Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 5 (Oct. 2015), 263–278
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.5.263

A Study on the Mathematics Education via Intuition

직관을 통한 수학교육에 관한 고찰

Lee Daehyun 이대현

As intuition is more unreliable than logic or reason, its studies in mathematics and mathematics education have not been done that much. But it has played an important role in the invention and development of mathematics with logic. So, it is necessary to recognize and explore the value of intuition in mathematics education. In this paper, I investigate the function and role of intuition in terms of mathematical learning and problem solving. Especially, I discuss the positive and negative aspects of intuition with its characters. The intuitive acceptance is decided by self-evidence and confidence. In relation to the intuitive acceptance, it is discussed about the pedagogical problems and the role of intuitive thinking in terms of creative problem solving perspectives. Intuition is recognized as an innate ability that all people have. So, we have to concentrate on the mathematics education via intuition and the complementary between intuition and logic. For further research, I suggest the studies for the mathematics education via intuition for students' mathematical development.

Keywords: intuition, logic, complementarity, intuitive thinking, intuitive acceptance, problem solving; 직관, 논리, 상보성, 직관적 사고, 직관적 수용, 문제해결.

MSC: 97C50 ZDM: C30

1 서론

오랜 역사를 통해 수학자들은 다양한 사고 양식과 추론을 통해 수학을 발견하고 발전시켜 왔으며, 이 경우에 공리는 수학적 개념과 원리를 설명하고 전개하는 과정에서 중요한 역할을 수행해 왔다. 그러한 이유로 많은 사람들은 몇 개의 공리에서 출발하여 새로운 수학을 만들어 왔다고 생각하고, '논리'가 그 과정에서 중요한 역할을 수행한 것으로 여기면서 논리의 가치를 중시하고 있다. 그런데 수학의 세계에서 형식적으로 수학을 제시할 때에는 공리가 먼저 나타나지만, 수학을 발견하는 과정에서는 '실례와 문제'가 먼저 나타나고,

Lee Daehyun: Dept. of Math. Edu., Gwangju National Univ. of Edu. E-mail: leedh@gnue.ac.kr
Received on Aug. 10, 2015, revised on Sep. 15, 2015, accepted on Oct. 23, 2015.

나중에 이론이 근거할 수 있는 공리집합이 나타나게 된다 [13]. 이것은 수학이 본질적으로 공리로부터 유도된다는 견해에 반하는 것으로, 수학자들에게 증명의 과정에서 옳은 정리를 제시하고 증명의 길을 이끌어 주는 것은 바로 직관인 것이다 [30, 31]. 즉, 많은 사람들이 수학에서 논리를 바탕으로 수학을 전개해 가는 것으로 인식하고 있지만, 이를 가능하게 이끄는 것은 직관의 힘에 의한 것이다.

수학적 발견의 일화에서 직관의 기능과 역할에 대해서는 많은 사례를 통해서도 찾을 수 있다. 예를 들어, 물이 넘치는 현상으로부터 부력을 발견한 아르키메데스의 일화나 자연수 합을 구하는 과정에서 문제 구조에 대한 통찰을 통해 문제해결에 이른 어린 가우스의 일화는 대표적으로 거론되는 예들이다. 이것은 문제해결의 실마리에 대한 즉각적인 발현을 통해 성공적인 문제해결에 이르게 된 예들로, 많은 수학자들이 새로운 문제해결 과정에서 경험했음직한 사고 과정이다. 그렇지만 수학자들은 이러한 과정에 대한 기록보다는 논리적 사고 과정을 통해 얻은 결과를 제시하는 데 중점을 두는 경향이 있다 [31]. 이것은 직관적 사고의 근간이 되는 직관이 때때로 주관적 판단에 의존하여 개인적 편견에 사로잡힐 수 있어 인과적으로 설명하기 어렵고, 그 자체의 신비스러운 힘들의 작용으로 인해 과학적인 설명이 어렵기 때문이기도 하며, 상식(commonsense)과 같이 근거나 이유가 없이 받아들여지는 속성이 있기 때문이기도 하다.

그렇지만 직관은 수학 문제해결 과정에서 여전히 중요한 역할을 하고 있다. 리만 가설의 발견 과정 예시나, 푹스함수를 발견하는 과정에 대한 푸앵카레의 일화는 문제해결에서 신의 계시와 같이, 수학적 발견 과정에 나타난 직관의 힘에 의한 예화이다. 이것은 학교 수학에서 문제를 해결하는 학생들에게서도 유사하게 나타날 수 있다. 예를 들어 ‘디오판투스의 나이 문제’에 대한 해결에서도 알고리즘을 활용한 전형적인 논리적 해결과 더불어, 문제에 주어진 조건에서 얻은 통찰을 통해 문제를 즉각적으로 해결할 수도 있는 것이다 [6].

직관의 가치를 인식하고 직관적으로 사고하는 수학 학습 방법에 대한 탐구는 수학의 역사와 마찬가지로 논리적 사고 위주의 문제해결에 치중한 종전의 수학교육에 비추어, 다양한 수학 학습 방안의 탐구라는 면에서 필요하다. 또한 심리학적 관점에서 다루어 온 직관에 대한 탐구는 수학 문제해결과 수학 학습에서 직관과 직관적 사고의 가치와 역할에 대해 고찰할 필요성을 제기하고 있다.

특히, 학교 수학에서 논리적 사고 교육뿐만 아니라, 학생들의 직관, 통찰, 이해, 사고의 원천을 열어 놓으면서 점진적인 형식화가 이루어지도록 수학화를 강조하고 있는 배경에는 [14], 직관을 강조함으로써 균형 있는 수학교육을 통해 학생들의 문제해결력을 신장시키고자 하는 의도가 있는 것이다. 이러한 기조에 비추어 우리나라의 수학과 교육과정에서도 직관을 통한 수학 학습을 강조하고 있기도 하다 [25]. 수학학습에서 직관과 직관적 사고의 가치를 논할 수 있는 것은 직관을 통한 교육을 강조한 학자들의 공통점이 직관은 특정한

사람에게만 부여되는 천부적인 기능이 아니라, 모든 사람이 소유하고 있다는 것과 적절한 교수 방법에 의해 신장 가능한 보편적인 능력이라는 것에 근거를 둔다 [8, 12, 4, 36]. 이런 면에서 직관과 직관적 사고를 통한 수학 학습 방안을 위하여 이와 관련된 다양한 이슈에 대해 탐구의 필요성이 우선 제기된다.

본 연구에서는 학교 수학과 수학 문제해결에 바탕을 두고, 직관과 직관적 사고를 통한 수학교육 방안에 대해 탐구해보고자 한다. 이를 위해 근본적으로 직관과 직관적 사고 및 직관과 논리의 상보성 문제에 대해 알아보고, 직관적 사고를 통한 수학 문제해결 교육에 대해서도 살펴보기로 한다. 또한 학교 수학에 대한 요구가 높은 창의적인 수학 문제해결과 직관적 사고와의 관련성에 대해서도 탐구하고자 한다.

