

혼합정수 프로그래밍 기법을 이용한 진보된 Time-Cost Trade-Off Model

권오빈¹ · 이승현¹ · 손재호*

¹홍익대학교 건축공학부

Advanced Time-Cost Trade-Off Model using Mixed Integer Programming

Kwon, Obin¹, Lee, Seunghyun¹, Son, Jaeho*

¹Department of Architectural Engineering, Hongik University

Abstract : Time-Cost Trade-Off (TCTO) model is an important model in the construction project planning and control area. Two types of Existing TCTO model, continuous and discrete TCTO model, have been developed by researchers. However, Using only one type of model has a limitation to represent a realistic crash scenario of activities in the project. Thus, this paper presents a comprehensive TCTO model that combines a continuous and discrete model. Additional advanced features for non-linear relationship, incentive, and liquidated damage are included in the TCTO model. These features make the proposed model more applicable to the construction project. One CPM network with 6 activities is used to explain the proposed model. The model found an optimal schedule for the example to satisfy all the constraints. The results show that new model can represent more flexible crash scenario in TCTO model.

Keywords : Project Schedule, Optimization Model, Time-Cost Trade-Off Model

1. 서론

1.1 연구의 배경 및 목적

공정관리 분야에서 프로젝트의 공사기간을 단축하기 위해 프로젝트를 구성하고 있는 작업에 잉여자원(extra resource)을 투입하거나 이교대 또는 삼교대로 일일 작업량을 늘여 작업의 공기를 줄이는 행위를 크래쉬(crash)라 한다(Stevens 1990). activity의 공기를 줄이는 행위는 결국 프로젝트 전체의 공기를 줄이는 부분과 밀접한 관계를 가지며, 일반적으로 이 크래쉬 행위는 공기를 줄여 프로젝트의 간접비를 줄일 수 있으나 직접비를 증가시킨다. 이렇게 공기를 줄여 얻어진 간접비 절약 분과 공기를 줄이기 위해 늘어난 직접비 증가분을 고려하여 최소한 공사비를 이루어내는 프로젝트 스케줄을 찾는 문제를 Time-Cost Trade-Off(이상 TCTO)라 하며 이 문제는 건설공사의 경제적인 면과 밀접한 관계가 있는 중요한

문제로서 이미 여러 연구원들의 관심사로 이에 대해 이미 수많은 모델들이 개발되어왔다(Liu et al. 1995, Li et al. 1997, Leu et al. 2000, Hegazy 2001). 이제까지 개발된 대부분의 TCTO 모델은 CPM 네트워크를 이루는 작업들의 크래쉬 시나리오 정보를 바탕으로 전체 공사비를 최소화하는 것을 목적으로 한다.

지금까지 개발된 모델들은 크게 두 가지 종류의 TCTO 모델이 있다: 연속적인 모델(continuous model)과 분절된 모델(discrete model). 연속적인 모델(이하 연속모델)은 모든 activity가 정상적으로 수행되었을 때 필요한 정상공기(normal duration)와 정상비용(normal cost)을 가지고 있으며, 비상시 해당 작업을 최단기간에 수행할 수 있는 비상공기(crash duration)와 그에 해당하는 비상비용(crash cost)을 산출할 수 있다고 가정하고 정상공기와 비상공기, 정상비용과 비상비용 사이에 연속적인 관계를 가지고 있다고 가정한다(Stevens 1990, Perera 1980, Li and Love 1997, Li et al. 1999, Leu and Yang 1999, Leu et al. 2001, Que 2002). 이 모델에서는 비상공기와 정상공기 사이에서 전체 공사비를 최소화하는 최적의 공기를 찾는 것을 목적으로 한다. 분절모델은 프로젝트를 이루는 각각의 activity가 여러 개의 대안적

* Corresponding author : Son, Jaeho, Department of Architectural Engineering, Hongik University, Sejong 30016, Korea
E-mail: jaehoson@gmail.com
Received June 4, 2015; revised June 26, 2015
accepted August 26, 2015

인 공법을 사용할 수 있고 각 공법에 상응하는 공기와 비용을 가질 수 있다고 가정한다(Liu et al. 1995, Feng et al. 1997, 2000, Hegazy 1999). 이 모델에서는 공사비를 최소화하기 위해 각 작업들이 최적 공법을 선택할 수 있도록 도움을 준다. 하지만 연속모델이나 분절모델 어느 한 모델만으로는 프로젝트의 최적 스케줄을 창출하기에 한계가 있음에도 불구하고 이전에 개발된 TCIO 모델들은 둘 중 하나의 모델만을 기본으로 삼고 모델을 개발하였다. 그러므로 이 논문에서는 연속모델과 분절모델을 결합한 TCIO 모델을 개발하는 것이 본 연구의 최종 목적이며, 추가적으로 TCIO모델이 실제적인 모델이 될 수 있도록 다음의 요소들이 고려 가능하도록 두 가지 요소를 적용하였다. 첫 번째 선형적 연속 모델 뿐 아니라 비선형적 연속 모델도 처리할 수 있도록 한 것이며, 두 번째 인센티브(incentive) 와 지체 보상금(liquidated damage) 을 처리할 수 있는 요소를 적용 하였다.

2. TCIO 요소 모델 개발

2.1 간접비, 인센티브, 지체보상금 적용 모델: ICILD

대부분의 TCIO 모델에서 간접비는 TCIO 모델을 만드는 데 중요한 요소이다. 하지만, 대부분의 TCIO 모델은 인센티브와 지체 보상금 요소를 포함하고 있지 않아 TCIO 모델을 효과적으로 실제 공사에 이용하는데 어려움이 있었다. 게다가 요즘 실제 건설공사에서 인센티브와 지체보상금 항목이 계약서에 포함되는 경우가 많아졌다. 그러므로 본 논문에서는 인센티브와 지체보상금을 수학적으로 공식화하여 TCIO 모델에 이용하고자 한다. 이 수학적 공식화는 혼합 정수 프로그래밍(mixed integer programming) 기법과 조각적 선형 함수(piecewise linear function)를 이용하였다. 일반적으로 간접비(Indirect Cost), 인센티브 (Incentive), 그리고 지체보상금(Liquidated Damage)는 공사기간과 매우 밀접한 관계가 있다. 이 논문에서 "ICILD"는 Indirect Cost, Incentive, 그리고 Liquidated Damage를 표시하는데 이용되었다. Fig. 1과 Table 1에 나타난 예제 1은 이 연구에서 개발된 TCIO 모델을 쉽게 설명하기 위하여 사용되었다.

