

모델링불확실성을 고려한 신뢰성 해석 Reliability Analysis Considering Modeling Uncertainty

1. 서론

공학문제에는 다양한 형태의 불확실성(uncertainty)이 존재하기 때문에 문제 해결을 위한 불확실성의 모델링에 있어서 확률론(probability theory)만을 사용하는 것은 바람직하지 않다는 연구들이 20세기 들어 대두되었다(Lukasiewicz, 1930; Zadeh, 1965; Dempster, 1967; Shafer, 1976; Dubois and Prade, 1988; Ross, 1995; Klir and Yuan, 1995). 예를 들어, 자유단(free end)에 집중하중을 받는 캔틸레버(cantilever) 보에서 자유단 처짐의 오차를 고려해 볼 수 있다. 캔틸레버 보의 고정단(fixed end)은 이상적인 가정이며, 실제로 회전각이 발생하지 않는 완벽한 고정단을 제작하기는 어렵다. 이러한 지점 조건의 불확실성에 의해 발생하는 실제 처짐량과 계산 처짐량의 오차는 처짐량의 계산 시 고정단의 적정한 회전을 허용하는 반강성고정단(semi-rigid fixed end)을 고려하거나 고정단에 회전에 대한 추가적인 보강을 함으로써 줄일 수 있다. 이렇게 지식과 기술의 발전으로 줄일 수 있는 오차를 정보적불확실성(epistemic uncertainty)이라 하며, 무작위불확실성(aleatoric uncertainty)인 확률적인 오차에 포함하여 고려하는 것은 바람직하지 않다는 것이다.

확률론은 18세기 들어 Bernoulli(1713)가 ‘추측의 기술(Ars Conjectandi)’, DeMoivre(1718)가 ‘기회의 원리(The Doctrine of Chances)’를 발표하면서 발전되기 시작하였으며, Bayes(1763), Laplace(1774) 등에 의한 연구를 거쳐 3세기에 걸친 학문적 배경을 가지고 있다. 현재 확률론에 바탕을 둔 신뢰성 해석(reliability analysis)은 공학 분야의 불확실성 문제를 해결하는데 큰 공헌을 하고 있으며, 우리의 실생활에도 뿌리깊게 자리하고 있다. 예를 들어, “내일 비가 올 확률은 60%이다.”라는 예보에 대하여, ‘지난 100년 중 60번 내일의 날짜에 비가 왔었는가?’, ‘국토의 60%에 비가 오는가?’, ‘하루 중 60%의 시간 동안 비가 오는가?’와 같은 의문을 가질 수 있다. 하지만 우리는 이러한 예보를 “내일 아마도 비가 올 것이다.”라고 받아들인다(Ross, 2010). 이렇게 우리의 인지구조는 확률적 표현에 익숙해져 있다. 그러므로 다양한 형태의 불확실성에 적합한 모델링의 사용(정보의 부족에 대하여 증거이론의 belief와 plausibility의 사용, 불명확성에 대하여 가능성 이론의 possibility와 certainty의 사용, 모호함에 대한 퍼지이론의 membership의 사용 등이 학문적으로 정확할 수 있으나, 공학적 활용 측면에서 확률적인 표현에 바탕을 두고 그 활용성을 넓혀 가는 것이 바람직할 것이다.

본 기사에서는 모델링불확실성(modeling uncertainty)에 따른 신뢰성 해석결과와 가변성(variability)을 가능성 분포함수(possibility distribution function)를 구성하여 해결하는 방법을 사례연구(Han and Kim, 2015)와 함께 소개할 것이다. 신뢰성 해석에



김 정 중

경남대학교 토목공학과 교수

의해 결정된 구조물의 파괴확률은 구조물의 해석값을 얻기 위해 사용된 전산모델에 의존적이며, 이러한 전산모델에 따른 신뢰성 해석결과의 가변성을 모델링불확실성이라고 한다(Melchers, 1999). 모델링불확실성은 정보적불확실성의 하나로 알려진 불명확성(non-specificity)으로 고려할 수 있으며, 불명확성은 가능성분포함수(possibility distribution function)를 구성하여 모델링할 수 있다(Kim et al., 2010).

