한국학교수학회논문집 제 18 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 18, Number 3, 259-279, September 2015

일차방정식과 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류[1)]

이헌수[2)] · 김영철[3)] · 박영용[4)] · 김민정[5)]

본 연구에서는 방정식과 함수에 대한 중학생들의 인식과 오류에 대해 조사하기 위하여 M시 관내에 있는 중학교 2학년 163명과 3학년 학생 103명을 대상으로 일차방정식과 일차함수에 대한 인식과 오류에 대하여 조사하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 학생들은 x에 대한 일차방정식은 방정식으로 인식하는 반면 x가 아닌 다른 문자를 사용한 일차방정식은 방정식으로 인식하지 못하는 경향이 있다. 둘째, 학생들은 상수함수 $y=p$를 일차함수라고 생각하는 경향이 있다. 셋째, 학생들은 식을 표현하는 형태에 의존하여 방정식과 함수를 구분하는 경향이 있다. 넷째, 학생들은 방정식과 함수의 가장 큰 차이점에 대해 교과서의 개념정의에 의해 판단하는 경향이 두드러졌다.

주요용어 : 일차함수, 일차방정식, 함수, 방정식, 오개념

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교수학에서 대수 학습은 중학교 1학년 문자와 식의 단원에서 문자와 기호가 도입됨으로써 시작되고, 학생들은 문자와 식을 토대로 대수 영역을 학습함으로써 다른 수학 분야에 필요한 기초 지식을 습득할 수 있다. 학교수학에서 대수 영역은 학생들에게 우리 주변에 일어날 수 있는 여러 가지 문제 상황을 수식으로 표현할 수 있게 하고, 양 사이의 관계를 탐구할 수 있게 하고, 문제를 형식화하거나 일반화할 수 있게 하는 등의 중요한 역할을 담당하고 있다. 관계들의 기호적 표현의 관점에서 대수가 수학의 중심적인 역할을 한다면 함수와 변수는 대수의 중심이라고 할 수 있다(Freudenthal, 1982). 이러한 변수 개념은 중학교 1학년 함수 영역에서 함수가 도입됨으로써 본격적으로 사용되기 시작한다.

중학교에서 다루는 함수의 내용은 초등학교에서는 다뤄진 규칙성을 기반으로 하여 실생활에서의 변화 현상을 기초로 함수의 개념이 도입된다. 또한, 학생들은 함수의 성질을 학습하

1) 본 논문은 2014학년도 목포대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음
2) 목포대학교 수학교육과 (leehs@mokpo.ac.kr)
3) 목포대학교 수학교육과 (yckim@mokpo.ac.kr), 교신저자
4) 목포대학교 수학교육과 (yypark@mokpo.ac.kr)
5) 목포대학교 교육대학원

는 과정 속에서 실생활이나 자연현상에서 나타나는 다양한 변화 현상 등을 수학적으로 이해하고 수학의 여러 분야를 통합하는 함수적 사고를 습득하게 된다. 함수 개념은 역사적 발생의 맥락에서 보면 여러 가지 물리적, 사회적, 정신적 특히 수학적 세계에서 일어나는 현상 가운데 그 '종속 관계'를 설명하고 기술하고 조직하기 위한 도구로서 도입되었기 때문에 고전적으로 함수는 독립변수와 종속변수 사이의 종속관계를 의미하는 것이었다. 독립변수와 종속변수 사이의 종속관계에서 오늘날에는 집합 A로부터 B로의 함수의 의미가 A의 각 원소에 B의 한 원소가 대응되는 관계로 정의하고 있다(우정호, 2007).