2 수학교육에서 직관과 상보성 문제

2.1 직관, 그리고 직관적 사고

직관(intuition)의 영어 표현은 라틴어 intueri(look; 본다)에서 유래되었으며, 미국심리학회가 발간한 사전에서는 '의식적인 추론이나 숙고와 대비되는 것으로, 즉각적인 통찰이나 인식(immediate insight or perception)'으로 직관을 정의하고 있다 [1, p. 561]. 철학적 관점에서는 확실한 지식의 근원으로 직관을 받아들인 플라톤이나, 증명 없이 존재하는 지식을 직관적 추론이라고 부르며 진리의 확실한 보장책이라고 직관을 생각한 아리스토텔레스 이후로 확실하고 보편타당한 진리를 얻는 방법으로 직관을 수용하였다 [27]. 데카르트와 스피노자, 그리고 칸트로부터 19세기 후반의 베르그송에 이르기까지 직관은 오랜 역사 속에서 참된 지식의 근원으로 그 위상을 유지해 오고 있다 [20].

그럼에도 불구하고 직관은 그 의미에 대하여 명확한 합의도 없이 오랫동안 사용되어 왔으며, 그 기능과 역할에 대해서도 상반된 견해가 제시되기도 한다. 이를테면 어떤 사람은 직관을 참된 지식의 근원으로 수용하기도 하지만, 다른 사람은 직관이 오류 발생의 근원이라고도 칭하기도 한다 [8, 11, 4]. 직관에 대한 상반된 견해와 현상은 수학의 발견 과정에서 각기 다른 직관의 기능과 역할을 관찰했기 때문이며, 그러한 이유로 수학적 진리를 만들려고 노력하는 학자들은 서로 다른 접근 방식을 이용하고 고수했던 것이다.

직관의 속성을 한 가지로 규정하기는 어렵지만, 일반적으로 수용되고 있는 직관의 속성으로 직관은 참된 지식을 발견하는 도구이며, 일반적인 사고 절차를 벗어나 매우 신속하고 즉시적인 판단과 관련된 추론으로 나타난다는 것이다. 직관은 또한 통찰(insight)과 같은 의미이거나, 유사한 의미로 사용되기도 한다 [28]. 일반적으로 통찰은 '아하'를 경험하는 것과 같이 문제해결의 실마리가 발현되는 질적 변화의 순간을 나타내며, 미국심리학회가 발간한 사전에서는 '문제 해결책에 어떻게 도달할 것인가에 대한 의식적인 노력 후에도

명확하지 않고 그럴듯해 보이지도 않던 방법에 의해 문제에 대한 해결책의 명료하고 갑작스러운 깨달음(the clear and often sudden discernment)' 으로 통찰을 정의하고 있다 [1, p. 544]. 직관과 통찰에 대한 미국심리학회의 정의와 직관이 추리나 판단 등을 거치지 않고 대상을 직접 파악하는 인지 작용 또는 인지 유형으로 간주되며, 직관을 통해 인지된 사실을 직관적 지식으로 수용하는 맥락을 고려할 때 [8, 11], 통찰은 직관적 인지 과정의 일부로 보는 것이 적합하다. 이것은 통찰이 문제에 대한 해결책의 갑작스러운 깨달음과 같이 일순간에 일어나는 사고 활동인 반면에 [4], 직관은 통찰의 경험을 포함하여 어떤 상황에서 확실하고 자명한 느낌으로 인식되는 인지 과정 전체를 의미한다는 면에서 구분의 타당성을 갖는 것이다.

한편, 많은 문헌에서 직관과 직관적 사고를 같은 의미로 사용하고 있지만, 특히 수학 문제해결의 과정에서 논리적 추론의 과정을 거치지 않고, 문제에 주어진 단서나 실마리를 이용하여 즉각적으로 문제해결에 이르도록 이끄는 직관의 속성을 '직관적 사고' 로 규정할 수 있다 [21]. 이것은 철학적인 면에서 직관적인 지식과 같이 즉각적인 인지, 인식 형태의 측면에서는 '직관' 이라는 용어를 선호하지만, Wertheimer [35]가 '옳음' 에 대한 직관적 감각이 성공적인 문제 해결 전략을 이끈다고 제시하며, 그것을 'productive thinking(생산적 사고)' 으로 명명하고 있거나, Bruner [3]나 Wittmann [37] 등에 의해 문제해결이나 수학적 탐구 과정에서 일어나는 수학적 사고 활동과 관련하여 직관적 사고로 일컫는 경우에서 '직관적 사고' 로 명명하는 근거를 얻을 수 있다.

마찬가지로 학교수학에서도 직관과 직관적 사고는 유사한 용어로 이용될 수 있지만, 수학적 사실의 직관적 인지나 인식에 관한 사고 작용으로는 '직관' 을, 수학적 문제해결 과정이나 수학적 탐구 과정에서 일어나는 수학적 사고 활동과 관련해서는 '직관적 사고' 로 명명하는 것이 적절하다. 예를 들어 '두 직선이 만날 때 만들어지는 맞꼭지각이 같다.' 는 사실을 인식하는 것은 어떤 이유나 논리적인 설명도 요구하지 않는 자명하게 수용되는 사실이고, 이는 '직관' 에 의해 직관적으로 수용되는 사실인 것이다. 그렇지만, '1에서 100까지의 수중에서 짝수의 합에서 홀수의 합을 뺀 값을 구하는 문제' 의 경우에 두 수의 차가 1이라는 사실에 근거하여 즉각적으로 50이라는 값을 산출할 수 있는 것은 문제의 구조에 대한 이해로부터 얻어지는 '직관적 사고' 의 힘인 것이다.

2.2 직관과 논리의 상보성 문제

직관적으로 자명해 보이는 공리와 공준을 바탕으로 체계적이고 논리적으로 기술된 유클리드의 원론(Elements)에 영향을 받아온 수학의 역사는 논리 중심의 형식적인 수학을 오랫동안 강조해 왔다. 그렇지만 직관적으로 자명하게 인식되지 않는 수학적 사실에 대해서는 끊임없는 논란의 과정이 뒤따랐다. 예를 들어 그리스 시대의 수학자들은 직관적으로

수용 가능한 사실로 '평행선 공리'를 수용하였지만, 이후의 수학자들은 이 공리에 대해 제기되는 직관적 의심에 대해 끊임없는 분석을 계속해 왔다. 이것은 평행선 공리 자체가 직관적으로 수용하기가 쉽지 않을 뿐더러, 이것을 유클리드의 다른 공리로부터 증명할 수 있을 것이라는 신념이 있었기 때문이다. 아마도 이러한 신념과 확신이 없었더라면 비유클리드 기하학의 출현은 더 늦어졌을 것이다 [36]. 이와 같이 수학자들은 직관적으로 자명해 보이지 않는 사실을 새로운 탐구의 대상으로 삼아 끊임없는 탐구를 계속해 왔다.

