)^2$에 대해 각각 전개하여 인수분해함으로써 두 문제 모두 구조감각이 결여된 사례다. 면담은 답안지에 대한 설명으로 시작되었다. 자신의 답안에 대한 다음과 같은 면담을 통해 NS1은 괄호를 최우선으로 풀어야 한다는 생각을 가지고 있음을 알 수 있다.

NS1: 일단 괄호를 풀어야 하잖아요. 괄호가 최우선이니까
RS: 왜 괄호가 최우선이니?
NS1: 괄호를 안 풀고 계산하잖아요. 그러면 그게 계산이 좀 엇갈릴 때가 있잖아요.
RS: 그게 무슨 말이야?
NS1: 괄호를 안 풀면 동류항이 몇 개인지를 모르잖아요. 그래서 괄호를 먼저 풀어야 해요.

$(x+2)^2-(y+2)^2$에 대해서도 '사칙연산 부호 중에 순서가 있잖아요. 그 순서로 괄호를 먼저 푸는 게 곱하기니까요. 괄호가 있는 것은 다 풀고 순서대로 계산해야 해요. 동류항끼리 계산하고 인수분해를 하면 되요.'라고 함으로써 괄호를 먼저 풀어야 한다는 계산 순서에 강하게 집착하였다. [그림 1]의 절차에 따라 식 $(a+b)(a-b)$을 제공하여 그 전개가 식의 구조인식에 도움이 되는지 확인하였다. NS1은 옳게 전개하여 a^2-b^2을 얻었기에, 다시금 인수분해 하도록 하였지만 곱셈공식이 주어져 있는 상태에서도 여전히 전개하였고 둘째 식은 '$(x+2)^2-(y+2)^2=x^2+4x+4-y^2-4y-4=x^2+4x-y^2-4y=x(x+4)-y(y+4)$'라고 하여 완성하지도 못하였다. 이에 연구자는 학생이 지닌 인수분해에 대한 개념을 조사해보고자 하였다.

RS: ('$x(x+4)-y(y+4)$'를 가리키며) 이게 인수분해가 된 것이니?
NS1: (망설임 없이) 예.
RS: 왜 인수분해 된 거니?
NS1: 음… 최대한 알아보기 쉽게 묶어낸 것이니까요.
RS: 이렇게 묶어내면 인수분해니?
NS1: 다른 방법도 있겠죠.
RS: 무슨 말이야?
NS1: (다음과 같이 기록함: '$x(x+4)-y(y+4)=x^2+4x-y^2-4y=[(x+2)^2-4]+[-(y+2)^2-4]$')
RS: 이것도 또 다른 인수분해니?
NS1: 예. 제가 생각하기에는 또 다른 인수분해예요.
RS: 왜?
NS1: 뭐라고 말씀드려야지. 알아보기 쉽게 만들었으니까요.
RS: 알아보기 쉽게 만드는 것이 인수분해니?
NS1: 예. 이렇게 알아보기 쉽게 만드는 것이 인수분해에요.

NS1은 알아보기 쉽게 만든 것이 인수분해라는 오개념을 지니고 있었다. 이러한 오개념은 인수분해된 것이 아닌 것을 인수분해 결과로 인식하게 만드는 요인이 되었다. 연구자는 식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 주목하게 함으로써 구조인식에 도움이 되는지를 확인해 보고자 하였으나 역시 같은 방법을 보였다.

이번에는 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 자체를 제공하여 구조인식을 돕고자 하였으나 $x-1$과 a를 대응시키지 못하여 구조를 인식하지 못하였음을 다음 면담에서 알 수 있다.

RS: a^2-b^2이랑 $(x-1)^2-36$은 관련성이 없니?
NS1: 관련 있죠.
RS: 어떻게?
NS1: a^2-b^2은 $(a+b)(a-b)$를 한 것과 같으니 $(x-1)^2$은… 아! 관련성이 없구나!
RS: 왜?
NS1: 합차공식은 +와 −를 괄호 안에서 같이 사용하는 건데 오른쪽에 $(x-1)^2-36$에서 $(x-1)^2$은 +가 없으므로 관련성이 없어요.