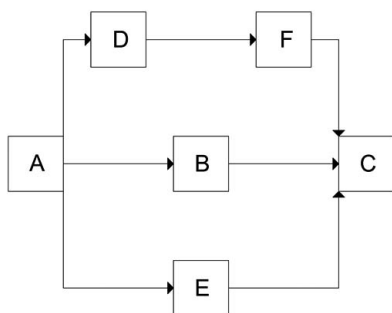


Fig. 1. Example1 Network Diagram

이 예제에서 사용된 간접비(Indirect Cost)는 \$1,000/일 인센티브(Incentive)는 \$1,000/일 그리고 지체보상금(Liquidated Damage)은 \$2,000/일로 설정되었다. 인센티브는 만일 시공자가 공사를 30일 이전에 끝내면 지불하는 것으로 결정했다고 가정한다. 지체 보상금은 만일 시공자가 공사를 40일 이 후에 마치면 지불해야 하는 것으로 가정한다. 만약 시공자가 공사를 27일째 마쳤다면 발주자는 시공자에게 \$3,000=(30-27)×\$1,000을 지불해야 하며, 만일 시공자가 공사를 44 일 째 마쳤다면 시공자는 발주자에게 \$8,000=(44-40)×\$2,000을 지불해야만 한다.

Table 1. Example 1 Network Information

Activity	Normal Duration (days)	Normal Cost(\$)	Crash Cost(\$)	Crash Duration (days)	Crash Cost Rate (\$/day)	
A	A1	10	20,000	24,000	8	\$2,000
	A2	12	18,000	20,000	10	\$1,000
	A3	15	12,000	16,800	9	\$800
B	B1 ¹⁾	7	10,000	N/A	N/A	N/A
	B2	10	8,000	9,200	8	\$600
	B3	15	5,000	7,100	12	\$700
	B4	18	4,000	4,800	14	\$200
C	10	8,000	12,000	5	\$800	
D	D1	6	5,000	6,000	5	\$1,000
	D2	8	3,000	5,700	5	\$900
	D3	10	1,000	4,600	4	Variable ²⁾
E	16	10,000	7,500	11	Variable ³⁾	
F	F1	3	10,000	N/A	N/A	N/A
	F2	6	8,000	N/A	N/A	N/A
	F3	8	6,000	N/A	N/A	N/A
	F4	10	5,000	N/A	N/A	N/A

여기에서 간접비, 인센티브, 및 지체보상금은 시간이란 요소에 따라 그 결과가 달라지므로 일반적으로 하나의 선형 함수로 표시될 수 없다. 그러므로 이 연구에서는 조각 선형 함수(piecewise function)를 이용하여 ICILD를 표현하였다. 다음에 표시되는 조각 선형 함수(piecewise function)는 공사기간에 따라 달라지는 비용함수를 표현한다.

$$ICILD(PD) = \begin{cases} ICR \times PD - IR \times (ID - PD) & (0 \leq PD \leq ID) \\ ICR \times PD & (ID \leq PD \leq LDD) \\ ICR \times PD + LDR \times (PD - LDD) & (LD \leq PD \leq 2.5 \times LDD) \end{cases} \quad (1)$$

숫자 2.5는 조각 선형 함수의 상한(upper bound)을 지정하는 것으로 여기서는 최악의 상황을 가정하여 공사가 지체 보상금이 발생하는 기간의 2.5배 기간 이내에는 확실히 끝날 것이라는 가정 하에 이용된 숫자이다. 만약 공기가 연기 될 가능성이 크면 이 숫자를 크게 하여 함수의 상한을 높일 수 있

- 1) 작업 B1과 F1~F4는 공기단축 불가 작업으로 가정.
- 2) 작업 D3 단축비용 : 첫째 둘째 날은 \$1,000/일, 셋째 넷째 날은 \$800/일, 다섯째 여섯째 날은 \$500/일로 가정.
- 3) 작업 E 단축비용 : 첫째 날은 \$500/일, 둘째 셋째 날은 \$1,500/일, 넷째 다섯째 날은 \$2,000/일로 가정.

다. 예제 1에 해당하는 숫자를 대입하면 위의 선형 조각 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$ICILD(PD) = \begin{cases} 1000 \times PD - 1000 \times (30 - PD) & (0 \leq PD \leq 30) \\ 1000 \times PD & (30 \leq PD \leq 40) \\ 1000 \times PD + 2000 \times (PD - 40) & (40 \leq PD \leq 100) \end{cases} \quad (2)$$

조각 선형 함수는 기울기가 다른 여러 개의 직선 조각으로 이루어진 함수로서, 위 예제1 에서 사용된 함수는 기울기가 다른 세 직선으로 이루어진 함수이다(Fig. 2). 만일 공기가 30일 이하이면 공식 (2)에서 첫 번째 공식을 사용하고 이 공식은 Fig. 2에서 왼쪽에서 첫 번째 직선 조각을 표현한다. 예를 들면, 공사가 28일째 끝나면 ICILD 는 $\$1000 \times 28 - \$1000 \times (30 - 28) = \$26,000$ 이 된다. 만약 공사가 30일과 40일 사이에 끝나면 두 번째 공식을 사용하고, 40일 이후에 끝나면 세 번째 공식을 사용한다. 직선의 기울기가 변하는 점을 분절점(Break Point) 라고 하는데, 위 예제에서는 4개의 분절점이 있다. 0, 30, 40, 100 이 위 조각 선형 함수의 분절점이 된다.

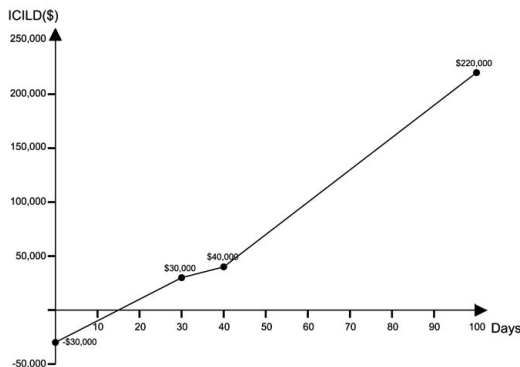


Fig. 2. Piecewise linear function

하지만 조각 선형함수는 선형함수이기는 하지만 순수한 선형함수는 아니다. 그러므로 이 조각 선형함수는 선형 프로그래밍(linear programming)의 목적함수(objective function)로 직접 이용될 수 없다. 선형 프로그래밍의 목적함수 포맷에 맞추기 위해 약간의 수정이 필요하다. 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 바꾸는 기술은 여러 선형 프로그래밍 연구 분야에서 개발되어 사용되고 있는 기술로 여러 분야에서 이미 널리 활용되는 기술이다(Wilson 1999, Ref). 다음은 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 바꾸는 일반적인 절차이다.