마찬가지로 직관적으로 자명하게 수용되어 온 수학적 사실에 반하여 나타난 새로운 수학적 개념에 대해서는 이를 수용하기를 완강히 거부해 온 역사를 실 무한(actual infinity) 개념의 출현 과정을 통해 확인할 수 있다. 평행선 공준에 대한 자명성 결여의 문제로부터 촉발되어 비유클리드 기하라는 새로운 기하학의 체계를 구축한 사실이나, 직관적 인식에 부합하지 않는 실 무한 개념의 대두로부터 야기된 수학의 확실성 추구를 위한 노력은 논리를 강조하는 측면과 직관을 강조하는 측면으로 구분되어진다.

논리를 강조하는 논리주의자들은 모든 수학이 논리로부터 유도될 수 있으며, 그 진리는 '무모순'이어야 한다고 주장한다. 논리주의자들은 기본적으로 논리 위에 수학의 기초를 세우려고 하였고, 수학은 논리학의 법칙과 주제를 확장한 공적을 가지고 있다[15].

이에 반해 직관주의자들은 수학적 직관을 근간으로 수학의 세계를 건설하려고 노력한다. 직관은 감각적이거나 경험적인 것이 아니라, 어떤 개념에 대한 즉각적인 확신이다. 따라서 아리스토텔레스 이후로 많은 사람들이 무한에 대하여 잠재적 무한(potential infinity)을 따른 것이고, 칸토르에 의한 실 무한을 의도적으로 거부한 것이다.

넓은 의미의 직관주의자는 데카르트와 칸트까지 거슬러 올라갈 수 있으며, 파스칼은 큰 결과를 예상하고 훌륭한 추측을 하는 데 직관을 활용하였다 [12]. 칸트도 공간과 시간의 직관을 통해 경험과는 독립적으로 정신이 지각을 구성한다고 한다. 칸트의 주요 관심사는 선험적 지식이었고, 그는 선험적 지식을 '분석 선험적 지식'과 '종합 선험적 지식'으로 구별하였는데, 시간과 공간에 대한 우리의 직관은 종합 선험적 지식이 된다. 여기서 시간에 대한 우리의 지식은 연속에 대한 직관에 기초를 둔 산술에서 체계화되고, 공간에 대한 우리의 지식은 기하학에서 체계화되었다 [5]. 칸트가 수학을 종합적이라고 하는 것도 지식은 실제 경험이 아니라 정신으로부터 나오는 것이며, 예를 들어 '직선은 두 점사이의 최단거리이다.'라는 명제는 종합적인 것이다 [15]. 이러한 칸트의 철학은 이후의 수리철학에 많은 영향을 주게 되었고, 대표적으로 직관주의는 직관할 수 있는 것만을 확신하고 인식하였다.

수학의 절대적 진리를 구축하고자 하는 직관주의자와 논리주의자의 노력은 어느 쪽의 승리로도 결론이 나지 않았다. 결국 이러한 결과는 직관만으로도 논리만으로도 구축하기 어려운 수학의 세계가 존재한다는 것과 수학에서 직관과 논리의 상보성 문제를 제기한다. 또한 직관과 논리의 상보성 문제는 수학 연구에서도 유사하게 적용이 된다. 전통적으로

수학이 공리로부터 추론 규칙이라는 공식적인 견해로 유지되어 왔지만, 최근에는 컴퓨터와 같은 도구를 활용하여 경험적이고 실험적인 수학이 수학 연구에서 지위를 차지하고 있다는 데 수학계도 수용하는 자세이다 [13]. 수학 연구에서 논리를 강조한 배경은 엄밀성을 추구하고자 하는 오랜 수학의 역사와 맥을 같이 하고 있지만, 새로운 수학의 출현에 경험적인 실험적인 수학의 존재를 부정할 수는 없는 것이다.

수학의 역사를 통해 수학자들의 수학 문제해결 과정에서 직관과 논리의 상호보완적 역할과 가능의 발견 과정에 대한 기록은 수학교육에서도 직관과 논리의 상보성 문제를 제기하게 된다. Poincaré [30]는 그의 수학적 발견의 과정을 상기하며 수학에서 직관 없이는 진정한 창의적인 활동이 불가능하며, 직관은 논리적으로 타당한 길을 선택하는 힘을 부여한다고 보았다. 그렇지만 직관은 우리에게 엄밀성을 주지 못하기 때문에 수학의 발명 과정에서 지식의 확실성을 보장받기 위하여 직관에서 논리로의 전환이 일어나야 한다고 한다. Hadamard [12]도 아이디어가 결합하는 수준이 깊을 때를 직관적인 정신과 의식과 충분히 가까운 곳에 있을 때를 논리적인 정신과 관련지으며, 발견의 과정은 아이디어의 분출이 일어나는 무의식적 과정의 개입에 의한 직관적 과정과 분출된 아이디어를 정련할 의식적인 작업을 필요로 하는 논리적 과정이 필요함을 제시하고 있다.

한편, 사고에 관련된 연구와 문헌에서도 직관적 사고와 논리적 사고의 상보성을 제기하고 있다. Bruner [3]도 지적하듯이, 직관적 사고와 분석적(논리적) 사고가 상호 보완한다는 것은 분명하다. Wittmann [37]은 수학적 지식의 생성 과정에서 직관적 사고와 반영적 사고의 상보성을 제시하였는데, 반영적 사고는 직관적 사고에 의존하여 수학의 성장에 필수라고 하였다. 박성택 등 [29]도 직관적 사고와 논리적 사고의 관계를 상보적인 것으로 파악하였다.

> 직관과 논리는 서로 상반된 듯한 인식이면서 상보적인 역할 관계에 있으며, 동시에 일어나는 것은 아니지만, 수학적으로 사고하는 경우 거기에는 긴밀한 연대성을 요구하는 것이다. 직관으로 예상을 세워서 논리로 정리하고 확인하게 되며, 또한 논리적으로 정리된 결과야말로 거기서부터 새로운 직관이 낳아지는 것이다. (중략) 논리적 사고는 직관적인 판단에 대하여 의문이나 불안감이 생길 때에 일어나는 것이고, 이 직관적 판단은 논리적 사고를 거쳐야 비로소 그 확실성을 보장받게 된다 [29, 29–30].

수학적 발견의 과정에서 직관과 논리의 상호 보완적 역할과 기능의 중요성을 알 수 있듯이, 직관과 논리의 상보성 문제는 수학 학습에서도 양자를 활용할 방안의 필요성을 제기하며 [32, 12], 이를 위해 직관에 의한 교육 방안에 더 많은 관심이 요구됨을 시사한다. 이것은 종전의 교육이 논리에 치중해 있다는 점, 그런 결과로 직관적 사고에 의한 학생들의 문제해결력이 낮다는 점 [19, 22], 그럼에도 불구하고 끊임없이 직관에 의한 교육의 중요성을 강

조하는 교육과정을 고려할 때 더욱 그러하다 [25]. 이를 구현하기 위해서는 직관적 원리에 의한 교육 방안에 관심을 가지고, 이에 적합한 학습 내용의 개발과 교육 방안[1), 논리적으로 뿐만이 아니라 직관적으로 해결 가능한 문제의 개발을 통한 다양한 문제해결 경험의 제공 등에 관심을 두어야 할 것이다.