마지막으로 직접적 단서로서 36을 6^2으로 바꾸어 구조인식을 유도하였다.

RS: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$을 잘 보고 $(x-1)^2-6^2$을 인수분해 해 보겠니?
NS1: (다음과 같이 기록함 : '$x^2-2x+1+36=x^2-2x+37$') 어! 이게 -6을 제곱하니 인수분해가 잘 안돼요.

NS1은 36 대신 6^2으로 표현되었음에도 구조인식을 못하고 계산 오류까지 야기하였다.

RS: a^2-b^2랑 $(x-1)^2-6^2$은 관련성이 없니?
NS1: 음… 이건 관련성이 있어요.
RS: 어떻게?

NS1: $(x-1)$을 a로 놓고 6을 b로 놓으면 a^2-b^2꼴이 나오니까요.

NS1은 a^2-b^2과 $(x-1)^2-6^2$이 직접 언급되어서야 비로소 관련성을 인식하게 되었다. 그러나 이어진 면담은 관련성 인식만으로 괄호를 풀어야 한다는 고착된 관념을 탈피하기는 쉽지 않음을 보여준다.

RS: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$을 잘 보고 $(x-1)^2-6^2$을 인수분해 해 보겠니?
NS1: (다음과 같이 기록함: '$x^2-2x+1+36=x^2-2x+37$') 여기에서 다시 인수분해가 안 되네요.
RS: $(x-1)^2-6^2$과 a^2-b^2이 꼴이 같다고 했잖아! 그러니까 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$을 잘 보고 $(x-1)^2-6^2$을 인수분해 해 보겠니?
NS1: 음… 앞에서는 6을 b로 보고 풀었으므로 $(x-1)^2-6^2$과 a^2-b^2의 꼴은 같지만 풀어보면 $x^2-2x+1+36$으로 '$-$'의 꼴이 없어지므로 되지 않아요.

NS1은 형태는 같지만 전개해보면 결국 '$-$'의 꼴이 사라진다고 언급함으로써 구조적 상등을 파악한 다음에도 그 구조에 기초하여 문제를 해결할 수 없었고 괄호의 처리를 최우선으로 여겨 식의 구조 역시 전개 후의 형태 비교로 귀결되었다.

(2) NS2의 사례: 이차방정식 풀이와 혼동

NS2는 유형 S2 중 $a(x-y)-b(x-y)+6(x-y)$에 대해서는 구조를 인식하여 인수분해하였으나, $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$는 전개하여 이차방정식으로 변형하여 인수분해함으로써 구조감각이 결여된 사례이다. 먼저 첫째 식을 새롭게 인수분해 하도록 했을 때 구조인식을 유지하였으나 둘째 식에 대한 답안 설명에서는 전개를 하고 등호를 붙여 방정식의 해를 구하였다. 연구자는 NS2가 왜 방정식으로 생각하였는지를 알아보기 위한 질문을 이어갔다.

RS: '$=$'는 왜 붙여준 거니?
NS2: '$=$'은 이쪽(우변)이 0이어야 이쪽(좌변)을 인수분해할 수 있어서요.
RS: 우변이 0이 아니라면 인수분해가 안 되니?
NS2: 예. 안 되는 것 같아요.
RS: 왜?
NS2: 계속 그렇게 배워서요.
RS: 어떻게 배웠는데?
NS2: 이차방정식을 풀 때마다 우변을 0으로 두고 하는 것을 봐왔기 때문이에요.