변수의 개념은 그 특징에 따라 동적인 측면과 정적인 측면으로 구분할 수 있다. 변수의 동적인 측면은 실제로 변하거나 변하는 것으로 가정되는 대상의 운동학적인 상태를 나타내는 것이고 변수의 정적인 측면은 동치인 여러 대상을 동시에 나타내는 것으로 동적인 측면과 정적인 측면에서의 변수의 의미는 두 가지 모두 '변한다'와 '대신한다'의 의미를 함의하고 있다(김남희, 2009). 변수의 개념은 산술적 사고와 대수적 사고를 구분 짓고 대수적 사고를 이해하는데 핵심적인 역할을 하는 개념으로, 대수 중심의 현대수학 따라서 학교수학을 이해하는데 바탕이 되는 개념이고 대수학습에서 무엇보다도 중요한 것은 변수기호와 관련된 형식적인 사고이다(우정호, 2007). 그러나 학교대수에서 대수적 언어로서의 문자 x 또는 y가 서로 다른 방식으로 사용되어 공식, 방정식, 함수 등의 명칭으로 구분하여 사용되고 있고, 변수 기호가 복합적인 의미를 명확히 지도하지 않고 암묵적으로 사용하거나 다양한 내용과 결부시켜 변수 개념의 정의를 간단히 제시하고 있기 때문에 중학교에서 학교대수를 처음 접하는 학생들은 이들 사이의 차이점을 명확히 구분하기 어려워할 수 있다(우정호, 2007). 따라서 중학교에서 학교대수를 처음 접하는 학생들이 대수적 언어로서의 문자 x 또는 y를 사용하여 표현된 방정식과 함수를 어떠한 방식으로 구분하고 있고, 이에 대한 오개념은 무엇인지에 대해 연구할 필요가 있다.

최근 연구된 방정식과 함수와 관련된 연구들을 살펴보면, 서종진(2009)은 중학생들을 대상으로 몇 가지 일차방정식의 유형의 문제들의 풀이 내용을 기초로 풀이 과정에서 나타난 반응을 조사하였고, 또한 서종진(2010)은 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 문제 유형에 따른 풀이 과정에서의 변화에 대해 연구하였다. 전영배 외(2010)는 미지수가 2개인 연립일차부등식에 대해 한 학생의 오류가 있는 풀이를 통해 오류의 원인에 대해 살펴보고, 해석기하적, 대수적 접근을 통해 오류를 분석하는 과정을 통해 학생이 오류를 줄일 수 있도록 하기 위한 바람직한 지도방안은 어떤 것이 있는지 대한 연구를 수행하였다. 함수와 관련된 연구로 이종희와 김부미(2003)는 중학교 2학년 학생들의 일차함수에 대한 오개념을 분석하여 유형별로 범주화하였는데 대수적 환경에서 일차함수에 대한 학생들의 오개념은 수 개념에 의한 장애, 변수개념 부족에 의한 장애, 특정 관점에의 집착으로 분류하였다. 최은형(2004)은 학교수학의 대부분의 단원과 연계성을 가지는 중학교 2학년 함수단원을 중심으로 학생들이 학습 수준별로 학교에서 배운 함수의 그래프를 어느 정도 이해하고 있으며 어떤 유형의 오류를 갖고 있는지를 분석하였고, 우미령(2005)은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 한 질적 연구를 통하여 학생들이 가지고 있는 함수의 정의와 함수를 구분하는데 대수적인 표현과 그래프적인 표현에 차이가 있는지에 대하여 연구하였다. 변희현과 주미경(2012)은 중학교 함수 개념의 도입시 종속적인 변화관계를 기반으로 도입된 교육과정의 변화가 학생들의 함수개념의 이해에 어떤 변화를 가져왔는지 그리고 실제 교수 학습 장면에서 함수가 어떻게 지도되고 있는지에 대하여 연구하였다. 박정미와 이중권(2013)은 동일한 수학적 상황에서 방정식, 부등식과 함수와 관련한 학생들의 문제해결능력을 분석하고 일차방정식과 일차

함수의 관계에 대한 학생들의 인식에 대해 연구하였다. 그러나 이와 같은 방정식과 함수와 관련된 연구들의 대부분은 방정식과 함수에 대한 학생들의 각각의 개념에 대한 오개념을 중심으로 진행된 연구들이 주를 이루고 있어 두 개념과 관련된 공통의 오개념에 대해 연구할 필요가 있다.