3 직관과 수학 문제해결 교육

3.1 직관의 특성과 직관적 문제해결

직관은 본질적으로 자명하고 내재적으로 확실하게 인식되는 특성 외에도 다양한 특성을 가지고 있다. 이에 Fischbein [8]은 즉시성(immediacy) 외에도 자명함(self-evidence), 내재적 확신성(intrinsic certainty), 고집성(perseverance), 강압성(coerciveness), 이론적 상태(theory status), 외삽성(extrapolativeness), 전체성(globality), 암묵성(implicitness)을 직관의 특성으로 제시하고 있다. 이러한 직관의 특성들은 수학을 하는 데 서로 다른 역할을 발휘하며, 심지어 한 특성조차도 문제 상황에 따라 다른 효과를 보이기도 한다. 즉 직관의 한 가지 특성조차도 어느 문제 상황에서는 긍정적인 역할로 작용하기도 하고, 다른 문제 상황에서는 부정적인 역할로 작용하기도 한다. 따라서 직관적 문제해결과 관련지어, 직관의 각 특성을 긍정적으로, 또는 부정적으로 한정하여 다루는 것은 적절하지 못하다. 한 예로, 직관의 ‘자명함’은 직관적으로 인식되는 사실에 대하여 의심의 여지가 없이 수용하는 특성을 의미한다. Beth & Piaget [2]는 자명함을 인식하는 기준으로 공통 불변성을 제시하였는데, 어떤 사실을 직관적으로 인식하기 위해서는 불변의 성질을 지각하여 적용할 수 있어야 한다는 것이다. 예를 들어, 우리는 ‘전체는 부분보다 크다.’는 것을 인식할 수 있다. 이것은 유한의 세계에서 부분과 부분의 합으로 전체가 구성된다는 불변량을 인식하기 때문이다. 그렇지만 무한의 세계에서 공통 불변성의 지각은 다른 결과를 초래한다. 그럼에도 불구하고 우리는 유한의 세계에서 적용된 공통 불변성으로 인식된 자명함을 무한으로 적용하려 하기 때문에 무한의 세계에서는 부분과 전체가 같을 수 있다는 것을 수용하지 않으려는 것이다.

자명하게 인식된 사실은 매우 강압적(coercive)하기도 하다. 그러기에 직관적으로 인식된 사실은 오랜 동안 생명력을 유지할 수 있었으며, 새로운 사실을 발견하는 데에는 수용을 거부하려는 영향을 강하게 끼쳐 왔다. 예를 들어 천동설과 지동설 사이에서 많은 논쟁이 있기 전에 천동설은 상식(commonsense)과 같이 자명한 사실로 인식하도록 강압하였고, 지동설이 제기된 이후에도 논란은 계속되었다. 또, 집합론의 발견의 과정에서도 기존의 상식과 반하는 것으로 많은 논란이 멈추지 않았던 것이다. 따라서 직관과 반하는 새로운 사실을 발견하는

1) 직관적 이해를 지원할 수 있는 모델의 개발, Nelsen [26]이 제시하는 수학 정리의 시각적 표현이 한 가지 방안이 될 수 있다.

데에는 기존의 상식을 뛰어 넘는 과학자들의 용기가 필요했던 것이다 [7].

직관의 특성의 상반된 성격은 직관적인 수학 문제해결 과정에서도 고려될 필요가 있다. 이것은 문제해결자의 인지 안에 형성된 직관의 특성들이 문제해결에 강하게 영향을 발휘하기 때문에 그러하다. 이에 직관의 특성이 수학 문제해결에 어떤 영향을 끼치는가에 대해서는 긍정적인 측면과 부정적인 측면에서 역할을 논할 수 있다. 먼저, 긍정적인 면에서는 대상을 즉각적으로 인식하고 판단하는 과정에서 문제해결을 위한 해결책이나 실마리를 즉각적으로 인식하여 문제를 쉽게 해결할 수 있다는 것이다. 예를 들어 '시각화(visualization)' 와 같은 특성은 직관적으로 문제를 이해하고 해결하는 데 중요한 역할을 한다. 이런 면에서 Nelsen [26]은 그림을 이용하여 말이 없는 증명으로 많은 수학적 원리를 설명하고 있다. 또 디오판투스 문제 해결에서 Ervynck [6]이 제시한 정수론의 아이디어를 바탕으로 분모의 최소공배수를 구해 답을 구하는 것은 문제해결의 실마리를 즉각적으로 인식하여 문제를 해결하는 직관의 힘인 것이다.

직관의 부정적인 면에서는 직관의 강건성과 강제성과 같은 특징으로 인해 개인의 추론 방식에 절대적이며 유일하게 작용하여 다른 아이디어의 수용을 거부하는 것으로 나타난다. 예를 들어 무한에서 잠재적 무한 개념은 실 무한의 개념의 수용을 방해하며, 짝수는 자연수의 부분이므로 짝수의 개수는 자연수의 개수보다 작다고 해석하도록 강요함으로써 문제해결에 부정적인 역할을 하는 것이다.

직관의 특성이 학교수학과 수학 문제해결에 긍정적 · 부정적인 영향을 끼친다는 사실은 이를 활용한 교육에 앞서, 이로부터 파생될 수 있는 효과와 문제점에 대한 인식이 필요함을 제기하다. 학교수학에서 다루는 내용이 직관적 인식과 수용 정도와 무관하게 형식적인 수학을 지도하는 데 치중하게 되면, 논리로부터 그 근거를 확보할 수는 있지만, 많은 연구 [22, 9, 10]에서 제시하듯이 학생들은 여전히 수용을 거부하는 경향이 있다는 것을 인식해야 한다는 것이다.

3.2 직관적 수용(acceptance)과 문제해결

직관이 다양한 의미와 특성을 가지고 있지만, 그 중에서도 공통적으로 받아들여지는 특성 중 하나로 즉시성(immediacy)을 들 수 있다 [8]. 이것은 어떤 상세한 설명이나 정당화 과정도 필요 없이 어떤 해법이나 사실을 즉각적으로 수용하는 것을 의미한다. 예를 들어 한 점에서 다른 점으로 직선 하나를 그을 수 있다는 사실은 어떤 설명이나 정당화 과정도 필요 없이 즉시 받아들일 수 있는 사실이다. 즉, 직관적으로 수용 가능한 사실이다. 직관적으로 수용가능하다는 것은 자명함(self-evidence)과 확신(confidence)의 정도에 따라 구분할 수 있다.[2] '전체는

2) Fischbein, Tirosh, Melamed [10]는 직관적 수용을 측정하기 위한 수단으로 명백함(obviousness)과 확신(confidence)을 제안하였다. 본 논문에서는 명백함의 유사 개념으로 자명함을 제시하였다.