NS2는 이차방정식의 학습 경험이 강하게 자리 잡고 있어 이차식의 인수분해 문제를 이차방정식의 인수분해를 이용한 풀이로 착각하고 있었다. 연구자는 $a(b+c+d)$의 전개가 구조인식에 도움이 되는지를 확인해 보고자 식 $a(b+c+d)$을 제공하였으며, NS2는 전개하여 $ab+ac+ad$를 얻어 냈다. 이어 다시금 둘째 식을 인수분해 하도록 했을 때 같은 풀이를 반복하여, NS2에게 식 $a(b+c+d)$의 전개는 구조인식에 도움이 되지 못함을 보여주었다. 이에 연구자는 곱셈공식 $a(b+c+d)=ab+ac+ad$와 이어 양변이 바뀐 인수분해 공식을 순차적으로 제공하여 구조인식에 도움이 되는지를 확인해 보고자 차례로 각 식을 보면서 인수분해 하도록 하였으나 양 경우에 여전히 구조감각이 결여된 모습을 보였다.

NS2의 $ab+ac+ad$와 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$의 관련성에 대한 인식을 파악하기 위해 직접적인 질문을 제기하였다.

RS: $ab+ac+ad$랑 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$은 관련성이 없니?
NS2: 음… 관련성이 없어요.
RS: 왜?
NS2: $ab+ac+ad$은 a로 묶어 가지고 풀어야 되는 거고 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$는 모두 다 전개한 다음 계속해야 되는 거니까 다른 것 같아요.

양 식의 관련성을 전혀 파악하지 못하므로 한층 강도 있는 단서를 제공하였다.

RS: $x-2$를 a로 두면 $ab+ac+ad$랑 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$은 관련성이 없니?
NS2: 있는 것 같긴 있는 것 같은데요, 확실하게 뭔지 모르겠어요.
RS: 어떤 관련성이 있지?
NS2: 구조가 비슷하다고 해야 되나? $x-2$를 a라 하면 $ab+ac+ad$ 여기에 넣으면 $(x-2)\times b$랑 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$이 랑

비슷하잖아요.

RS: 뭐가 비슷하니?

NS2: 아까 말했던 것처럼 $(x-2)\times b$은 두 개다 곱해줘야 하니까 비슷해요.

이에 연구자는 토파즈효과(Brousseau, 1998; Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2014)에 해당할만한 결정적인 힌트를 제공함으로써 구조인식을 돕고자 하였다.

RS: $x-2=a,\ x+3=b,\ x+4=c,\ x-5=d$로 두면 $ab+ac+ad$랑 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$은 관련성이 없니?

NS2: (하나하나 짚어가면서) 이것, 이것이 똑 같으니까 집어 넣어보면 이것이랑 완전히 똑같이 나와요.

RS: $ab+ac+ad=a(b+c+d)$을 잘 보고 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$을 인수분해해 보겠니?

NS2: (생각하더니 이번에도 전개하여 근을 구하면서) 이것 밖에 안 나와요.

NS2는 '$x-2=a,\ x+3=b,\ x+4=c,\ x-5=d$로 두면'이란 결정적인 힌트에도 불구하고 구조감각이 결여된 모습을 보여주었다. 더불어 제시한 인수분해 공식을 이용하여 다시 한 번 풀도록 해보았으나 교사의 특정 방법에 대한 강요가 계속 혼동을 야기한다고 반응하였다. 이는 NS2가 $ab+ac+ad$와 주어진 식 사이의 관련성을 '곱한 다음 더하는 것'으로만 인식함으로써 단순한 치환만으로는 구조인식을 돕기 어려움을 보여준다. 나아가 연구자는 이 두 문제의 차이점에 대해서는 어떻게 인식하고 있는지 알아보고자 하였다.

RS: 차이점은?

NS2: $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$은 전개하고 계산해서 인수분해하면 답이 나오잖아요. 그런데 $ab+ac+ad$는 a가 뭐다 b가 뭐다 안 가르쳐주면 답이 안 나와요.

RS: 무슨 말이니?

NS2: $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$은 아까 제가 구한 숫자로 답이 나오잖아요. $ab+ac+ad$은 답이 나와도 a가 뭔지 안 가르쳐주면 숫자로 답이 안 나와요.

RS: 그럼 $ab+ac+ad$은 답이 뭐니?