따라서 본 연구는 중학교에서 학교대수를 처음 접하는 학생들이 대수적 언어로서의 문자 x 또는 y를 사용하여 표현된 일차방정식과 일차함수를 어떠한 방식으로 구분하고 이에 대한 오개념은 무엇인지에 대해 연구하고자 한다. 이를 위하여 중학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 대수적인 관점에서 일차방정식과 일차함수의 개념에 대한 인식에 대한 설문 조사를 실시하여 학생들의 인식과 오류를 분석하고, 분석 결과를 바탕으로 중・고등학교 교사들이 방정식과 함수를 지도할 때 참고 자료로 활용할 수 있는 유용한 정보를 제공하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구는 현행 중학교 교육과정에서 함수와 방정식의 개념에 대한 학생들의 인식을 살펴보고, 교사들이 함수와 방정식을 지도하는데 참고자료로 활용하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 선정하였다.

1) 현행 교과서에서 방정식과 함수 단원에 구성은 어떠한가?
2) 방정식과 함수에 대한 중학생들의 인식과 오류는 무엇인가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 제한점을 갖는다.

첫째, 일차방정식과 일차함수 단원에 대한 교과서의 기술방법을 분석하기 위하여 현행 중학교 1, 2학년 수학 교과서와 교사용 지도서 6종만을 분석하였기 때문에 일반화하기에는 한계가 존재할 수 있다.

둘째, 일차방정식과 일차함수에 대한 학생들의 오개념이 교육과정, 교과서, 교수·학습 과정이나 학생들의 수학 학습 수준 등에 의해서 발생할 수 있 수 있다. 그러나 본 연구에서는 일차방정식과 일차함수에 대한 학생들의 오개념을 교과서와 학생들의 학년으로만 연구범위를 제한하였다.

II. 이론적 배경

1. 대수 학습과 관련된 변수의 개념

학생들이 중등학교에서 학교대수를 접했을 때 방정식과 함수 모두 문자 x 또는 y를 사용하여 식을 표현하고 있고, 방정식의 경우 방정식을 만족하는 해를 구하는데 문자를 사용하고 있고, 함수의 경우 함수식을 만족하는 함숫값을 찾는 데 문자를 사용하고 있기 때문에 방정식과 함수를 구별하는데 어려움을 겪고 있다. 학생들은 함수에서 사용하는 문자의 개념

을 정확히 이해하지 못한 채 식을 표현하는 형태에 의존하여 '$y=x$에 관한 식'을 함수로 구분하곤 한다(우미령, 2005; 오윤희, 2006).

현행 교육과정상 학교수학에서 학생들은 중학교 1학년 문자와 식 단원의 방정식에서 문자를 방정식의 해에 대한 자리지기 즉, 미지수의 개념으로 학습하고, 그 이후 함수 단원을 학습하면서 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 변수라고 학습한다. 이로 인해 학생들은 함수에서 사용된 문자를 변수로만 인식하고, 방정식에서 사용된 문자를 방정식의 해에 대한 미지수의 개념으로 강조하여 지도하면 학생들은 방정식에서 사용된 문자를 미지수로만 인식할 수 있다. 김남희(2009)는 변수를 미지수라고 생각하는 학생은 '모든 실수 x에 대하여 …'라는 문장이나 '정의역에 들어있는 원소를 x라고 하자'라는 문장을 이해하기 힘들고, 학생들이 변수를 $y=kx$와 같은 함수관계에서의 문자 x, y나 일차방정식, 이차방정식, 고차방정식에서의 문자 x 정도로만 경험을 하고 있으며 교사가 변수에 대한 지도를 할 때 변수의 제 측면을 고려를 하지 않은 채 제한된 문제 상황만을 제시하고 있다는 것을 지적하였다. 또한, 많은 학생들이 단순한 수식으로 제시된 함수에 대하여 함수의 개념을 이해하지 못한 채 $y=f(x)$라는 독립된 공식으로 이해하는 경향이 있다(Vinner, 1983; Sajka, 2003 재인용). 학교수학에서 변수 기호는 다양한 내용과 결부되어 암묵적으로 사용되고 있지만 이를 반성적 수준에서 명확히 지도하고 있지 않으며 '함수 $y=f(x)$의 x, y와 같이 여러 값을 나타내는 문자를 변수라고 한다'와 같이 변수 개념의 정의를 간단히 제시하고 있지만 학생들은 변수와 관련된 복합적인 의미나 다양한 사용법에 대해서는 곧바로 이해할 수 없다(우정호, 2007).