그것의 부분보다 크다. 모든 자연수는 그 다음의 수를 가진다.' 라는 문장과 같이 자명함은 어떤 설명이나 정당화 과정도 필요 없이 저절로 참이라고 느껴지는 특성으로, 형식적인 증명이나 경험적인 증명도 필요 없이 어떤 사실을 즉각적으로 수용 가능도록 이끄는 직관의 특성인 것이다 [8].

그런데 어떤 사실을 직관적으로 수용하기 위해서는 확신이 필요하다. 확신은 어떤 사실을 믿는 정도에 따라 결정이 되며, 직관적 판단에서 중요한 역할을 한다. 우리가 어떤 판단을 하거나 결론에 이르기 위해서는 그 상황에 대해 확신을 해야 한다. 이 경우에 확실성을 추구하는 것은 개인적인 판단에 따르는 것이고, 개인적 판단의 근거는 경험, 지식, 신념, 인지 등의 다양한 근원에 바탕을 두고 있다. Fischbein [7] 은 확신의 근거를 3가지로 들고 있는데, 첫째는 형식적인 논증에 의해 간접적으로 부여된 외재적 확신을 의미하며, 이 경우는 순수하게 형식적이고 때로는 기호적인 과정으로 획득된다. 예를 들어 수학의 많은 정리들은 증명에 기초하여 받아들여지고, 이를 내면화함으로써 확신하게 되는 것이다.

다음으로 다양하고 실제적인 사실로부터 유도된 경험적이고 귀납적인 확인 과정을 통해 얻어지는 확신이다. 교실에서 수학을 가르치는 선생님은 학생들의 수학 문제해결 과정을 고찰하여 그 학생의 문제해결력에 대해 의사 결정을 하게 된다. 환자를 진료하는 의사는 고도의 통찰력을 바탕으로 환자의 상태에서 의학적인 결정을 내리곤 한다. 두 경우 모두 공통점은 자신이 경험하고 얻은 정보에 기초하여 상황에 대한 확신을 가지고 판단을 하는 것이다.

마지막으로는 상황의 구조 그 자체에 의해 직접적으로 부여된 내재적인 직관적 신념 (belief)에 의한 확신이다. 직관적 신념에 의한 확신은 인지적인 신념을 구성하며, 상황이나 실재에 대한 지각이 자동적으로 그 상황이나 실재와 일치해 보일 때 이루어진다. 따라서 이러한 직관적 신념에 의한 확신은 거부감 없이 수용하는 경향이 강하게 나타난다. 분명히 우리는 외재적인 지원보다는 내재적으로 신뢰할 수 있는 판단을 수용하는 경향이 강하다. 직관적 신념에 의해 우리는 길을 건너는 상황에서 즉각적인 판단을 하거나, 외재적인 정당화 과정이 없이 수학적인 사실을 즉각적으로 수용하게 된다.

확신의 정도와 관련하여 우리의 근본적인 인지는 직관적 신념에 의한 확신을 우선적으로 수용하는 경향이 있다. 예를 들어, 짝수의 개수와 자연수의 개수가 같다는 사실의 증명 과정을 눈으로 확인하고서도 직관적으로 확신하지 못하는 경우가 그러하다 [7]. 따라서 즉각적으로 판단을 해야 하는 상황에서 형식적인 논증에 의해 간접적으로 부여된 외재적 확신이 역할을 하기 위해서는 그러한 확신이 직관적 신념으로 형성되어야 하고, 이것은 제2직관의 형성을 요구하게 된다.

그런데 직관적 수용을 위해서는 자명함과 확신이 병행되어야 한다. 자명함과 확신이 서로 밀접하게 관련되어 있지만, 서로에게 영향을 끼치거나 함의하지는 않는다. 자명하게 느껴지는 사실이 확신하지 못하는 사례나, 역으로 참이기 때문에 확실해 보이지만 자명해 보이지 않는

사실을 수학에서 쉽게 발견할 수 있다. 직관적 수용의 두 요소인 자명함과 확신을 고려할 때 수학 학습과 관련하여 세 가지 경우의 사례를 찾을 수 있다.

첫째는 확신하지만, 자명해 보이지 않는 경우이다. 예를 들어 '삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.' 라는 명제가 증명 과정을 통해 확실해 보이지만, 직관적으로 자명해 보이지는 않는 것과 같이 [7], 학교에서 선생님이 증명한 사실이나 교과서에 제시된 내용들은 수학적으로 확실해 보이지만, 그 자체로 자명해 보이지는 않는다. 따라서 이러한 사실은 직관적으로 수용되어지진 않는다. 그렇지만 직관적인 해석이 학습된 결과로서 형성되어 인지적 신념으로 확립될 수 있다면 이것은 제2직관으로 형성이 되는 것이고 [8], 이 경우에 내재적으로 자명해 보이지 않던 사실이 자명하게 인식되기도 한다. '삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.' 라는 사실을 자명하게 받아들이지 않던 학생들이 다양한 탐구 방법을 통해 어떠한 삼각형에 대해서도 항상 일정한 값을 유지한다는 것을 수용하게 되는 경우에 교육과 경험을 통해 후천적으로 만들어지는 제2직관이 형성된 것이다. 일례로 탐구형 소프트웨어를 이용한 활동에서 다양한 모양의 삼각형에 대한 탐구 과정을 통해 '삼각형의 내각의 크기의 합은 180°이다.' 라는 사실이 인지적 지식으로 형성될 수도 있는 것이다.

다음으로 명백해 보이지만, 확신할 수 없는 경우이다. Mach 착시로 알려진 똑같은 길이를 가진 두 개의 수평선 길이를 다르게 인식하게 하는 경우에는 분명히 두 선분의 길이를 같게 그렸기 때문에 두 선분의 길이가 같다는 것은 명백해 보인다. 그렇지만 우리의 시각은 아래 그림에서 화살표 방향이 주는 인상에 의하여 직관적으로 위의 선분을 길게 느낀다. 따라서 두 선분의 길이가 같다는 것을 확신할 수는 없다.

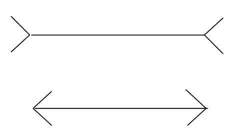

Figure 1. Mach; 착시

마찬가지로 수학 문제해결에서도 이러한 현상은 유사하게 나타난다. 예를 들어, '선분 위에 임의의 점이 있다. 그리고 선분의 중점을 잡아 두 부분으로 나누고, 계속하여 각각의 선분에 중점을 잡아 갈 때, 이들 중 하나가 반드시 선분 위의 임의의 점에 도달하겠는가?' 라는 문제에 고등학생인 피험자의 10.6%만이 옳게 대답을 하였다 [19]. 유사한 두 연구에서도 6.5%와 10,2%만이 정답을 하였고 [9, 10], 정답자들은 명백함에 대해서는 높은 점수를 나타냈지만 답에 대한 확신에서는 낮은 점수를 나타냈다 [10]. 이것은 자명하게 보이는 사실이지라도 문제의 복잡성 때문에 확실하다고 판단하지 못하는 것이다. 이러한 경우와 같이, 자명하게 인식될지라도 확실해 보이지 않는 상황에서는 그 상황을 과신하지 말고 논리적으로 탐구해야 한다. 특히 수학 문제해결 과정에서는 메타인지가 개입되어야 한다 [8]. 즉, 우리 자신의 문제

해결 과정을 분석하고 통제하는 과정을 통하여 판단의 과정과 결과를 지속적으로 검토하고 점검해야 한다.