NS2: 그냥 $a(b+c+d)$ 아니에요?

NS2는 $(x-2)(x+3)+(x+4)(x-2)+(x-2)(x-5)$는 숫자로 답이 나오는 것으로, $ab+ac+ad$은 숫자가 아닌 문자로 답이 나오는 것으로 인식함으로써 두 식을 다르게 인식하고 있었다. 전자에 대한 학생의 경험이 주로 이차방정식에 국한되었기 때문에 빚어진 현상으로 해석된다.

(3) NS3의 사례: 인수분해 공식 제공에 의한 구조인식 가능

NS3은 유형 S3 중 $(x-1)^2-6(x-1)+9$에 대해서는 $-6(x-1)^2+9$라고 답함으로써 구조감각이 결여된 모습을 보인 반면, 복잡한 식 $(x+3)^2+2(x+3)(y-3)+(y-3)^2$에 대해서는 치환하여 인수분해 함으로써 구조감각을 보유한 사례에 해당한다. 구조를 인식한 후자에 대한 인수분해 요구로 면담을 시작하였는데, 흥미롭게도 답안지의 치환에 의한 인수분해와는 달리, 전개하여 동류항끼리 계산한 다음 인수분해하여 $(x+y)^2$이라고 답하였다. 답안지를 보이며 면담시의 풀이와 다른 이유를 설명하도록 하였다.

NS3: 이건 시간이 없어서 이렇게 풀었어요. 이것 다 쓸려면 시간이 많이 걸리니까 $x+3$을 A로, $y-3$을 B로 놓아서 $A^2+2AB+B^2$이 되니까 아까 그 수를 대입해 주면 답이 나와요.

처음 풀이에서 전개를 하지 않은 이유로 시간이 없고 전개 방법을 몰라 오히려 치환에 의한 방법을 선택하였다는 것이다. 이는 답안지를 작성할 당시의 시간 제약과 전개의 어려움이 도리어 구조감각 인식에 도움으로 작용하였음을 보여주어 흥미롭다. 이어 $(x-1)^2-6(x-1)+9$에 대해 답안지를 제공하고 설명하도록 하였다. $-6(x-1)^2+9$에 대해 '$(x-1)^2$을 -6에 붙여서 이렇게 된 건데 그냥 생각이 안 나서 막 적은 거예요'라고 하였고, 다시 풀어보게 하자 전개하여 동류항끼리 계산하여 '$(x-4)^2$'이라고 답하였다.

이와 같이 $(x-1)^2-6(x-1)+9$에 대해 구조감각이 결여된 NS3에 대해 NS1, NS2의 면담에서와 마찬가

지로 곱셈공식 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$의 효과를 보고자 하였으나 구조를 파악하는 데 전혀 도움이 되지 않았다. 오히려 주어진 식의 첫 항을 전개하도록 하는 잠재된 역효과의 가능성마저 드러내어 주었다.

따라서 이번에는 그 역과정인 인수분해 공식을 제공하여 구조감각 인식을 돕고자 했을 때 $x-1=A$, $3=B$로 치환하여 $A^2-2AB+B^2$으로 변환 후 $(x-4)^2$이라 답하였다. 이에 대해 다음과 같이 설명함으로써 인수분해 공식을 통해 구조인식에 성공하였음을 보여주었다.

> NS3: 위 식대로 하면 $x-1$을 A로 두고 3을 B로 두면 $A^2-2AB+B^2$이고, $A^2-2AB+B^2$은 $(A-B)^2$이라고 했으니까 여기 A, B에 $x-1$이랑 3을 대입하면 이렇게 나와요.
> RS: 이 생각을 어떻게 했어?
> NS3: 생긴 형태가 a^2을 하나로 보고 $2ab$를 하나로 보고 b^2을 하나로 보면 생긴 형태가 비슷해 보이니까 $(x-1)$을 A로 9를 B^2으로 생각하면 위 식처럼 $a^2-2ab+b^2$꼴로 되니까요.