문자 변수의 개념은 다양한 수학적 문맥에서 서로 다른 여러 가지 양상으로 나타나는 다면적 개념이다. Usiskin(1988)은 대수학습과 관련하여 문자 변수의 의미를 문제 해결 과정의 학습에서의 문자 변수는 방정식의 해에 대한 자리지기인 미지수로, 일반화의 학습에서의 문자 변수는 패턴을 일반화하는 요소로 아직 정해지지 않은 상수를 나타내는 부정소로, 양 사이의 관계 학습에서의 문자 변수는 독립변수, 종속변수, 매개변수로, 구조의 학습에서의 변수는 어떤 성질을 만족하는 임의의 대상이나 임의의 기호로 구분하였다(<표 Ⅱ-1>).

<표 Ⅱ-1> 대수의 구분에 따른 문자 변수의 의미

대수 구분	문자 변수의 의미
문제 해결 과정의 학습	자리지기로서의 미지수
일반화의 학습	다가이름으로서의 부정소
관계들의 학습	독립변수, 종속변수, 매개변수
구조의 학습	임의의 대상, 임의의 기호(형식적 조적의 대상)

Freudenthal(1983)은 변하는 대상이라는 변수의 본질은 변수 개념의 핵심 아이디어를 이루는 것으로서 수학적 상황에서 여전히 지배적으로 존재하고 있음을 강조하며 이를 변수개념 지도에서 중요하게 다루어야 한다고 주장하였다. 그러나 변수의 개념이 다양한 수학적 문맥에서 서로 다른 여러 가지 양상으로 나타나는 다면적 개념임에도 불구하고 학생들은 학교수학에서 함수를 도입할 때 변수의 개념을 변하는 수로 한정되어 학습함으로써 변수를 함수에서의 독립변수나 종속변수로만 국한하여 인식하는 경향이 있다. 교사들의 변수 개념에 대한 인식 또한 학생들의 인식과 마찬가지로 변수를 수를 국한하여 용어 그대로 해석하고 '변하는 수'라고 인식하는 경우가 많은 실정이다. 김남희(2009)는 교사들이 학생들에게 변수

를 지도할 때 변하는 대상이라는 변수의 본질을 가장 분명하게 설명할 수 있는 함수 관계에서도 변수 개념의 본질인 '변한다'의 의미를 충분히 부각시키지 못한 채 변수를 단지 여러 가지 값을 대입할 수 있는 문자로 설명하며 형식적인 기호로 다루고 있다고 하였다. 또한, 교사들은 변수 개념의 본질이나 변수의 의미 그리고 변수 도입의 필요성에 대한 자세한 설명을 하지 않은 채 단지 변수를 제한된 예를 통해 직접적으로 도입하고 학생들이 변수를 즉각적으로 이해하기를 바라면서 지나치게 간략한 설명에 그치고 있음을 지적하였다.

따라서 본 연구에서는 학생들이 문자 x 또는 y를 사용하여 표현하고 있는 방정식과 함수와 관련된 변수의 개념이나 변수의 의미를 어떻게 구별하고 있는지 알아보고자 한다.