첫 째, 바꾸고자 하는 조각 선형함수 공식 (2)를 다음의 형태로 바꾸어준다.

$$ICILD(PD) = ICILD(0)Z_1 + ICILD(30)Z_2 + ICILD(40)Z_3 + ICILD(100)Z_4 \quad (3)$$

위 식은 공식에 숫자를 대입하면 다음 식으로 바뀐다.

$$ICILD(PD) = -30,000Z_1 + 30,000Z_2 + 40,000Z_3 + 220,000Z_4 \quad (4)$$

둘 째, 다음의 제한 조건들을 첨부한다.

$$PD = 0Z_1 + 30Z_2 + 40Z_3 + 100Z_4 \quad (5)$$

$$Z_1 \leq Y_1 \quad (6)$$

$$Z_2 \leq Y_1 + Y_2 \quad (7)$$

$$Z_3 \leq Y_2 + Y_3 \quad (8)$$

$$Z_4 \leq Y_3 \quad (9)$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 1 \quad (10)$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1 \quad (11)$$

$$Y_i = 0 \text{ or } 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

여기에서 사용된 $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Y_1, Y_2, Y_3$ 는 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 바꾸기 위해 사용된 특별 변수이다. Z_i 변수의 숫자는 사용된 조각 선형함수의 분절점 숫자와 일치한다. 이 예제에서 0, 30, 40, 100은 원래의 조각 선형함수의 분절점으로, 4개의 분절점이 있으므로 4개의 Z_i 값이 사용되었으며 만일 조각 선형함수가 더 많은 분절점이 있다면 그 분절점 개수만큼의 Z_i 값이 첨부된다. Y_i 변수의 숫자는 사용된 조각 선형함수의 선형조각의 숫자와 동일하다. 이 예제에서는 3개의 선형조각이 있으므로 3개의 Y_i 값이 사용되었으며 직선의 선형조각 숫자가 늘어날수록 Y_i 의 개수도 늘어난다. 공식 (4)-(12)가 어떻게 작용하는지 간단히 살펴보기로 하자. Fig. 2에서 만약 공기 (PD)에서 수직으로 선을 그었을 때 i 번째 직선조각에 닿으면 Y_i 의 값은 1이 된다. 예를 들어, $PD=35$ 이면 PD 는 두 번째 직선조각에 닿으므로, $Y_2=1$ 이 되고 공식 (11)에 따라 자동적으로 $Y_1=Y_3=0$ 이 된다. 공식 (6)-(10)에 따라 만약 $Y_2=1$ 이 되면 Z_2 와 Z_3 은 0과 같거나 1보다 작은 수가 되도록 만들며, 그 외의 Z 값 즉 Z_1 과 Z_4 는 반드시 0이 된다. 그러면 등식 (5)는 $35=30Z_2+40Z_3$ 가 된다. 또한 $Z_2+Z_3=1$ 이므로 두 등식을 풀면 $Z_2=0.5$ 그리고 $Z_3=0.5$ 가 된다. 그러므로 $PD=35$ 일 때 $Z_2=0.5, Z_3=0.5$ 가 된다. 그러므로 등식 (4)에 이 값들을 대입하면 $ICILD(35) = \$30,000 \times 0.5 + \$40,000 \times 0.5 = \$35,000$ 이 $ICILD$ 값은 공식 (2)에서 PD 값이 35일 때 얻어지는 $ICILD$ 값과 같으며, PD 값이 0과 100 사이에 어떤 값이 선택되더라도 조각 선형함수를 공식 (3)-(12)를 이용하여 선형 프로그래밍 포맷을 이용하여 $ICILD$ 값을 구할 수 있다.

2.2 공사시간과 공사비용 간의 비선형적 관계 모델

기존의 수학적 연속 TCTO 모델에서는 공사 일정을 줄일 때 추가로 부과되는 "단축 비용/일"을 일정하게, 달리 말하면 줄어든 시간과 추가로 부과되는 비용 사이의 관계가 선형적인 관계로 가정하였다(Fig. 3).

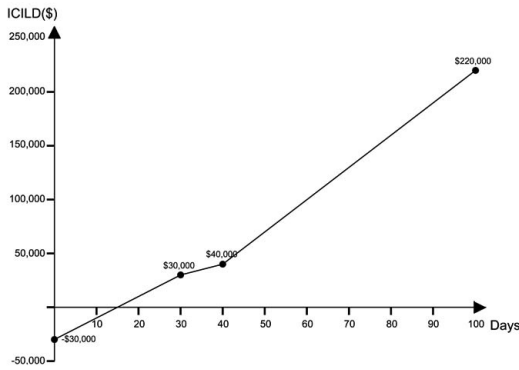


Fig. 3. Linear Model

하지만 이러한 가정은 특별한 경우에 성립되지 않을 수 있다. 이 논문에서는 두 가지의 특별한 비선형적인 경우를 간략히 소개하고 그 경우들을 처리할 수 있는 요소를 새로운 TCIO 모델에 포함시키고자 한다.

첫 번째 비선형적인 관계는 볼록(Convex) 유형의 관계이다(Fig. 4). 이 경우는 작업들을 단축할 경우 처음 며칠을 단축할 때는 일별 단축비용이 서서히 증가하다가 작업을 줄일 수 있는 한계 점에 접근할수록 단위 단축 비용이 갑자기 증가할 수 있는 경우이다. 두 번째 관계는 오목(Concave) 유형의 관계이다(Fig. 5). 이 경우는 작업들을 단축할 때 초반 셋업(setup) 비용이 많이 들 경우이다. 즉, 초반의 비용이 갑자기 증가하다가 후반부로 갈수록 비용이 서서히 줄어드는 경우이다.

2.2.1 볼록 유형 관계

예제 1에 있는 작업 E는 볼록(Convex) 유형의 관계를 가졌다.



Fig. 4. Convex Relationship

Table 1에 의하면 보통 상황에서 작업 E를 수행하기 위해서는 16일의 공기와 \$10,000의 비용을 요한다. 처음 하루를 단축하는 데는 \$500/일이, 둘째 날과 셋째 날을 단축하는데 \$1500/일이, 넷째 날과 다섯째 날을 단축하는 데는 \$2000/일이 소요되었다. 그러므로 세 직선조각이 이 convex 관계에 존재한다.

앞장에서 다루었던 조각 선형함수를 선형적 프로그래밍포맷으로 바꾼 방법을 이곳에서 사용할 수도 있으나 이 연구에서는 좀 더 간단한 방법으로 이 문제를 해결하였다.

작업 E 부분만을 선형적 프로그래밍 목적함수(objective function) 형태와 제한조건(constraints)을 가지고 표현하면 다음과 같다.