연구자는 학생이 인수분해 공식이 제공되기 전 구조를 인식하지 못한 원인과 더불어 곱셈공식이 제공되었을 때의 인지 처리를 파악하고자 면담을 이어갔다.

> RS: 앞에서는 왜 이 생각 못했어?
> NS3: 앞에서는 선생님이 제시해준 식을 못 봐서 그런 생각이 안 났어요.
> RS: 앞의 것은 A, B로 두고 했는데, 이것은 왜 그렇게 안 한 거지?
> NS3: 음… 앞의 식처럼 복잡하지 않아서 그냥 풀어도 풀 수 있겠다고 생각했어요.
> RS: 그럼 '$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$을 잘 보고 $(x-1)^2-6(x-1)+9$을 인수분해 해 보라'고 했을 때 왜 치환하지 않고 전개했던 거니?
> NS3: 그 때는 $(a-b)^2$이 $a^2-2ab+b^2$이라고 했으니까 $(x-1)^2$에서 x를 a로 보고 -1을 b로 고보 $x^2-2x\times1+1^2$ 이렇게 한 거예요.

NS3의 마지막 말은 복잡하지 않아 그냥 풀어도 풀 수 있겠다는 생각이 구조감각 형성의 방해 요소가 될 수 있음을 보여준다. 또한 그는 곱셈공식이 제공되었을 때는 $(a-b)^2$을 $(x-1)^2$에 사상시킴으로써 전개를 하게 된 것이다. 결국 곱셈공식을 가역적으로 인식하지 못하여 $a^2-2ab+b^2$을 주어진 식과 사상시키지 못함으로써 구조인식에 실패한 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 대수적 과제의 효율적인 수행을 위해 요구되는 구조감각의 관점에서 인수분해시 중학교 3학년 학생들의 구조감각 여부와 그에 따른 인지적 특성을 파악하고자 하였다.

연구문제 1과 관련하여 중학교 3학년 학생들은 인수분해를 할 때 다항식에 대한 구조감각을 지니는가에 대해, 연구 결과는 S1S, S1C에 대해 18.75%, 21.88%, S2S, S2C에 대해 37.5%, 12.5%, S3S, S3C에 대해 25.0%, 31.25%로 나타났다. 이는 인수분해에서 구조를 인식하는 것이 쉽지 않고, 구조의 유형에 따라 차이가 있음을 보여준다.

또한 전개하여 인수분해를 시도한 구조감각 결여 사례에서 전개의 어려움이 적지 않은 것으로 나타났다. S1C의 경우 전개하여 인수분해를 시도한 모든 사례에서 오류가 나타났다. 이러한 결과는 인수분해뿐만 아니라 문자식의 전개 역시 중점을 두어야 할 학습 요소임을 보여준다.

연구문제 2인 인수분해 문제의 인식과 풀이 과정에서 구조감각을 지닌 학생(SS)과 결여된 학생(NS)의 인지적 특성을 파악하기 위한 면담 결과로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 구조인식은 직관적인 특성의 것이다. 구조감각을 갖춘 면담참여자 3명은 모두 문제가 주어질 때 단숨에 즉각적으로 해결한다는 공통된 특징을 보여주었다. 식을 '봄'으로써 구조를 파악하는 것이다. 그러나 이 '본다'는 행위 자체는 지식 기반 활동이며 많은 경험이 뒷받침되어야 한다는 사실 또한 보여주었다.