2. 가능성 이론과 가능성 분포함수

가능성 이론은 확률이론과 함께 증거이론(evidence theory)의 특수한 형태로 고려할 수 있다(Dempster, 1967; Shafer, 1976). 가능성 이론에서는 최대값이 1인 가능성 분포(possibility distribution) π 를 각각의 원소에 부여한다. 가능성 이론의 π 와 증거이론의 신뢰정도(degree of belief) m 은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\pi(x) = \sum_{x \in S} m(S) \quad (1)$$

식 (1)은 m 이 부여된 부분집합이 각기 그 앞의 것에 포함될 경우, 가능성 이론이 증거이론의 특수한 형태임을 보여준다. 가능성 이론에서는 π 를 바탕으로 다음과 같이 이중일방향측정(dual monotone measure), certainty와 possibility를 사용한다.

$$cert(A) = 1 - pos(\bar{A}), \quad pos(A) = \max\{\pi(x) : x \in A\} \quad (2)$$

certainty와 possibility를 합쳐 식 (3)의 확신정도(degree of confirmation)를 쓰기도 한다(Klir and Yuan, 2006).

$$conf(A) = pos(A) + cert(A) - 1 \quad (3)$$

conf의 범위는 -1부터 1이고, 음수는 불확신정도를 나타낸다. 가능성 이론의 실용적인 사용을 위하여 가능성 이론을 연속구간에 대하여 확장할 수 있는데(Klir, 2006), 연속구간에서 부분집합은 구간들(intervals)로 고려할 수 있다. 가능성 이론에서 집합과 마찬가지로 구간들은 각기 그 앞의 것에 포함되어야 한다. 이러한 구간들(consonant set of intervals) H 에 부여된 m 을 바탕으로 식 (4)와 같이 가능성 분포함수를 구성할 수 있다.

$$\pi(x) = \sum_{x \in H_i} m(H_i) \quad (4)$$

그림 1에 각기 그 앞의 것에 속한 3개의 구간을 이용하여

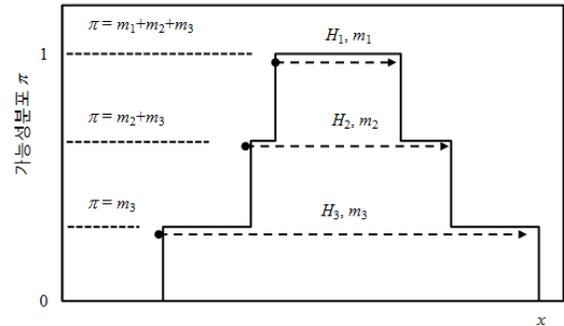


그림 1 가능성 분포함수의 구성 예

가능성 분포함수를 구성하는 예를 보였다. 실제 공학문제에서 사용하는 구간들은 주로 일부분 겹치거나, 독립적이기 때문에 가능성 분포함수를 구성하기 위해서는 구간들을 먼저 각기 그 앞의 것에 포함되도록 변환해야 한다. 다양한 형태의 구간 집합에 대한 변환방법이 연구되었다(Ross, 2010).

3. 모델링불확실성을 고려한 신뢰성 해석

그림 2에 도식적으로 보인 것처럼, 선택 가능한 전산모델들을 모두 이용하여 신뢰성 해석을 수행한다. 해석된 신뢰성지수에 부여된 m 을 바탕으로 가능성 분포함수를 구성한다. 일반적으로 가장 불명확한 경우를 고려하여 해석된 결과들에 동일한 m 을 부여한다. 구성된 가능성 분포함수로부터 확신정도(degree of confirmation)를 측정하여 확신정도에 따른 신뢰성지수를 도출한다(Kim et al., 2013; Han and Kim, 2015).