직관적인 수용의 관점에서 볼 때 위의 두 가지 경우는 직관적 수용 정도가 비교적 낮은 경우에 해당된다. 마지막으로 확신할 수 있으며, 자명하게 보이는 경우를 들 수 있다. 예를 들어 '두 직선이 만나서 이루는 맞꼭지각의 크기는 같다.' 라는 사실은 증명의 필요도 느끼지 못할 정도로 명백해 보이고 확실해 보인다. 이러한 경우에 수용되는 사실은 자명함과 확신의 정도에서도 매우 높은 상관관계를 유지한다 [10]. 일반적으로 우리는 증명이나 추론 과정과 같은 외적인 지원보다는 내재적으로 자명하고 확신할 수 있는 사실을 더 수용하는 경향이 있다. 유클리드의 공리나 공준과 같이 이러한 사실들은 내재적으로 확실해 보이는 확신과 함께 자명한 것으로 느껴지는 경우에 직관적으로 수용하는 정도가 높은 것이다.

수학 문제해결에서 주어진 상황에 대한 직관적 수용과 거부는 그 사실의 수학적 수용 여부에 따라 진위여부가 결정되어지며, 이 경우를 다음의 세 가지 경우로 구분하여 제시할 수 있다. 먼저, 직관적으로 수용되는 사실이 수학적으로도 수용되는 사실인 경우이다. 이 경우에는 교수학적으로 곤란한 문제가 발생되지는 않는다. 유클리드 원론의 발생과정에서 '공리' 와 '공준' 은 자명한 사실로서 직관적으로 수용된 사실이 그 근간이 되었고, 이를 바탕으로 형식 · 논리적인 수학이 전개되었다. 또한 수학 문제해결 과정에서도 이 경우에는 높은 정답률과 강한 직관적 수용 정도를 나타낸다. 예를 들어 '선분 $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}m$가 주어져 있다. 여기에 다른 선분 $\overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{4}m$를 붙인다. 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{8}m$, $\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{16}m, \cdots$ 를 계속하여 이어서 붙여 나가자. 선분을 계속해서 붙여가는 이 과정에서 끝이 있는가?' 라는 문제에 대해 응답자들은 84.1%의 정답률과 높은 직관적 수용 정도를 보여주고 있다 [10].

다음으로, 직관적으로 수용되는 사실이 수학적으로는 수용되지 않는 사실인 경우이다. 이 경우에 직관적 사고에 의한 즉각적인 문제해결은 반-직관적인 수학적 사실로 인해 오류를 발생시키게 된다. 수학의 역사에서 '연속함수는 모든 점에서 미분계수를 갖는다.' 라는 진술은 연속함수 그래프에 부착된 암묵적인 시각적 모델로 인해 직관적으로 수용되어지는 경향이 있다 [8]. 그런데 어떤 점에서도 정확한 기울기를 갖지 않는 선이 존재한다는 것이 증명되었지만, '미분계수가 없는 연속함수' 를 직관적으로 수용하는 데에는 영향을 주지 못하는 것 같다.

마지막으로, 직관적으로 수용되지 않는 사실이 수학적으로 수용되는 사실인 경우이다. 무한 개념의 경우가 대표적인 예이다. 우리는 '$0.999\ldots = 1$' 이라는 사실을 학교교육을 통해 알고 있지만, 여전히 우리의 잠재적 무한 개념에 의한 직관적 신념은 이를 수용하는 것을 거부한다 [33].

마지막 두 경우와 같이, 직관적 수용과 수학적 수용 사이에 양립이 되는 경우에는 교수학적인 문제가 발생한다. 내재적으로 오랜 시간에 걸쳐 형성된 직관적 신념과 수학의 형식적 논리에 바탕을 둔 객관적 사실 사이의 상충된 상황은 새로운 교수학적 방안의 마련의 필요성을 제기

한다. 새로운 직관적 신념의 형성을 위해 기호 중심의 수학을 시각화하여 통찰을 경험하도록 하거나, 직관적 모델이나 직관적 원리에 의한 교육 방안을 마련할 필요가 있다. 이에 대한 방안 마련에 대해서는 추후 연구의 주제로 제안을 덧붙인다.

4 창의적인 수학 문제해결과 직관적 사고

학생들의 수학적 창의성을 신장시키려는 방침은 수학과 교육과정 개정의 과정에서 오랫동안 지속되어 왔다. 그럼에도 불구하고 수학적 창의성 자체에 대한 명확한 합의도 없는 것이 사실이다 [24]. 수학적 창의성은 다양한 의미로 다루어지기도 하는데, 예를 들어 수학적 창의성을 새로운 지식의 창출로 보는 관점과 유연한 수학적 문제해결력으로 나누기도 하고 [17], 창의적 사고를 강조하는 관점과 산출물을 강조하는 관점으로 나누기도 한다 [18]. 그리고 수학 문제해결과 관련해서는 유창성과 융통성, 그리고 독창적인 해결 방법을 산출하는 수학적 문제해결에 주로 초점을 두기도 한다 [23].

창의적인 수학 문제해결에서 직관적 사고의 역할에 대한 탐구는 문제해결의 과정을 순차적으로 제시한 정보처리 관점의 연구에서 도출할 수 있다. Wallas [34]는 창의적인 사고과정을 준비 (preparation), 부화 (incubation), 발현 (inspiration), 검증 (verification) 의 4단계로 나누어 제시하고 있다. Wallas의 창의적 사고 과정의 단계에서 주목할 단계는 '발현' 과정이다. 이것은 부화 과정의 무의식적인 노력의 결과로 문제해결책이 번뜩이는 단계를 의미한다. 발현 과정에서 아이디어의 산출 과정에 대해 Hadamard [12]는 갑작스런 영감이 단지 무의식적인 과정을 통하여 성취되는 결과만은 아니라, 고도의 의식적인 선행과정에 의존한다고 한다. Poincaré [31] 도 수학의 발명이란 기존에 무관했던 요소들 사이에서 '유용한 조합' 을 만들어내는 것으로, 이를 위해서는 문제해결자가 소유하고 있는 기존의 지식과 경험이 바탕을 이루어야 한다고 한다.

이런 맥락에서 본다면 창의적인 수학 문제해결이란 '기존의 지식을 바탕으로, 이전에는 무관하게 느껴졌던 요소들이 무의식적인 노력의 과정을 통해 유용한 조합으로 발현되어 새롭고 가치 있는 방법으로 문제를 해결하는 것' 으로 생각할 수 있다. 즉, 문제해결자가 기존의 지식을 바탕으로 새롭고 가치 있는 방법으로 유의미한 해결책을 즉각적으로 산출해내는 것으로 창의적인 문제해결을 이해할 수 있다. 따라서 이 경우에 문제해결자가 소유하고 있는 지식이나 경험은 중요한 요소로 고려될 필요가 있으며, 이전에 무관하게 보였던 요소들 간의 유용한 조합을 통해 즉각적으로 해결책을 떠올리는 직관적 사고의 중요성을 고려할 필요가 있다. Wilder [36] 도 직관적 사고가 없다면 수학의 발견은 중단됐을 것이라고 제시하며, 수학의 발견 과정에서 직관적 사고의 가치를 중시하고 있다.