둘째, 구조인식에 대한 동기와 도움이 되는 요소가 6명의 면담참여자에 따라 다양하였다. SS1은 빠르고 간단한 방법을 찾고자 하는 노력의 결과로 구조를 인식하는 능력을 갖출 수 있었다. SS2는 반복 연습의 중요성을 말하여, 손에 익을 만큼 많이 연습한 덕분에 전개하

지 않고 인수분해를 할 수 있었다고 토로하였다. SS3은 전개의 어려움에 대한 경험이 구조인식에 도움이 된 경우였다. 전개의 어려움에 대해 '제곱을 푸는 것도 어렵고, 적고 정리하려니까 칸도 모자라고 헷갈려서 어렵다'라고 구체적으로 설명하였다. 한편 NS3의 경우에는 시간의 제약이나 전개의 어려움, 인수분해 공식의 제공이 구조인식에 도움이 될 수 있었다. 그는 검사시에 S3C를 치환하여 인수분해하였으나 면담 과정에서는 전개 방법을 택하였다. 이는 검사시의 시간적 제약 또는 복잡한 식을 전개하는 어려움이 구조인식을 돕는 요인으로 작용할 수 있음을 보여준다. 또한 S3S를 풀 때는 인수분해 공식을 제공받아 구조인식에 성공할 수 있었다.

셋째, 구조인식을 방해하는 요인도 6명의 면담참여자에 따라 다양하였다. SS2는 구조감각을 지녔음에도 불구하고 지나친 대상화로 인해 치환이 오히려 동류항에 대한 계산을 어렵게 하는 요인이 될 수도 있음을 시사하였다. $(x-2)\{(x+3)+(x+4)+(x-5)\}$에서 $x-2$, $x+4$, $x-5$는 b, c, d로 치환되었기에 서로 다른 문자로 더 이상 계산이 불가하다는 생각을 한 것이다.

NS1은 식에 포함된 괄호 처리가 최우선이라는 강한 고착으로 인해 구조인식이 방해받을 수 있음을 보여주었다. 심지어 $(x-1)^2-6^2$과 a^2-b^2의 관련성을 인식하였음에도 불구하고 괄호는 풀어야 할 대상이라는 생각 때문에 구조인식에 실패하였다. 또한 인수분해의 개념이 제대로 정립되지 않은 경우 구조인식에 방해가 된다는 것을 확인할 수 있었다. S2S에서 원 식으로의 복귀 현상이 대표적인 예이며, NS1의 경우에는 '알아보기 쉽게 만드는 것이 인수분해'라는 잘못된 개념 이미지가 영향을 미친 것으로 분석된다.

NS2는 이차방정식의 학습 경험이 강하게 자리 잡고 있어 주어진 식으로부터 등식을 만들어 방정식 풀이로 환원하여 인수분해가 아닌 인수분해를 이용해 근을 구하는 오류를 범하였다.

NS3는 인수분해가 곱셈공식의 역 과정이고 곱셈공식을 통해 정당화된다는 사실에도 불구하고 곱셈공식의 제공은 전혀 도움이 되지 않으며, 오히려 방해가 된 사례에 해당한다. 즉 학생들은 등식 자체를 하나의 대상으로 인식하지 못하고 절차적으로 파악한다는 것을 함의한다. 이외에 NS3가 곱셈공식이나 인수분해 공식이 제공되었을 때 인수분해 해야 할 식을 모두 두 공식의 좌변에 사상시킨 것은 등식의 좌우 대칭 구조를 인식하지 못했음을 보여준다. 이 경우에 두 식의 제공은 각각 구별되는 단서임을 주목시킬 필요가 있다. 따라서 구조감각의 신장을 위해서는 식 $(x-1)^2-6(x-1)+9$를 구성하는 부분 다항식 $x-1$들을 하나의 대상으로 다룰 수 있을 뿐만 아니라 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$와 같은 식 자체를 대상으로 인식할 수 있어야 한다는 결론을 내릴 수 있다.