목적함수:

$$\text{Min } 10,000 + 500\text{CREV1} + 1,500\text{CREV2} + 2,000\text{CREV3} \quad (13)$$

제한조건:

$$\text{CREV1} \leq 1 \quad (14)$$

$$\text{CREV2} \leq 2 \quad (15)$$

$$\text{CREV3} \leq 2 \quad (16)$$

$$\text{SC} \geq \text{SE} + 16 - \text{CREV1} - \text{CREV2} - \text{CREV3} \quad (17)$$

위 공식에서 \$10,000은 작업 E의 정상비용이며, CREV1, CREV2, CREV3는 작업 E의 첫째, 둘째, 셋째 convex 조각에서 crash 할 수 있는 일수를, SE는 작업 E의 시작시간을, SC는 작업 C의 시작시간을 의미한다. 여기서 작업 C는 작업 E의 후행 작업이다. 공식 (17)에서 숫자 16은 작업 E의 정상공기이며 단축을 하면 할수록 작업 E의 공기는 줄어든다. 그럼 공식 (13)-(17)이 어떻게 적용되는지 살펴보도록 하자. 공식 (13)은 CREV1이 CREV2나 CREV3 보다 먼저, CREV2가 CREV3 보다 먼저 선택되도록 유도한다. 만약 작업 E가 2일을 단축해야 한다고 가정하자. 이 경우 CREV1=1 CREV2=1이 자동적으로 선택된다. 왜냐하면 CREV1의 계수(coefficient)가 CREV2의 계수보다, CREV2의 계수가 CREV3의 계수보다 작기 때문이다. 다른 말로 표현하면 계수가 작다는 것은 목적함수 값이 작아진다는 것을 의미하고 우리가 다루고자 하는 목적함수가 최소화 문제이므로 위의 선택은 당연한 선택이 된다. 그러므로 첫 번째 조각이 두 번째 세 번째 조각보다 먼저, 두 번째 조각이 세 번째 조각보다 먼저 crash 되도록 하는 제한 조건을 따로 둘 필요가 없어진다.

2.2.2 오목 유형 관계

예제 1에서 작업 D3는 오목 관계(Concave Relationship)를 갖는다. 보통 상황에서 작업 D3를 마치기 위해서는 10일의 공기와 \$1,000의 비용을 요한다. 첫째 날과 둘째 날을 단축하는 데는 \$1,000/일이, 셋째 날과 넷째 날을 단축하는데 \$800/일이, 다섯째 날과 여섯째 날을 단축하는 데는 \$500/일이 소요되었다. 그러므로 세 직선조각이 concave유형으로 존재한다.

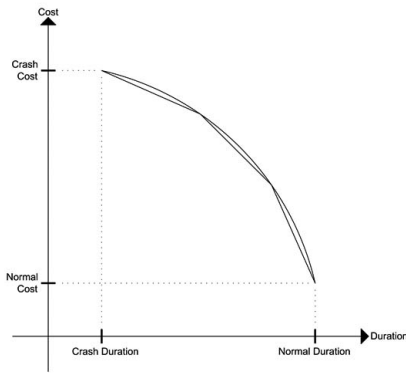


Fig. 5. Concave Relationship

이 경우에선 convex에서 사용된 공식들을 이용할 수 없다. 예를 들어, 3일을 단축해야 한다고 가정하자. 최소화 문제가므로 계수가 작은 것을 먼저 선택하면 세 번째 조각 2일, 두 번째 조각 1일을 단축하게 된다. 하지만 첫 번째 조각을 단축하지도 않은 채 둘째, 세 번째 조각을 단축하는 것은 불가능하다. 그러므로 오목 관계(concave relationship)에서는 먼저 단축해야 하는 조각의 순서를 정하고 지켜주는 제한 조건이 반드시 필요하다. 이 문제를 해결하기 위해 앞장에서 이용하였던 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 바꾼 방법을 이곳에서 사용하기로 한다. 작업 D3의 단축비용(Crashing Cost)의 조각 선형함수를 표현하면 다음과 같다.

$$CC(CR_{D3}) = \begin{cases} 1000 \times CR_{D3} & (0 \leq CR_{D3} \leq 2) \\ 800 \times CR_{D3} + 400 & (2 \leq CR_{D3} \leq 4) \\ 500 \times CR_{D3} + 1600 & (4 \leq CR_{D3} \leq 6) \end{cases} \quad (18)$$

여기에서 CC는 Crashing Cost이고 CRD3은 작업 D3을 단축한 일수이다. 이 조각 선형함수에서 분절점은 0, 2, 4, 6으로 단축 비용의 효율이 바뀌는 일수를 의미한다. 위 CC는 TCTO 모델의 목적함수의 일부로 포함이 된다. 만일 작업 D3을 3일 단축할 경우 위 공식을 이용하면 $\$800 \times 3 + \$400 = \$2800$ 으로 Table 1에 나타난 정보를 가지고 계산한 crashing cost($2 \times \$1000 + 1 \times \$800 = \$2800$)와 일치한다. 하지만 이 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷에 직접 적용할 수 없으므로 이전에 사용했던 인센티브와 지체보상금을 적용하기 위해 사용했던 방법과 동일한 방법을 이용할 수 있다. 공식 (18)은 다음 식으로 대체된다.

$$CC(CRD3) = CC(0)ZD3C1 + CC(2)ZD3C2 + CC(4)ZD3C3 + CC(6)ZD3C4 \quad (19)$$

$$CC(CRD3) = 0 ZD3C1 + 2000 ZD3C2 + 3600 ZD3C3 + 4600 ZD3C4 \quad (20)$$

다음은 제한 조건에 포함한다:

$$CRD3 = 0 ZD3C1 + 2 ZD3C2 + 4 ZD3C3 + 6 ZD3C4 \quad (21)$$

$$ZD3C1 \leq YD3C1 \quad (22)$$

$$ZD3C2 \leq YD3C1 + YD3C2 \quad (23)$$

$$ZD3C3 \leq YD3C2 + YD3C3 \quad (24)$$

$$ZD3C4 \leq YD3C3 \quad (25)$$

$$ZD3C1 + ZD3C2 + ZD3C3 + ZD3C4 = 1 \quad (26)$$

$$YD3C1 + YD3C2 + YD3C3 = 1 \quad (27)$$

여기에서도 ICILD를 계산할 때 사용되었던 특별 변수인 Z, Y가 이용되었으며, 이 변수들에 이용된 첨자의 의미는 다음과 같다. Z 변수에서 D3C1은 activity D3의 Concave 조각 선형함수의 첫 번째 Z 값을 의미하며 Y 변수에서 D3C1은 작업 D3의 concave 조각 선형함수의 첫 번째 Y 값을 의미한다.

이 식들이 어떻게 작용하는지는 이전 장에 설명했던 것과 같은 원리로 이 장에서는 다시 설명하지 않기로 한다. 다만 여기서는 작업 D3의 후행 작업과의 관계를 정해주는 제한조건이 생략되었는데, 이 제한조건과 관련된 공식은 분절모델과 연속모델이 결합된 모델을 다룰 다음 장에서 설명하고자 한다.

3. 진보된 TCTO 모델 개발

3.1 분절모델과 연속모델의 결합 모델

서론에서 언급했듯이 가장 현실적인 TCTO 모델은 분절모델과 연속모델을 결합한 형태의 혼합(Hybrid) TCTO 모델이다. 이장에서는 두 모델을 결합하기 전에 각각의 모델에 대해서 간단하게 살펴본 후 결합된 모델을 소개하기로 한다.