이에 대해서는 Evynck [6] 도 이해, 직관, 통찰, 일반화와 같은 요소의 상호작용에 의해 수학적 창의성은 발현된다고 보는바, 새로운 해결책을 만들어내기 위해서 기존 지식을 바탕

으로 유용한 조합에 의한 발현이 일어나는 직관적 사고를 통해 창의적인 문제해결을 경험할 수 있는 것이다. 이런 면에서 수학적 창의성이 발현된 예로 '디오판투스의 묘비' 문제를 들고 있는데, 전형적인 방법인 연립방정식을 활용하는 것보다 문제에 제시된 여러 개의 분수와 그것이 의미하는 것에 대한 아이디어의 발현을 통해 직관적으로 해결하는 방법에 더 관심을 두고 있는 것이다.

직관적 사고를 통한 창의적인 문제해결이 가능하기 위해서는 문제해결자의 문제에 대한 지식과 직관적인 문제해결 경험을 필요로 한다 [16]. 그리고 직관적인 문제해결 경험을 위해서는 직관적 해결 방법과 논리적 해결 방법과 같이 다양한 방법으로 해결할 수 있는 다답형 문제를 활용하는 것이 한 가지 방안이 될 수 있다. Leikin [24] 은 여러 가지 해결 방법이 있는 문제를 활용하여 수학적 창의성을 측정하였는데, 다음은 그가 활용한 문제이다.

> 갑과 을은 같은 시간에 집에서 출발하여 학교까지 걸어서 가기로 하였다. 그런데 갑은 학교까지 가는 데 걸린 시간의 반을 v_1 의 속력으로 걸어가고, 나머지 반을 v_2 의 속력으로 걸어갔다. 그리고 을은 집에서 학교까지 거리의 반을 v_1 의 속력으로 걸어가고, 나머지 거리의 반을 v_2 의 속력으로 걸어갔다. $v_1 > v_2$ 라고 할 때 누가 먼저 학교에 도착했을지 구하여라.

Leikin [24] 은 이 문제에 대한 해결 방법으로 전형적인 알고리즘에 의존하여 해결한 것에서부터 움직임에 대한 시뮬레이션을 통한 해결, 움직임을 그래픽으로 표현한 해결, 시간-거리-속도라는 세 요소에 주목하여 기울기 (거리/시간) 와 넓이 (속도×시간) 를 활용한 해결 등을 제시하고 있다. 그리고 그러한 방법들은 그가 고안한 유창성, 융통성, 독창성이라는 창의성 평가 준거에 비추어 창의적으로 우수한 문제해결로 평가하고 있다. 이러한 문제해결의 과정들은 종전의 알고리즘 위주의 논리적 해결 방안이 아닌, 문제의 요소에 비추어 새로운 수학적 개념을 바탕으로 산출한 것이기에 더욱 가치가 있다. 우리나라 초등학생을 대상으로 한 연구에서도 직관적 해결과 논리적 해결이 가능한 문제의 경우에 학생들의 해결 방법은 논리적 해결법에 치중되어 있다는 사실은 기지의 지식을 바탕으로 논리적 해결 방법뿐만이 아니라, 직관적 사고를 통해 즉각적으로 해결할 수 있는 문제해결 경험이 필요함을 시사한다 [22].

앞선 진술에서 창의적인 문제해결에서 새롭고 가치 있는 해결책을 산출하기 위하여 기지의 지식과 경험이 요구되며, 문제해결에 대한 의식적인 노력이 수반되어야 한다는 것을 제시하였다. 그렇지만 기지의 지식과 경험 및 의식적인 문제해결 노력이 창의적인 문제해결의 필요조건이지 충분조건일 수는 없다. 또한 몇몇 수학자들의 자서전적 문헌에서 알 수 있듯이, 직관적 문제해결 과정에 대한 예시에서 직관적 사고의 발현 과정을 엿볼 수 있었다. 이와 관련하여 학교 수학에서 직관적 사고의 발현에 대한 귀납적 분석 연구를 통하여 수학 문제해결 과정에서 직관적 사고의 발현과 이에 필요한 교수 방안에 대한 추후 연구를 제언으로 남겨둔다.

5 결론

일상생활에서 해결해야 할 문제에 부딪쳤을 때 우리는 의식적으로 문제해결을 위해 몰두하지만, 그 해결책을 쉽게 얻지 못하는 경우가 있다. 그렇지만 문제를 해결하기 위해 의식적으로 노력을 기울이지 않은 상황에서도 불현듯 해결 방안이 떠오르기도 한다. 이것은 직관의 힘에 의한 것으로, 수학 문제해결 과정에서도 유사하게 나타나기도 한다. 예를 들어 Poincaré[31]는 그의 자서전적인 글에서 문제해결에 대한 그럴듯한 결과를 얻지 못하여 서성이며 고민하던 중, 그 해결책에 대한 생각이 돌연히 간결하고도 직접적이고 확실성 있게 머리에 떠올랐다고 제시하고 있다. 이것은 수학 문제해결에서 직관 발현에 대한 한 가지 예시가 되고 있다.

직관은 오랫동안 수학의 발견과 발전 과정에서 중요한 역할을 수행해 왔지만, 논리 위주의 수학의 역사는 직관을 수학을 하는 데 중요한 한 축으로 다루어 오지 못하였다. 그렇지만 수학에서 직관의 가치에 대한 인식과 더불어 직관과 논리의 상호 보완적인 역할과 기능은 직관을 통한 교육의 필요성을 제기하며, 이는 교육과정의 개정 과정에서도 꾸준히 화두가 되어 왔다.

수학교육에서 직관을 통한 교육의 가치를 고려하기 위한 본 논문에서는 서로 유사하거나 동일한 의미로 사용되고 있는 직관과 직관적 사고를 구별하고, 수학교육에서 직관과 관련된 상보성 문제를 다루었다. 또한 수학 문제해결 과정에서 직관의 특성의 긍정적 · 부정적 측면의 영향과 수학에서 수용되는 사실과 직관적으로 수용되는 사실과의 관계 및 교수학적인 문제를 다루었다. 수학의 발견과 발전 과정뿐만이 아니라, 창의적인 수학 문제해결에서 직관적 사고는 중요한 역할을 한다. 이에 새롭고 가치 있는 해를 산출하는 창의적인 문제해결의 과정에서 직관적 사고의 중요성을 언급하였다.