콘크리트충전강관(concrete-filled steel tube, CFST) 기둥 설계

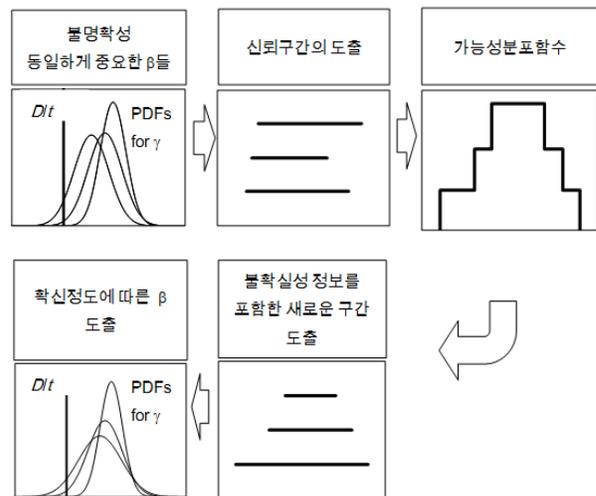


그림 2 모델링불확실성을 고려한 신뢰성 해석의 개요

시의 사례연구(Han and Kim, 2015)를 살펴보면, CFST 기둥 강관의 국부좌굴을 방지하기 위하여 강관두께 t 에 대한 기둥 외경 D 의 크기를 제한하고 있다. 최대 D/t 값은 일반적으로 강재의 항복응력 f_y , 또는 f_y 와 강재의 탄성계수 E 의 식으로 표현된다(AISC, 1998; AIJ, 1985; CSA, 1994). 각각의 설계기준에서 제안된 3개의 최대 D/t 계산식에 포함된 f_y 와 E 의 불확실성을 고려하여, CFST 단면의 국부좌굴에 대한 신뢰성 해석을 수행하고 각각의 신뢰성지수를 계산할 수 있다. CFST 단면의 국부좌굴에 대한 신뢰성을 산정하기 위해 식 (5)와 같은 한계상태함수 G 를 고려할 수 있다.

$$G = \gamma(f_y, E, \text{deterministic parameters}) - D/t \quad (5)$$

식 (5)에서 $\gamma(f_y, E, \text{deterministic parameters})$ 는 강재의 f_y , 또는 f_y 와 E 를 포함한 최대 D/t 계산식이다. 최대 D/t 계산식으로는 AISC(1998), CSA(1994), AIJ(1985)에서 각각 제안된 식 (6), (7), (8)를 고려하였다.

$$\gamma_{AISC} = \sqrt{8E/f_y} \quad (6)$$

$$\gamma_{CSA} = 28000/f_y \quad (7)$$

$$\gamma_{AIJ} = 23520/f_y \quad (8)$$

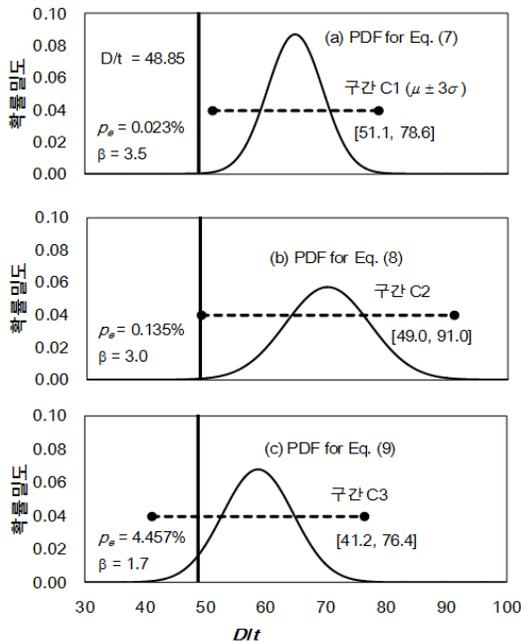


그림 3 신뢰성 해석과 PDF로부터 추출된 신뢰구간(점선)