3.1.1 분절유형 (Discrete Case)

작업 F는 대표적인 분절 유형이다. 예제1에서 작업 F는 4가지의 대안 공법을 가지고 있으며, 각 공법에 따라 소요되는 비용과 시간이 다르다. 일반적으로 프로젝트의 공정을 계획하는 공정관리자는 전체적인 프로젝트 공정 내에서 각 공법을 선택했을 때 전체 공정에 어떤 영향을 미치는가를 반드시 고려해야 하며, 어떤 공법을 선택하는 것이 가장 최적의 프로젝트 공정을 만들어 내는 가는 특별한 최적화 모델을 사용하지 않고서는 그리 직관적이고 간단한 문제가 아니다. 그리하여 많은 분절 모델이 개발되어 왔다. 분절 모델의 전형적인 목적함수와 제한조건을 작업 F를 가지고 표현하면 다음과 같다.

목적함수:

$$\text{minimize } 10000XF1 + 8000XF2 + 6000XF3 + 5000XF4 \quad (28)$$

제한조건:

$$SC \geq SF + 3XF1 + 6XF2 + 8XF3 + 10XF4 \quad (29)$$

$$XF1 + XF2 + XF3 + XF4 = 1 \quad (30)$$

$$XF_i \ (i = 1, 2, 3, 4) = 0 \text{ or } 1 \quad (31)$$

여기에서 SF는 작업 F의 시작 시간이며 SC는 작업 F의 후행 작업인 C의 시작 시간이다. XF1, XF2, XF3, XF4는 2치 변수(binary variable) 즉 0 또는 1이다. XF_i=1은 i번째 대안 공법이 선택되었다는 의미이다. 만약 2번째 공법이 선택되었으면 XF2 값에는 1이 할당되고 나머지 XF1, XF3, XF4 값에는 0이 할당된다. 즉, 만약 한가지의 공법이 선택되었다면 나머지 공법들은 선택될 수 없음을 의미한다. XF2가 1이므로 공식 (28)에 의해 \$8,000이라는 2번째 공법을 선택했을 때 드는 비용이 포함된다. 또한 공식 (29)에 의해 6일이라는 2번째 공법을 선택했을 때 소요되는 기간이 activity F의 공기로 선택된다. 즉 어떤 공법이 선택되느냐에 따라 해당 작업의 공기가 결정됨을 의미한다. 공식 (29)는 또한 후행 작업인 C는 작업 F를 마치고 나서야만 시작할 수 있음을 나타낸다. 공식 (30)은 오직 한 가지 공법만이 선택될 수 있음을 나타낸다.

3.1.2 연속 유형 (Continuous Case)

작업 C는 대표적인 선형적인 유형(continuous case)이다. 작업 C는 정상적인 조건에서 \$8,000의 비용으로 10일 만에 끝낼 수 있는 작업이다. 하지만 비상시에는 9, 8, 7, 6, 혹은 5일만에도 끝낼 수 있는 작업이기도 하다. 이때 하루를 줄이는데 소요되는 단축 비용은 \$800이다. 이에 대한 전형적인 목적함수와 제한조건은 다음과 같다.

목적함수:
 Minimize 8,000 (normal cost of Activity C) + 800CRC (32)

제한조건:
 PD ≥ SC+10-CRC (33)

CRC ≤ 5 (34)

여기에서 CRC는 activity C의 단축된 일 수 Sc는 작업 C의 시작 시간; 숫자 10은 작업의 정상 공기 PD는 전체 공기(project duration); 숫자 5는 작업 C에서 최대한 단축할 수 있는 일수를 의미한다. 공식 (32)는 전체 목적함수의 일부가 되며 매일 단축할 때 마다 \$800이 증가한다는 것을 나타낸다. 공식 (33)은 작업 C가 Project Network에서 마지막 작업이므로 전체적인 공기를 계산해준다. 다시 말하면 작업 C의 평상시 공기 10에 단축한 일수를 빼주면 그 단축한 일수에 해당하는 공기가 계산되므로, 작업 C의 시작 시간에 새로 산출된 공기를 더해 전체 공기를 산출한다. 예를 들어 3일을 단축했다고 가정하자, 새로운 작업 C의 새로운 공기는 7일(10일-3일)이 된다. 이 새로운 공기 7일을 시작 시간에 더하면

전체 공기가 계산된다. 공식 (33)에서 등식이 사용되지 않고 부등식이 사용된 이유는 마지막 작업이 하나이상일 경우를 대비한 것으로 이 예에서는 등식을 사용해도 무방하다. 공식 (34)는 작업 C를 최대한 단축할 수 있는 일수를 나타낸다. 즉 작업 C를 5일 이상을 단축할 수 없음을 뜻한다.

3.1.3 Combination Case

일반적으로 TCTO모델에서 분절 또는 연속모델만을 사용하여 작업의 단축을 현실적으로 표현하기는 어렵다. 그러므로 이 논문에서는 작업의 단축을 새로운 방법으로 표현하려 한다. 이 새로운 방법은 분절 방법과 연속 방법을 합친 일종의 혼합(Hybrid) 방법이다. 이 새로운 방법을 설명하기 위해 작업 D를 이용하고자 한다.

작업 D는 3가지 각기 다른 방법(D1, D2, D3)으로 시공이 가능한 작업이며, 이 각각의 방법은 일반 공기, 일반 가격, 단축 공기, 단축 비용과 같은 정보를 알 수 있다고 가정하자. 공법 D1, D2는 가격 증가분과 단축한 기간 사이의 관계가 작업 C와 같은 선형적(linear) 관계이다. 공법 D3는 가격 증가분과 단축한 기간 사이의 관계가 비선형 concave 관계이다. 다음 목적함수와 제한조건은 작업 D의 분절 모델과 연속 모델의 결합을 가능하게 해준다.