직관이 자명하고 확신을 주는 특성을 가지고 있음에도 불구하고, 그 발현 과정을 명시적으로 확인할 수 없는 문제는 직관에 대한 연구를 소홀히 하게 한 원인이기도 하였다. 그렇지만 직관은 모든 인간이 소유한 기본 속성이고, 이는 교육을 통해 점진적으로 개발할 수 있다는 많은 연구가들이 제시하는 직관에 대한 공통된 견해 [8, 12, 4, 36]는 학교교육에서 직관의 개발을 위한 노력의 필요성을 제기한다. 따라서 직관이 가지는 기능의 장점을 충분히 활용하여 학교 교육에 활용할 수 있는 직관적 원리에 의한 교수 방안에 대한 연구가 지속적으로 이루어질 필요가 있다. 또한 직관적 사고의 발현 과정을 체계적으로 모니터하는 과정을 통해 직관적 사고 발현을 위한 환경과 여건 조성 및 교육 방안에 대해서도 지속적인 연구가 수행되어야 할 것이다.

References

1. American Psychological Association, *APA Dictionary of Psychology*, American Psychological Association, 2015.

2. E. W. Beth, J. Piaget, *Mathematical Epistemology and Psychology*, D. Reidel Publishing Company, 1966.
3. J. S. Bruner, Lee, H. W. (Tran.), *The Process of Education*, Educational New Book 5, 1973. 이홍우 (역), 교육의 과정, 교육신서 5, 1973.
4. L. Burton, Why is Intuition so important to mathematicians but missing from mathematics education?, *For the Learning of Mathematics* 19(3) (1999), 27–32.
5. P. J. Davis, R. Hersh, *Mathematical Experience*, Boston: Houghton Mifflin Company, 1981.
6. G. Ervynck, *Mathematical creativity*, In D. Tall(Ed.), Advanced Mathematical Thinking(42–53), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
7. E. Fischbein, Intuition and proof, *For the Learning of Mathematics* 3(2) (1982), 9–18.
8. E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel publishing company, 1987.
9. E. Fischbein, D. Tirosh, P. Hess, The Intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics* 10 (1979), 3–40.
10. E. Fischbein, D. Tirosh, U. Melamed, Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981), 491–512.
11. J. I. Friedman, Intuition, *Improving college and University Teaching* 26(1) (1978), 31–38.
12. J. Hadamard, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Priceton university press, Princeton, 1945.
13. R. Hersh, *What is Mathematics, Really?* Heo, M. (Tran.), *What is Mathematics, Really?*, Seoul: Kyungmoonsa, 1997. 허민 (역)(2003), 도대체 수학이란 무엇인가?, 서울: 경문사, 1997.
14. Kim, U. T., Park, H. S., Woo, J. H., *Introduction to the Theory of Mathematics Education*, Seoul: Seoul National University Press, 1995. 김응태, 박한식, 우정호, 증보 수학교육학개론, 서울: 서울대학교 출판부, 1995.
15. M. Klein, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Park, S. H. (Tran.), 1988. *The Certainty of Mathematics*, Seoul: Minumsa, 1980. 박세희 (역) (1988), 수학의 확실성, 서울: 민음사, 1980.
16. V. A. Krutetskii, *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*, The University of Chicago Press, 1976.
17. Kwon, O. N. et al, Cultivating Mathematical Creativity through Open-ended Approaches: Development of a Program and Effectiveness Analysis, *The Mathematical Education* 44(2) (2005), 307–323. 권오남 외, 개방형 문제 중심의 프로그램이 수학적 창의력에 미치는 효과, 수학교육 44(2) (2005), 307–323.
18. Lee, K. S., Hwang, D. J., Correlation between Gifted and Regular Students in Mathematical Problem Posing and Mathematical Creativity Ability, *The Mathematical Education* 46(4) (2007), 503–519. 이강섭, 황동주, 영재학생과 일반학생의 수학 창의성과 문제설정과의 상관 연구, 수학교육 46(4) (2007), 503–519.
19. Lee, D. H., *An Analysis of Intuitive Thinking of High School Students in Mathematical Problem Solving Process*, Korea National University of Education Doctoral Dissertation, 2001. 이대현, 수학문제해결과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석, 한국교원대학교 박사학위논문, 2001.
20. Lee, D. H., The Intuition in History of Mathematical Philosophy and Mathematics, *The Korean Journal for History of Mathematics* 18(2) (2005), 23–30. 이대현, 수리철학과 수학의 역사에서 직관, 한국수학사학회지 18(2) (2005), 23–30.
21. Lee, D. H., A Study on the History of Intuition Research and its Mathematics Educational

Implication, *Journal of the Korean School Mathematics Society* 11(3) (2008), 363–376. 이대현, 직관에 관한 연구 역사와 수학교육적 의미 고찰, 한국학교수학회논문집 11(3) (2008), 363–376.

22. Lee, D. H., An Analysis on the Effect by the Characteristics of Intuition of Elementary Students in Mathematical Problem Solving Process, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 14(2) (2010), 197–215. 이대현, 초등학생들의 문제해결 과정에서 직관의 특징에 의한 영향 분석, 한국초등수학교육학회지 14(2) (2010), 197–215.
23. Lee, D. H., A Study on the Factors of Mathematical Creativity and Teaching and Learning Models to Enhance Mathematical Creativity, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 16(1) (2012), 39–61. 이대현, 수학적 창의성의 요소와 창의성 개발을 위한 수업 모델 탐색, 한국초등수학교육학회지 16(1) (2012), 39–61.
24. R. Leikin, Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu(Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*(129–145), Sense Publishers, 2009.
25. Ministry of Education, Science and Technology, *Mathematics Curriculum*, Ministry of Education, Science and Technology, 2011. 교육과학기술부, 수학과 교육과정, 교육과학기술부, 2011.
26. R. B. Nelsen, *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993.
27. N. Noddings, P. J. Shore, *Awaking the Inner Eye*, New York: Teachers College Press, 1984.
28. On, K. C., *Intuitive Thinking and Education*, Seoul: Haksisa, 2001. 온기찬, 직관적 사고와 교육, 서울: 학지사, 2001.
29. Park, S. T. et al, *Mathematics Education*, Seoul: Dongmyeongsa, 1993. 박성택 외, 수학교육, 서울: 동명사, 1993.
30. H. Poincaré, Kim, H. B. (Tran.), *The Value of Science*, Dandae Press, 1983. 김형보 (역), 과학의 가치, 단대 출판부, 1983.
31. H. Poincaré, Kim, H. B., Oh, B. S. (Trans.), *The Methods of Science*, Dandae Press, 1982. 김형보, 오병승 (역), 과학의 방법, 단대출판부, 1982.
32. H. Poincaré, Intuition and Logic in Mathematics, *The Mathematics Teacher* 62(3) (1969), 205–212.
33. D. Tall, Intuition of infinity, *Mathematics in School* 10(3) (1981), 30–33.
34. G. Wallas, *The Art of Thought*, Harcourt Brace, 1926.
35. M. Wertheimer, *Productive Thinking*, New York: Harper Brothers published, 1945.
36. R. L. Wilder, The Role of intuition, Science, *New Series* 156(3775) (1967) 605–610.
37. E. Wittmann, The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* 12(3) (1981), 389–397.