2. 일차방정식과 일차함수

방정식이란 변수를 포함하는 등식이 변수의 값에 상관없이 항상 참인 경우를 항등식이라고 하고, 식에 포함된 변수의 값에 따라서 참 또는 거짓이 되는 식을 방정식이라고 한다. 현행 중학교 수학 1 교과서에서 방정식에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

"x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 대한 방정식이라고 한다. 이때 문자 x를 그 방정식의 미지수라 하고, 방정식을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 그 방정식의 해 또는 근이라고 한다. 그리고 이 방정식의 해를 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다. 방정식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (일차식)=0 의 꼴로 되는 방정식을 일차방정식이라고 한다.(중학교 수학1 (주)교학사)"

예를 들면, $2x+6=4x-2$는 x에 대한 일차방정식이고, $4-2y=y+1$는 y에 대한 일차방정식이다. 또한, $y=3x+4$와 $2x+y-5=0$와 같은 방정식은 미지수가 2개인 일차방정식이다. x와 y를 포함한 방정식 $f(x,y)=0$이 주어졌을 때, 좌표평면에서 방정식의 해 (x,y)가 나타나는 점 전체가 하나의 직선으로 나타나면 방정식 $f(x,y)=0$을 직선의 방정식이라고 하고, 점 전체가 하나의 곡선으로 나타나면 방정식 $f(x,y)=0$을 곡선의 방정식이라고 한다. 예를 들면 방정식 $x^2+y^2=r^2$은 중심이 원점이고 반지름이 r인 원의 방정식이라고 한다. 일차방정식에 대한 인지적 장애와 관련해서 서종진(2009)은 일차방정식 문제에서 등호의 좌변에 변수가 있는 문항, 변수가 등호의 우변에 있는 문항과 변수가 등호의 좌변과 우변 모두에 있는 문항에 대한 학생들의 반응을 조사한 결과 조사학생들의 약 30% 이상의 학생들이 등호관계를 이해하지 못하고 있다고 하였다. 또한, 일차방정식 문제에서 등호의 좌변에 변수가 있는 일차방정식보다 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식을 해결하는데 어려움을 겪고 있다고 하였다. 이는 중학교 1학년 학생들은 주로 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식보다 등호의 좌변에 변수가 있는 문항을 많이 접하기 때문에 변수가 우변에 있는 일차방정식을 해결할 때 오류를 범할 가능성이 높다고 할 수 있다(서종진, 2009).

두 변수 x와 y 사이에서 x의 값이 정해지면 따라서 y값이 정해지는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라 하고 x를 독립변수, y를 종속변수라고 한다. 이때, $x=a$로 되는 함수값을 $f(a)$ 등으로 나타낸다. 현행 중학교 수학 1 교과서에서 함수에 대해서는 다음과 같이 기술하고 있다.

"여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 변수라고 한다. 두 변수 x와 y 사이에서 x의 값이

변할 때, 각각의 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하면, y를 x의 함수라고 한다. y는 x의 함수이고 y가 x의 식 $f(x)$로 주어질 때, 이 함수를 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타낸다.(중학교 수학1 천재교육)”

그러나 모든 함수는 $y=f(x)$의 형태로 정의되지 않는다. 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$과 같이 두 변수의 관계로 정의될 수도 있다. 방정식 $x^2+y^2=r^2$은 하나의 함수 $y=f(x)$의 형태는 아니지만 두 개의 함수 $y=\sqrt{r^2-x^2}$과 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$로 나타낼 수 있다. $y=f(x)$의 형태의 식을 양함수(explicit function)라고 하고, 두 변수 x와 y의 관계식 $g(x,y)=0$에 대하여 x의 함수 f가 존재해서 $g(x,f(x))=0$을 만족하는 방정식 $g(x,y)=0$이 정의하는 함수를 음함수(implicit function)라고 한다. 모든 음함수가 유일한 양함수를 정의할 수 있는 것은 아니다. 이론적으로 음함수로부터 양함수가 존재한다는 것을 알 수 있지만 대수적으로 그 양함수를 구할 수 없는 함수도 있다. 예를 들면, $x^6+x^2y^3-y^5=0$은 이론적으로는 양함수를 정의하지만 y에 대한 5차 방정식을 대수적으로 풀 수 없다. 또한 모든 x와 y의 방정식이 양함수를 정의할 수 있는 것은 아니다. 예를 들면 $x^2+y^2=-1$은 양함수 $y=f(x)$를 갖지 않는다. 방정식 $x^2+y^2=a^2(a>0)$의 그래프는 모든 점에서 접선을 갖는다. 그리고 양함수를 구할 수도 있다. 하지만 모든 방정식에서 항상 양함수를 구하는 것은 불가능하다. 모든 방정식을 함수로 표현할 수 있는 것은 아니다. 예를 들면 방정식 $x^2+y^2=-1$은 함수로 표현할 수 없다.