식 (6)은 확률변수로 f_y 와 E 를 모두 고려할 수 있지만, 식 (7)과 (8)는 f_y 만을 확률변수로 고려할 수 있다. 확률변수 f_y 와 E 의 분포를 모두 분산계수(Coefficient of Variation, COV) 10%인 정규분포로 가정하고, 외경 $D = 152.4\text{mm}$, 강관두께 $t = 3.12\text{mm}$, $D/t = 48.85$ 인 CFST 단면의 국부좌굴에 대한 신뢰성 해석 결과는 그림 3과 같다. f_y 와 E 의 평균은 각각 400MPa, 210GPa를 사용하였다. 결정된 신뢰성지수 β 는, CFST 단면의 D/t 가 계산된 최대 D/t 를 초과할 확률, 즉, 그림 3에서 $D/t = 48.85$ 이하의 확률밀도함수(probability density function, PDF)를 적분한 확률, p_e 와 식 (9)의 관계를 가진다. 식 (9)에서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준 정규분포 누적밀도함수이다.

$$p_e = \Phi(-\beta) \quad (9)$$

그림 3의 신뢰성지수들은 모두 동일한 신뢰정도(degree of belief) m 을 가지며, 어떤 값을 선택할지 가장 불명확한 상태이다. 이제 그림 3의 각각의 PDF로부터 추출된 $\mu, \gamma, \pm 3\sigma$ 구간(interval), C1, C2, C3를 이용하여 가능성 분포함수를 구성한다. 먼저 3개의 구간으로부터 선택 가능한 모든 구간을 고려한다. 이 때, 구간의 시작점은 시작점으로만 사용되고, 끝점은 끝점으로만 사용되어야 한다. 표 1에 C1, C2, C3 구간으로 구성이 가능한 모든 구간을 나타내고, 동일한 비중으로 정규화하였다.

C1, C2, C3 구간이 모두 공통으로 가지는 구간 New2 = [51.1, 76.4]를 바탕으로 각기 그 앞의 것에 포함되는 구간들의 집합(consonant set of intervals)을 표 2와 같이 구성할 수 있다.

표 1 구간 C1, C2, C3의 정보로부터 도출 가능한 모든 구간

Reference	Interval	weight	Normalized weight
C1	[51.1, 78.6]	1/3	1/9
C2	[49.0, 91.0]	1/3	1/9
C3	[41.2, 76.4]	1/3	1/9
New1	[51.1, 91.0]	1/3	1/9
New2	[51.1, 76.4]	1/3	1/9
New3	[49.0, 78.6]	1/3	1/9
New4	[49.0, 76.4]	1/3	1/9
New5	[41.2, 78.6]	1/3	1/9
New6	[41.2, 91.0]	1/3	1/9

표 2 공통구간 [51.1, 76.4]을 바탕으로 구성된 각기 그 앞의 것에 포함되는 구간들의 집합

Reference	Interval	Normalized weight
New2	[51.1, 76.4]	1/9
New3	[49.0, 78.6]	1/9
New6	[41.2, 91.0]	1/9

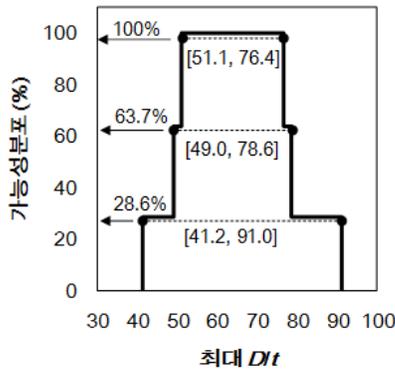


그림 4 가능성 분포함수의 결정

나머지 구간들의 비중은 표 2의 구간들에 유사성(similarity)을 바탕으로 재분배된다. 결과적으로, 구간 [51.1, 76.4], [49.0, 78.6], [41.2, 91.0]의 최종 m 은 각각 0.363, 0.351과 0.286으로 결정된다(Han and Kim, 2015). 식 (4)의 m 과 π 의 관계를 이용하여 그림 4와 같은 가능성 분포함수를 구성할 수 있다.