이와 같은 연구 결과로부터 인수분해에서 구조인식과 관련한 몇 가지 교수학적 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 인수분해에서 구조인식은 쉽지 않은 인지적 과제인 만큼 별도의 교수 방안이 요구된다. 학생 스스로 구조를 볼 수 있도록 하기 위해 도움이 될 것으로 기대되는 교수 전략을 구사할 필요가 있다. 본 연구의 면담 과정에서 함의되는 바로 이를테면, 시간의 제약이나 전개의 어려움을 이용할 수 있다. 복잡한 인수분해 문제를 제공하고 제한된 시간 내에 풀도록 하거나, 복잡한 전개를 통해 불편함을 인식하게 함으로써 빠르고 간단한 방법을 추구할 기회 제공하는 것이다. 이 외에 구조인식을 돕는 교육적 조치로서 구조감각을 스스로 갖출 수 있도록 인수분해 공식 제공, 치환 등의 단서를 적절히 이용하여 구조인식이 개선될 수 있도록 도와야 할 것이다. 다만 인수분해 공식의 제공이나 치환의 권유 등이 지닌 긍정적 효과에 반해 NS3처럼 곱셈공식의 제공이 역효과를 낼 수도 있음에 주의해야 한다.

둘째, 인수분해를 위한 구조감각을 지니기 위해 곱셈공식에 의한 전개에 능숙할 필요가 있다. 그 이점은 인수분해를 정당화하게 하고 등식의 대칭구조에 대한 명시적인 이해를 이끈다는 것이다. 실제로 면담 학생들은 전개하여 인수분해하는 것을 선호하였고 정답률도 높았던 것에 비추어 구조인식이 어려운 학생의 경우 곱셈공식에 의한 전개에 대해 충분히 숙달될 필요가 있다. 반면 전개하였으나 그 어려움이 컸던 학생도 있어 이 경우에도 식의 전개에 대한 숙달은 정당화된다. 또는 교수 전략적으로 전개의 불편함을 인식시킬 수 있는 문제를 제공함으로써 구조인식을 통한 인수분해 방법을 이용함으로써 구조감각을 지니도록 해야 할 것이다.

셋째, 본 연구의 면담에서 구조인식을 방해하는 것으

로 나타난 여러 가지 요소에 대한 주의가 필요하다. 식에 대한 지나친 대상화로 인한 동류항의 계산 불능, 치환에 의한 오류, 식의 처리시 괄호를 먼저 다루어야 한다는 관념, 인수분해와 방정식의 혼동 등이다. 이에 대해 각각이 적절하지 못한 학습 상황을 제공함으로써 식의 항을 보아야 하는 경우와 식에 대한 구조적 접근이 필요한 경우를 경험하도록 해야 한다. 괄호로 묶인 식의 단순화, 식의 치환 이후 새로운 식의 계산이나 괄호를 풀지 말고 인수분해 해보라는 제약 부과, 인수분해와 방정식 풀이의 결과 비교 등이 이용될 수 있다.

넷째, 구조인식자는 구조감각의 결여 상태를 이해하는 것이 쉽지 않음을 SS1의 사례로부터 확인할 수 있었다. 교사 역시 구조인식자라는 점에서 구조감각이 결여된 학생의 인지적 처리를 이해하기 어려울 수 있으며, 이는 교육 현장에서 인수분해 지도의 난점으로 작용할 것으로 생각된다. 식에 내포된 구조가 누구에게나 보이는 것은 아님을 이해하고, 구조감각 결여 학생에게 기회를 제공하고 인내가 요구된다. 구조인식과 관련해서도 교사의 도움은 불가피하며 인수분해에서 반복 연습이 구조인식에 도움이 된다는 점을 고려하여, 학생들이 반복 연습할 수 있도록 독려하는 것도 교사의 몫이다.

참 고 문 헌

국립국어원 (2014). 표준국어대사전. http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp

National Institute of the Korean Language(2014). *Standard Korean Dictionary.* http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp

김교희 (2013). 인수분해 단원에서 구조감각과 조작기술의 관계. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문

Kim, K.H. (2013). *Structure sense versus manipulation skills.* Master's thesis, SGU.

김남희 (1994). 대수적 사고에 관한 고찰: 산술과의 관련성과 변수개념. 수학교육학연구 4(2), 189-204

Kim, N.H. (1994). Considerations on algebraic thinking; Arithmetic connection and variable concept. *The Journal of Education Research in Mathematics 4*(2), 189-204.