일차방정식 $ax+by+c=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$는 x의 여러 값에 대한 y의 값을 구하면 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 대응 관계($y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$)가 있다는 것을 알 수 있고, y의 값이 변함에 따라 x의 값이 하나씩 정해지는 대응 관계($x=-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}$)가 있다고 볼 수도 있다. 따라서 일차방정식 $x+y+a=0$은 방정식이면서 일차함수이다.

또한, 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서 우변을 이항하면 $ax+by+c=0$인 방정식으로 나타낼 수 있기 때문에 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$는 함수이면서 일차방정식이다. 보통 방정식으로 나타낼 때에는 $ax+by+c=0$꼴로 나타내고, 함수로 나타낼 때는 $y=ax+b$꼴로 나타낸다. 그러나 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$이 아닌 $ax+b=0(a\neq 0)$의 경우 x(또는 y)에 대한 일차함수로 표현할 수 없다.

함수학습과 관련된 인식론적 장애는 수학을 배우는 과정에서 불가피하게 나타나는 현상으로 학생들이 성장하면서 어려움을 극복해 나가는 것으로 보는 관점과 학생들의 수학적 성장을 심각하게 방해하는 관점이 있는데 최근에는 학생들이 학습과정에서 겪는 어려움에 대해 긍정적인 관점으로 받아드리는 경향이 있다(김남희 외, 2011). 함수에 대한 인식론적 장애는 변하는 대상의 인식에 대한 어려움, 독립변수와 종속변수의 구분, 함수와 비례 관계의 구분, 함수와 인과 관계의 구분, 함수와 함수 사이의 다양한 표현 사이의 구분, 변수 개념의 확장 등이 있다(Sierpinska, 1992). 학생들의 함수학습 과정에서 나타나는 어려움은 개념 이미지와 개념 정의의 불일치에서 비롯된다고 할 수 있다(Vinner, 1992). 개념 정의는 수학의 형식적인 정의를 의미하며 개념 이미지는 개념 이름과 더불어 마음속에 연상되는 비언어적 실체를

의미하는 것으로 학생들은 개념 정의보다는 개념 이미지에 의해 많은 영향을 받는 경향이 있다. 학생들의 함수에 대한 개념 이미지는 함수라는 말을 들었을 때 떠오르는 것으로 $y=f(x)$라는 식일 수도 있고, 함수의 그래프일 수도 있다.

일차함수에 대한 대수적 표현과 관련한 인식론적 장애로 우미령(2005)은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 한 연구에서 학생들은 함수를 하나의 체계적인 규칙이나 공식으로 보는 경향이 강하고 '$y=$대수식'과 같은 기호 표현으로 보는 경향이 있다고 하였고, 오윤희(2006)는 중학교 2학년 학생들은 식으로 나타낼 수 있는 관계와 분수식, 이차식이 아닌 일차식으로 나타낼 수 있는 관계만을 학생들이 함수로 생각하며 식 '$y=$' 꼴만이 함수라고 인식한다고 하였다. 일차함수에 대한 그래프와 관련하여 오윤희(2006)는 중학교 2학년 학생들은 직선이나 식으로 나타낼 수 있는 그래프만이 함수의 그래프로 인식한다고 하였고, 이나현(2009)은 학생들은 일차함수를 판별하는데 일차함수의 개념정의 보다는 일차함수의 그래프가 직선 모양이라는 개념이미지에 의해 많은 영향을 받고 있다고 하였다.