목적함수:
 Minimize 5000XD1 + 1000CRD1 + 3000XD2 + 900CRD2 + 1000XD3 + 2000ZD3C2 + 3600ZD3C3 + 4600ZD3C4 (35)

제한조건:
 SF ≥ SD + 6XD1 + 8XD2 + 10XD3 - CRD1 - CRD2 - CRD3 (36)

CRD1 < 1 (37)

CRD2 < 3 (38)

CRD3 < 6 (39)

CRD2 + CRD3 10000YD1 < 0 (40)

CRD1 + CRD3 10000YD2 < 0 (41)

CRD1 + CRD2 10000YD3 < 0 (42)

XD1 + 10000YD1 < 10000 (43)

XD2 + 10000YD2 < 10000 (44)

XD3 + 10000YD3 < 10000 (45)

XD1 + XD2 + XD3 = 1 (46)

CRD3 = 0 ZD3C1 + 2 ZD3C2 + 4 ZD3C3 + 6 ZD3C4 (47)

ZD3C1 = YD3C1 (48)

ZD3C2 = YD3C1 + YD3C2 (49)

ZD3C3 = YD3C2 + YD3C3 (50)

ZD3C4 = YD3C3 (51)

ZD3C1 + ZD3C2 + ZD3C3 + ZD3C4 = 1 (52)

YD3C1 + YD3C2 + YD3C3 = 1 (53)

여기에서 X_{D1} , X_{D2} , X_{D3} 는 이항 변수로 0 아니면 1 값이 할당된다. $X_{Di}=1$ 은 i 번째 공법이 선택되었다는 것을 의미한다. CR_{Di} 는 작업 D에서 i 번째 공법이 선택되었을 때 단축된 일수를 의미한다. Z_{D3C1} , Z_{D3C2} , Z_{D3C3} , Z_{D3C4} , Y_{D3C1} , Y_{D3C2} , and Y_{D3C3} 는 concave 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 변환할 때 사용되는 특별 변수이다. Y_{D3C1} , Y_{D3C2} , Y_{D3C3} 는 2 치 변수(binary variable)이고 0 또는 1 값이 할당된다. Y_{D1} , Y_{D2} , Y_{D3} 는 오직 선택된 공법에서만 단축이 이루어질 수 있도록 유도하는 특별 변수로서 이진수 형태의 변수이다. 공식 (35)는 가장 적은 비용을 유도하는 목적함수로서 이를 간단하게 설명하면 다음과 같다. 만약 공법 1이 채택된 상황에서 2일 단축 된다면 목적함수의 값은 $\$7,000(=\$5,000+\$2,000)$ 이 된다. 공식 (36)은 작업 D의 후행작업 F와의 관계를 나타내는 제한조건이다. 공식 (37)–(39)는 공법1, 2, 3을 사용했을 때 작업 D가 단축할 수 있는 최대 일수를 보여준다. 공식 (40)–(46)은 오직 한 가지 공법만이 선택되고, 일단 공법이 선택되면 그 공법을 제외한 다른 공법이 단축할 수 있는 일수를 0으로 만들어준다. 단축 일수가 0이라는 것은 단축할 수 없음을 의미하며, 선택되지 않은 공법이 목적함수 내에서 의미 없이 단축되는 것을 방지한다. 다르게 표현하면 오직 공기단축은 선택된 공법 내에서만 이루어진다는 것이다. 다음 예는 어떻게 공식 (40)–(46)이 적용되는지 보여준다. 만약 작업 D를 수행하기 위해 공법 3이 채택된다면 공식 (46)에 의해 $X_{D3}=1$ 이다. $X_{D3}=1$ 이면 공식 (45)에 의해서 Y_{D3} 는 반드시 0이 되어야 한다. Y_{D3} 가 0이면 공식 (42)에 따라 CR_{D1} 과 CR_{D2} 는 반드시 0이 되어야 한다. 공식 (47)–(52)는 공법 3을 채택했을 시 작업 D의 concave 조각 선형함수 선형 프로그래밍 포맷으로 변환할 때 수행되어야 할 공식들로 앞에서 어떻게 적용되는지를 이미 다룬바 있다.

3.2 통합적 TCTO 모델

이 논문에서는 인센티브, 지체보상금, 오목, 불록 비선형 관계 등을 다룰 수 있는 요소를 비롯하여 분절모델과 연속모델을 결합한 통합적인 TCTO 모델을 제안하였다. 예제 1에 관한 전체 목적함수와 전체 제한 조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

목적함수:

Minimize

$$\begin{aligned} & \text{Normal Cost} + 20000X_{A1} + 2000CR_{A1} + 18000X_{A2} + 1000CR_{A2} + 12000X_{A3} + \\ & 800CR_{A3} + 10000X_{B1} + 8000X_{F2} + 600CR_{B2} + 5000X_{B3} + 700CR_{B3} + 4000X_{B4} \\ & + 200CR_{B4} + 8000X_C + 800CR_C + 5000X_{D1} + 1000CR_{D1} + 3000X_{D2} + \\ & 900CR_{D2} + 1000X_{D3} + 2000Z_{D3C2} + 3600Z_{D3C3} + 4600Z_{D3C4} + 10,000X_E + \\ & 500CR_{EV1} + 1500CR_{EV2} + 2000CR_{EV3} \end{aligned}$$

$$+ 10000X_{F1} + 8000X_{F2} + 6000X_{F3} + 5000X_{F4} - 30000Z_1 + 30000Z_2 + 40000Z_3 + 220000Z_4$$

제한조건:

$$\text{Normal Cost} = 18000$$

$$PD = 0Z_1 + 30Z_2 + 40Z_3 + 100Z_4$$

$$Z_1 \leq Y_1$$

$$Z_2 \leq Y_1 + Y_2$$

$$Z_3 \leq Y_2 + Y_3$$

$$Z_4 \leq Y_3$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 1$$

$$Y_i = 0 \text{ or } 1 \text{ (} i = 1, 2, 3 \text{)}$$

$$CR_{D3} = 0Z_{D3C1} + 2Z_{D3C2} + 4Z_{D3C3} + 6Z_{D3C4}$$

$$Z_{D3C1} \leq Y_{D3C1}$$

$$Z_{D3C2} \leq Y_{D3C1} + Y_{D3C2}$$

$$Z_{D3C3} \leq Y_{D3C2} + Y_{D3C3}$$

$$Z_{D3C4} \leq Y_{D3C3}$$

$$Z_{D3C1} + Z_{D3C2} + Z_{D3C3} + Z_{D3C4} = 1$$

$$Y_{D3C1} + Y_{D3C2} + Y_{D3C3} = 1$$

$$Y_{D3Ci} = 0 \text{ or } 1 \text{ (} i = 1, 2, 3 \text{)}$$

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} = 1$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} = 1$$