라우성, 백석윤 (2009). 초등수학에서 문장제의 수학적 구조 파악을 통한 문장제 이해 지도 방안. 한국초등수학교육학회지 13(2), 247-268.

Ra, W.S., & Paik, S.Y. (2009). Teaching the comprehension of word problems through their mathematical structure in elementary school mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 13*(2), 247-268.

신은주 (2008). 중학교 3학년 학생들의 구조감각 실태조사 : 인수분해와 방정식 단원을 중심으로. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

Sin, E.J. (2008). *An survey on the structure sense performance of third grade middle school students.* Master's thesis, KNUE.

서현정 (2009). 중학교 3학년 학생들의 이차방정식 해결 과정에서 나타나는 구조감각 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

Seo, H.J. (2009). *An analysis on structure sense of the 9th graders in solving quadratic equations.* Master's thesis, KNUE.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009a). 중학교 수학 2. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009a). *Middle school mathematics 2.* Seoul: Chunjae education.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009b). 중학교 수학 3. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009b). *Middle school mathematics 3.* Seoul: Chunjae education.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009c). 중학교 수학 익힘책 3. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009c). *Middle school mathematics workbook 3.* Seoul: Chunjae education.

전미혜, 황우형 (2015). 정보인식 유형과 인수분해 학습 방법: 대수막대와 공식 활용을 중심으로. 수학교육논문집 29(1), 111-130.

Jeon, M.H., & Whang, W.H. (2015). Information recognition style and learning method for factorization: focusing on algeblocks and formula application. *Communications of Mathematical Education 29*(1), 111-130.

조영주, 김경미, 황우형 (2013). CAS 어플리케이션을 이용한 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에 대한 질적 분석. 수학교육 52(3), 271-301.

Cho, Y.J., Kim, K.M., & Whang, W.H. (2013). A qualitative analysis of students' factorization of $x^n - 1$ using a CAS application. *The Mathematical Education 52*(3), 271-301.

조태근, 임성모, 정상권 ,이재학, 이성재 (2003). 중학교 수학 9-가 교사용지도서. 서울: 금성출판사.

Jo, T.G., Lim, S.M., Jeong, S.G., Lee, J.H., Lee, S.J. (2003). *Middle school mathematics 9-ga guidebook for teacher*. Seoul: Kumsung.

최상기, 이지혜 (2009). 학교수학에서 인수분해의 지도. 수학교육 48(1), 81-91.

Choi, S.K., & Lee, J.H. (2009). Teaching factorization in school mathematics. *The Mathematical Education 48*(1), 81-91.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K.(2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: a fundamental experiment*. Dordrecht: Springer

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In E. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. 95-123. Dordrecht: Kluwer

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italy.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152).

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague: Charles University.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2009). Developing katy's algebraic structure sense. In *Proceedings of CERME 6;* www.inrp.fr/editions/cerme6

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics 40*(2), 173-196.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*(3), 191-228.

Analysis on cognitive characteristics of factorizing process in the perspective of structure sense

Hyewon Chang
Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education, Seoul 132-742, Korea
E-mail : hwchang@snue.ac.kr

Jeonggi Kang†
Gimhae Daegok Middle School, Gimhae 621-918, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

Factorization asks the recognition of the structure of polynomials, compared to polynomial expansion with process characteristic. Therefore it makes students experience a lot of difficulties. This study aims to figure out causes of the difficulties by identifying students' cognitive characteristics in factorizing in the perspective of 'structure sense'. To do this, we gave six factorizing problems of three types to middle school students and selected six participants as interviewees based on the test results. They were classified into two categories, structure sense and non-structure sense. Through this interview, we figured out the interviewee's cognitive characteristics and the causes of difficulty in the perspective of structure sense. Furthermore, we suggested some didactical implications for encouraging structure sense in factorizing by identifying assistances and obstacles for recognition of structures.

* ZDM Classification : E53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : structure sense, factorization, polynomial expansion, process, object, APOS theory
† Corresponding Author