따라서 본 연구는 중학생들이 일차함수에 대한 대수적 표현인 '$y=$' 꼴만이 함수라고 인식하는 것과 같이 일차방정식도 대수적 표현에만 의존하여 인식하고 있는지, 일차방정식에서 x 이외의 미지수를 사용하여 표현한 일차방정식과 대수적으로 다양하게 표현한 일차방정식의 인식은 어떠한지에 대해 연구하고자 한다. 또한, 대수적으로 다양하게 표현한 함수에 대한 인식은 어떠한지, 개념이미지에 의존하여 직선으로 표현되는 함수를 일차함수의 그래프로 인식하고 있는지 등과 관련된 문제에 대해 연구하고자 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 참여자

방정식과 함수는 학교수학에서 중요한 내용요소이지만 학생들은 중학교에서 학교대수를 접했을 때 방정식과 함수 모두 문자 x 또는 y를 사용하여 식을 표현하고 있고, 방정식의 경우 방정식을 만족하는 해를 구하는데 문자를 사용하고 있고, 함수의 경우 함수식을 만족하는 함숫값을 찾는 데 문자를 사용하고 있기 때문에 방정식과 함수를 구별하는데 어려움을 겪고 있다.

본 연구는 대수적인 관점에서 중학생들의 일차방정식과 일차함수의 개념에 대한 인식과 오류를 조사하기 위하여 전라남도 M시에 있는 N중학교 2학년 학생 163명과 3학년 학생 103명 총 266을 연구 대상자로 선정하였다. 일차방정식과 일차함수에 대한 인식론적 장애가 학년별로 어떻게 나타나는지 알아보기 위하여 중학교 2, 3학년 학생들의 인식을 조사하였다. 또한, 학생들의 함수와 방정식의 개념에 대해 어려워하는 원인이 교과서의 기술하는 내용인지 파악하기 중학교 1, 2학년 수학 교과서와 교사용 지도서를 조사하였다.

2. 연구 방법

본 연구에서는 중학생들의 방정식과 함수 개념에 대한 오개념의 원인을 조사하기 위하여 방정식과 함수 단원에 대한 현행 중학교 1, 2학년 수학 교과서와 교사용 지도서 6종을 분석

하였다. 또한, 중학생들의 방정식과 함수 개념에 대한 인식과 오류를 조사하기 위하여 중학교 1, 2학년에서 학습했던 방정식과 함수와 관련된 내용으로 설문 문항을 구성하여 설문조사를 실시하였다.

3. 연구 절차

1) 설문 문항 개발

본 연구는 중학생들이 일차함수에 대한 대수적 표현인 '$y=$' 꼴만이 함수라고 인식하는 것과 같이 일차방정식도 대수적 표현에만 의존하여 인식하고 있는지, 일차방정식에서 x 이외의 미지수를 사용하여 표현한 일차방정식과 대수적으로 다양하게 표현한 일차방정식의 인식은 어떠한지, 대수적으로 다양하게 표현한 함수에 대한 인식은 어떠한지, 개념이미지에 의존하여 직선으로 표현되는 함수를 일차함수의 그래프로 인식하고 있는지 등에 대하여 알아보기 위하여 다음과 같은 설문 문항을 개발하였다.

첫 번째 문제는 일차방정식과 관련된 문제로 대수적으로 다양하게 표현된 일차방정식에 대한 학생들의 인식을 알아보기 위하여 'x에 관한 식=0', x 이외의 다른 문자를 미지수로 사용하여 표현한 일차방정식, 등호의 양쪽에 미지수가 있는 일차방정식과 미지수가 2개인 일차방정식 등으로 문항을 구성하였다. 중학생들이 일차함수에 대한 대수적 표현인 '$y=$' 꼴만이 함수라고 인식하는 것과 같이 일차방정식도 대수적 표현(x에 관한 식=0)에만 의존하여 인식하고 있는지 알아보기 위하여 $3x+1=7$을, x 이외의 다른 문자를 사용한 방정식을 일차방정식으로 인지하고 있는지 조사하기 위하여 $4-2y=y+1$을, $y=3x+4$의 경우 미지수가 2개인 일차방정식으로 인식하는지 아니면 대수적인 표현('$y=x$에 관한 식')에 의존하여 일차함수로 판단하는지 조사하기 위하여 보기로 선정하였다.