$$X_{D1} + X_{D2} + X_{D3} = 1$$

$$X_{F1} + X_{F2} + X_{F3} + X_{F4} = 1$$

$$\text{all X values} = 0 \text{ or } 1$$

$$S_B \geq S_A + 10X_{A1} + 12X_{A2} + 15X_{A3} - CR_{A1} - CR_{A2} - CR_{A3}$$

$$S_D \geq S_A + 10X_{A1} + 12X_{A2} + 15X_{A3} - CR_{A1} - CR_{A2} - CR_{A3}$$

$$S_E \geq S_A + 10X_{A1} + 12X_{A2} + 15X_{A3} - CR_{A1} - CR_{A2} - CR_{A3}$$

$$S_F \geq S_D + 6X_{D1} + 8X_{D2} + 10X_{D3} - CR_{D1} - CR_{D2} - CR_{D3}$$

$$S_C \geq S_B + 7X_{B1} + 10X_{B2} + 15X_{B3} + 18X_{B4} - CR_{B2} - CR_{B3} - CR_{B4}$$

$$S_C \geq S_F + 3X_{F1} + 6X_{F2} + 6X_{F3} + 10X_{F4}$$

$$S_C \geq S_E + 16 - CREV1 - CREV2 - CREV3$$

$$PD \geq S_C + 10 - CR_C$$

$$CR_{A2} + CR_{A3} - 10000Y_{A1} < 0$$

$$CR_{A1} + CR_{A3} - 10000Y_{A2} < 0$$

$$CR_{A1} + CR_{A2} - 10000Y_{A3} < 0$$

$$X_{A1} + 10000Y_{A1} < 10000$$

$$X_{A2} + 10000Y_{A2} < 10000$$

$$Y_{A3} + 10000Y_{A3} < 10000$$

$$Y_{Ai} = 0 \text{ or } 1 \text{ (} i = 1, 2, 3 \text{)}$$

$$CR_{B1} = 0$$

$$CR_{B2} + CR_{B3} + CR_{B4} - 10000Y_{B1} < 0$$

$$CR_{B1} + CR_{B3} + CR_{B4} - 10000Y_{B2} < 0$$

$$CR_{B1} + CR_{B2} + CR_{B4} - 10000Y_{B3} < 0$$

$$\begin{aligned}
 &CR_{B1} + CR_{B2} + CR_{B3} - 10000Y_{B4} < 0 \\
 &X_{B1} + 10000Y_{B1} < 10000 \\
 &X_{B2} + 10000Y_{B2} < 10000 \\
 &X_{B3} + 10000Y_{B3} < 10000 \\
 &X_{B4} + 10000Y_{B4} < 10000 \\
 &Y_{Bi} = 0 \text{ or } 1 (i = 1, 2, 3) \\
 &CR_{D2} + CR_{D3} - 10000Y_{D1} < 0 \\
 &CR_{D1} + CR_{D3} - 10000Y_{D2} < 0 \\
 &CR_{D1} + CR_{D2} - 10000Y_{D3} < 0 \\
 &X_{D1} + 10000Y_{D1} < 10000 \\
 &X_{D2} + 10000Y_{D2} < 10000 \\
 &X_{D3} + 10000Y_{D3} < 10000 \\
 &Y_{Di} = 0 \text{ or } 1 (i = 1, 2, 3) \\
 &CR_C \leq 5 \\
 &CR_{EV1} \leq 1 \\
 &CR_{EV2} \leq 2 \\
 &CR_{EV3} \leq 2 \\
 &CR_{A1} \leq 2 \\
 &CR_{A2} \leq 2 \\
 &CR_{A3} \leq 6 \\
 &CR_{B2} \leq 2 \\
 &CR_{B3} \leq 3 \\
 &CR_{B4} \leq 4 \\
 &CR_{D1} \leq 1 \\
 &CR_{D2} \leq 3 \\
 &CR_{D3} \leq 6
 \end{aligned}$$

여기에서 $X_{\text{alternative}}$ (예를 들어, X_{A1} , X_{B2} , X_{D3} 등): 바 이너리 변수로 그 공법이 선정되었는지 아닌지의 여부를 결정한다.

CR_{activity} (예를 들어, CR_{A3} , CR_{D1} 등): 해당 작업의 단축 하는 일수를 의미한다. $CR_{\text{activity}Vi}$ (예를 들어, $CREV1$, $CREV2$ 등): 볼록 조각 선형함수(convex piecewise)에서 i 번째 구간에서의 단축일 수를 뜻한다.

Z_i , Y_i : 인센티브, 지체보상금, 간접비를 처리하게 위해 사용된 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 변환하기 위해 사용된 특별함수이다. 여기서 $Y_i = \{0, 1\}$.

$Z_{\text{activity}Ci}$ (예를 들어, Z_{D3C1} , Z_{D3C2} 등), $Y_{\text{activity}Cj}$ (예를 들어, Y_{D3C1} , Y_{D3C2}): 오목 조각 선형함수를 선형 프로그래밍 포맷으로 변형시키기 위해 사용된 특별 변수이다. 여기에서 $Y_{\text{activity}Cj} = \{0, 1\}$

PD: 전체 공사 기간을 뜻한다.

S_{activity} (예를 들어, s_a , s_b , s_c 등): activity의 시작 일을 의미한다. $Y_{\text{alternative}}$ (예를 들면, y_{a1} , y_{b1} , y_{d1} 등): 일단 한 공법이 선택되면 다른 공법이 사용될 수 없도록 만드는 이

진수 형태의 특별 변수이다.

3.3 예제 1의 최적화 결과

이 논문에서 제안한 통합 TCCTO를 사용하여 예제 1을 풀어 보면 다음과 같은 결과를 얻는다.

Table 2. Example 1 Optimization Results

Objective Function	\$81,700					
Project Duration (PD)	29					
Act Work	Activity A	Activity B	Activity C	Activity D	Activity E	Activity F
Choose Alternative	XA3=1	XB4=1	-	XD3=1	XF3=1	XF3=1
Crash Duration	CRA3=6	CRB4=3	CRC=5	CRD3=3	CREV1=1	-

위 숫자적 해답을 풀어 쓰면 작업 A는 세 번째 공법을 선택하여 6일을 단축 하고, 작업 B의 경우 4번째 공법을 택하여 3 일 단축 하고, 작업 C의 경우 5일 단축 하고, 작업 D의 경우 3 번째 공법을 선택하여 3일 단축 하고, 작업 E의 경우 1일 단축 하고, 작업 F의 경우 세 번째 공법을 선택한다. 위의 시나리오를 따르면 전체 공기는 29일이며 그에 따른 공사비는 \$81,700이다.

건설 공정에서 어떠한 공기단축 시나리오도 이 연구를 통해 개발된 모델로 표현될 수 있으며 이 모델은 실질적인 TCCTO 모델을 활용할 수 있다는 측면에서 공정관리의 최적화 부분에 기여할 수 있다. 특히 이 모델은 비상사태 시 공사의 준공일을 준수하기 위해 공기를 줄이고자 할 때 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

4. 결론

이 논문에서는 기존의 TCCTO 모델에 몇 가지 요소를 보완하여 보다 진보된 TCCTO 모델을 개발하였다. 첫째, 기존의 TCCTO 모델이 연속모델 혹은 분절모델 중 한 가지를 이용하였기 때문에 건설 공정에서 공기단축 시나리오를 현실적으로 반영하기 힘든 점이 있었으나 본 연구에서 연속모델과 분절모델을 결합한 혼합 모델을 개발함으로써 TCCTO 모델을 좀더 실질적으로 적용할 수 있도록 하였다. 둘째, 기존의 TCCTO 모델은 선형적인 연속모델 위주의 TCCTO 모델이었으나 이 논문에서 비선형적인 연속모델을 다룰 수 있는 convex와 concave유형의 모델을 개발하여 비선형적인 연속모델을 TCCTO 모델에 포함하였다. 셋째, 현재 계약서상에 첨부되는 인센티브와 지체보상금을 TCCTO 모델에 첨부함으로써 TCCTO 모델을 더욱더 실질적으로 만들었다.