가능성 분포함수로부터 구간 [51.1, 76.4], [49.0, 78.6], [41.2, 91.0]에 대한 확신정도를 식 (2)와 (3)을 이용하여 측정할 수 있다. 그림 5에 구간 [49.0, 78.6]에 대한 확신정도 측정 예를 보였다. 식 (2)로부터 구간 내에서 가장 큰 π 가 pos가 되어 pos([49.0, 78.6])는 100%이며, 구간 외에서 가장 큰 π 인 28.6%를 100%에서 뺀 값이 cert가 되어 cert([49.0, 78.6])는 71.4%이다. 식 (3)으로부터 확신정도는 71.4%로 계산된다.

이제, 정규분포 PDF를 재구성하기 위한 평균 μ 와 표준편차 σ 를 식 (10)과 (11)를 이용하여 구간 $[\phi_1, \phi_2]$ 로부터 계산할 수 있다.

$$\mu = (\phi_1 + \phi_2) / 2 \tag{10}$$

$$\sigma = (\phi_2 - \phi_1) / 6 \tag{11}$$

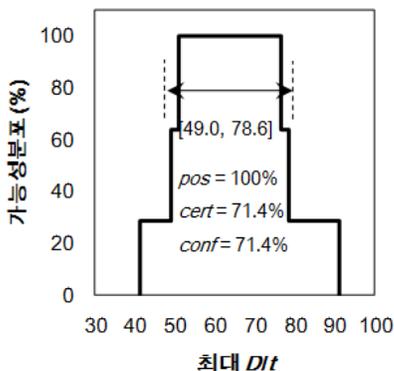


그림 5 구간 [49.0, 78.6]에 대한 이중일방향측정과 확신정도 측정 예

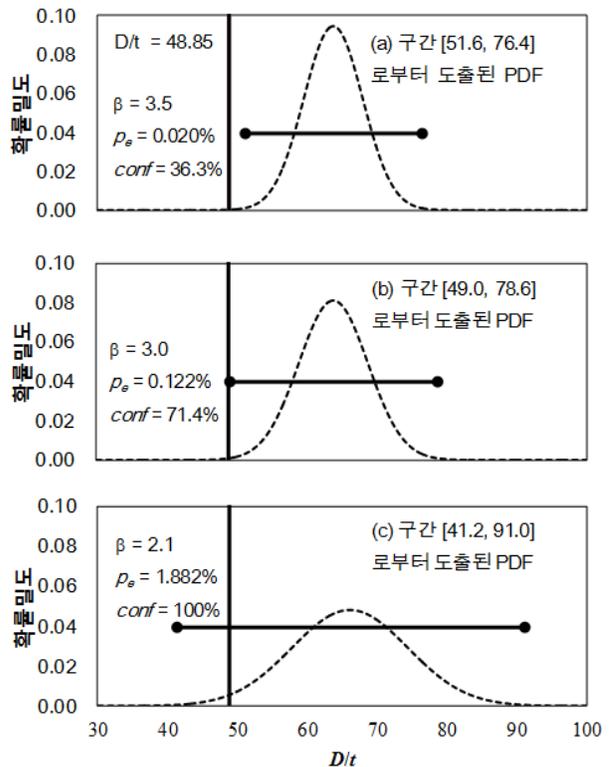


그림 6 구간들로부터 추출된 PDF(점선)를 이용한 신뢰성 해석

그림 6에 보인 것처럼 구간 [51.1, 76.4], [49.0, 78.6], [41.2, 91.0]에 대한 정규분포 PDF를 재구성하여 $D/t = 48.85$ 에 대한 신뢰성지수를 산정하였다. 높은 신뢰성지수 $\beta = 3.5$ 에 대한 확신 36.3%는 낮은 신뢰성지수 $\beta = 2.1$ 에 대한 확신 100%보다 낮음을 볼 수 있다.

4. 요약

본 기사에서는 모델링불확실성(modeling uncertainty)에 따른 신뢰성 해석결과의 가변성(variability)을 가능성 분포함수(possibility distribution function)를 구성하여 해결하는 방법을 AISI (1998), AIJ(1985), CSA(1994)에서 제안된 3개의 최대 D/t 계산식을 예로 들어 소개하였다. 확신정도가 측정된 신뢰성지수들을 얻을 수 있으며, 확신정도를 고려한 신뢰성지수의 결정이 가능하게 된다.

다양한 형태의 불확실성에 대하여 그 형태에 맞는 적합한 불확실성 모델링을 사용하는 것도 중요하지만, 확률적 표현에 익숙한 우리의 인지구조를 고려하여 기존의 신뢰성 해석에 어떻게 다양한 불확실성 모델링 방법을 접목시킬 것인지에 대한 연구도 중요할 것이다.

5. 참고문헌

- American Institute of Steel Construction, AISC (1998), Load and resistance factored design. Manual of Steel Construction, Vol. 1.
- Architectural Institute of Japan, AIJ (1985) Design recommendations for composite constructions. Tokyo.
- Bayes, T. (1763) An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. Phil. Trans.;53: 370-418.
- Bernoulli, J. (1713) *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*, Basel: Thurneysen Brothers.
- Canadian Standard Association, CSA (1994) Limit state design of steel structures, CAN/CSA-S16.1-94, Clause 18, Rexdale, Ontario.
- DeMoivre, A. (1718) *The Doctrine of Chances*, London.
- Dempster, A.P. (1967) Upper and lower probability inferences based on a sample from a finite univariate population. *Biometrika*; 54: 515-28.
- Dubois, D., Prade, H. (1988) *Possibility theory, an approach to computerized processing of uncertainty*. USA: Plenum Press.
- Han, T.H., Kim, J.J. (2015) An Alternative Perspective to Resolve Modeling Uncertainty in Reliability Analysis for D/t Limitation Models of CFST. *J. Comput. Struct. Eng.*; 28(4): 11-17.
- Kim, J.J., Reda Taha, M.M., Ross, T.J. (2010) Establishing concrete cracking strength interval using possibility theory with an application to predict the possible reinforced concrete deflection interval, *Eng. Struct.* 32, 3592-3600.
- Kim, J.J., Reda Taha, M.M., Noh, H.-C., Ross, T.J. (2013) Reliability Analysis to Resolve Difficulty in Choosing from Alternative Deflection Models of RC Beams, *Mechanical System and Signal Processing.* 37, 240-252.
- Klir, G.J. (2006) *Uncertainty and information*. USA: John Wiley and Sons.
- Klir, G.J., Yuan, B. (1995) *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications*, Prentice Hall, USA.
- Laplace, P. S. (1774). *Memoir on the probability of causes of events*. *Mémoires de Mathématique et de Physique, Tome Sixième*. (English translation by S. M. Stigler 1986. *Statist. Sci.*, 1(19): 364-378).
- Lukasiewicz, J. (1930) Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. iii, 23, 51-77. Translation: Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic, in *PL*, 40-65, and in *SW*, 153-78.
- Melchers, R.E. (1999) *Structural Reliability Analysis and Prediction*, John Wiley & Sons, USA.
- Ross T.J. (1995) *Fuzzy logic with engineering applications*. 3rd ed (2010). Chichester (UK): John Wiley and Sons.
- Shafer, G. (1976) *Mathematical theory of evidence*. USA: Princeton University Press.
- Zadeh, L. (1965) Fuzzy sets, *Inf. Control*;8: 338-353 

[섭외: 이진학 편집위원]