넷째, 연구의 최종 결과물인 통합 TCCTO 모델은 건설공사

관리의 편의성 및 고효율적인 프로젝트 관리가 가능하며 더 나아가 건설산업의 관리적 측면에서 유연성 확보가 가능할 것이다.

마지막으로 이 논문과 관련하여 미래에 좀 더 개발될 수 있는 사항들을 나열하여 추후에 이 분야에 관심을 가지고 연구를 수행하고자 하는 연구원들에게 도움과 도전을 주고자 한다. 추후에 개발 될 수 있는 사항을 나열하면 다음과 같다.

첫째, 소규모의 프로젝트를 다루었음에도 불구하고 모델 formulation이 상당히 복잡하여 보이므로 컴퓨터 프로그래밍을 이용하여 프로젝트 작업 정보만 입력하면 자동적으로 모델 formulation이 생성되는 프로그램을 만들면 이 모델이 현장에서 보다 쉽게 이용될 수 있으리라고 생각된다.

둘째, 모델 formulation에서 혼합정수 프로그래밍 (mixed integer programming)을 이용했으므로 계산 시간이나 계산여부에 제한이 있을 수 있으리라고 예상된다. 하지만 현재 선형 프로그래밍에서 많이 이용하고 있는 소프트웨어인 LINDO extended version을 사용하면 가능한 제한조건 숫자가 32,000개, 변수의 숫자가 200,000개, 정수 숫자가 20,000로 중 규모 이상의 Project도 해답을 찾는데 별 큰 무리는 없어 보이며, 위의 숫자 이상의 규모가 요구될 때에는 기존의 모델 프레임은 유지하면서 요즘 최적화 분야에서 많이 사용하고 있는 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm)이나 Simulated Annealing 테크닉을 사용하여 해답을 찾을 수도 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단 연구비 지원(과제번호: NRF-2014R1A1A4A01008951)에 의한 결과의 일부임.

References

Baker, B.M. (1997). "Cost/time trade-off analysis for the critical path method: A derivation of the network flow approach" *J. Operational Res.*, 48(12), pp. 1241-1244.

Demeulemeester, E., De Reyck, B., Foubert, B., Herroelen, W., and Vanhoucke, M. (1998). "New computational results on the discrete time/cost trade-off problem in project networks" *J. Operational Res.*, 49(11), pp. 1153-1163.

Feng, C. W., Liu, L., and Burns, S. A. (1997). "Using genetic algorithms to solve construction time-cost trade-off problems" *J. Comp. in Civ. Engrg.*, 11(3), pp. 184-189.

Feng, C. W., Liu, L., and Burns, S. A. (2000). "Stochastic construction time-cost trade-off analysis" *J. Comp. in Civ. Engrg.*, 14(2), pp. 117-126.

Hegazy, T. (1999). "Optimization of construction time-cost trade-off analysis using genetic algorithms" *Can. J. Civ. Engrg.*, 26(6), pp. 685-697.

Hegazy, T. and Ersahin, T. (2001). "Simplified spreadsheet solutions. II: Overall schedule optimization" *J. Constr. Engrg. And Mgmt.*, 127(6), pp. 469-475.

Hegazy, T. and Ayed, A. (1999). "Simplified spreadsheet solutions: Models for critical path method and Time-Cost-Tradeoff analysis" *Cost Engrg.*, 41(7), pp. 26-33.

Khang, D. B. and Myint, Y. M. (1999). "Time, cost and quality trade-off in project management: A case study" *Int. J. Proj. Mgmt.*, 17(4), 249-256.

Kim, M. J., Park, M. S., Lee, H. S., Lee, J. H., and Lee, K. P. (2015) "Development of Manufacturing Planning for Multi Modular Construction Project based on Genetic-Algorithm" *Korean journal of Construction Engineering and Management, KICEM*, 16(5), pp. 54-64.

Leu, S. S. and Yang, C. H. (1999) "GA-based multicriteria optimal model for construction scheduling" *J. Constr. Engrg. And Mgmt.*, 125(5), 420-427.

Leu, S. S., Chen, A.T., and Yang, C. H. (2001). "GA-based fuzzy optimal model for construction time-cost trade-off" *Int. J. Proj. Mgmt.*, 19(1), pp. 47-58.

Li, H., Cao, J. N., and Love, P. (1999). "Using machine learning and GA to solve time-cost trade-off problems" *J. Constr. Engrg. And Mgmt.*, 125(5), pp. 347-353.

Li, H. and Love, P. (1997). "Using improved genetic algorithms to facilitate Time-Cost optimization" *J. Constr. Eng. Manage*, 123(3), pp. 233-237.

Liu, L., Burns, S. A., and Feng, C. W. (1995). "Construction Tim-Cost Trade-Off Analysis Using LP/IP Hybrid Method" *J. Constr. Engrg. And Mgmt.*, 121(4), pp. 446-454.

Perera, S. (1980), "Linear Programming Solution to Network Compression", *ASCE Journal of the Construction Division*, 106, pp. 315-327.

Ryu, H. G. and Kim, T. H. (2011) "Analysis of Boundary Conditions for Activities' Relationships in Linear Scheduling Model" Korean journal of Construction Engineering and Management, KICEM, 12(1), pp. 23-32.

Stevens, J. D. (1990). *Techniques for construction network scheduling*. McGraw-Hill, New York.

Winston, W (1997). *Operations Research Applications and Algorithms*.

Hamdy A. Taha "Operations Research An Introduction" 4th Edition.

요약 : 공기비용 트레이드오프 모델은 건설프로젝트의 계획 및 관리에 있어 매우 중요하다. TCTO 모델은 연속모델과 분절모델 두 가지 모델이 개발되어왔다. 그러나 한 종류의 모델만을 사용하여 현실적인 공기단축 시나리오를 적용하기에는 한계가 있다. 이에 TCTO의 연속적인 모델과, 분절모델을 결합하여 진보된 모델을 제시하였으며 또한, 비선형 관계, 인센티브 및 지체보상금 고려가 가능하도록 TCTO모델에 포함되어 있다. 이런 특성들은 건설프로젝트에 적용가능하다. 6개의 activities로 구성된 CPM 네트워크는 연구에서 제안된 모델을 설명하기 위해 사용되었다. 제시한 모델은 모든 제약 조건을 만족시키는 최적 스케줄 계산이 가능하다. 결과적으로 본 연구에서 제시한 진보된 TCTO모델은 기존의 모델보다 최적화된 공기단축이 가능하다.

키워드 : 건설공정, 최적화 모델, 공기비용 트레이드오프 모델