두 번째 문제는 함수와 관련된 문제로 학생들의 일차함수에 대한 인식을 알아보기 위하여 대수적으로 다양하게 표현된 함수 중 일차함수인 것을 모두 선택하도록 하였다. 중학생들은 일차함수에 대해 '$y=x$에 관한 식' 꼴만이 함수라고 인식하는 경향이 있으므로(우미령, 2005; 오윤희, 2006) $2x+y-5=0$을 일차함수로 판단하는지 조사하기 위하여 보기로 선정하였다. 학생들은 일차함수를 판별하는데 일차함수의 개념정의보다는 일차함수의 그래프가 직선 모양이라는 개념이미지에 의해 많이 의존하여 판단하기 때문에(이나현, 2009) $y=k$(k는 상수)와 같은 상수함수의 그래프는 직선으로 표현되므로 $y=3$을 보기도 들었다. 또한, 교과서에서 함수 $y=f(x)$에서 $y=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)와 같이 y가 x에 관한 일차식으로 나타내어질 때 일차함수라고 정의하고 있는데 이러한 함수의 정의를 학생들이 인지하는지를 알아보기 위하여 $y=\dfrac{1}{x}$, $3x+1=7$을 보기로 선정하였다.

세 번째 문항은 일차방정식과 일차함수와 관련된 문제로 학생들이 일차방정식과 일차함수를 개념정의로 판단하는지 개념이미지로 판단하는지 알아보기 위하여 '$y=\sim$는 함수이다', '$\sim=0$는 방정식이다', '모든 일차방정식은 일차함수이다', '모든 일차함수는 일차방정식이다'와 같은 문항을 보기로 들었다.

마지막 문항은 방정식과 함수와 관련된 문항으로 학생들이 방정식과 함수를 교과서의 정의로 구분하는지, 대수적 표현으로 구분하는지를 알아보기 위하여 '함수는 등식의 좌변이 y이고 우변이 x에 관한 식이고, 방정식은 등식의 좌변이 x(또는 y)에 관한 식이고 우변이 0

이다', '함수에서 x는 변수이고, 방정식에서 x는 미지수이다', '함수는 두 변수 사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이다'와 '$y=ax+b(a\neq 0)$가 두 양 사이의 관계 학습에서는 함수이고, 문제해결과정의 학습에서는 방정식이다' 중에서 선택하는 문항으로 문제를 구성하였다.

2) 자료 수집

중학생들의 방정식과 함수 개념에 대한 인식과 오류를 조사하기 위하여 M시의 신도심에 있는 N중학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 본 연구자는 연구대상자들에게 직접 설문 조사에 대한 목적과 설문 문항에 대하여 설명하였으며 설문조사는 2, 3학년 학생들을 대상으로 2015년 2월 10일~12일에 설문 조사를 실시하여 설문 자료를 수집하였다.

3) 자료 분석

방정식과 함수 개념에 중학생들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 실시한 중학교 2, 3학년 학생들의 설문 답안을 바탕으로 방정식과 함수와 관련된 인식과 오류의 형태에 대하여 설문자료에 대해 통계처리를 실시하였고, 일차방정식과 일차함수에 대한 중학교 2, 3학년 학생들의 인식의 차를 비교하기 위하여 정답율의 차이를 비교·분석하였다. 중학교 2학년의 학생수를 n_1, 문제를 맞힌 학생수를 X, 중학교 3학년의 학생수를 n_2, 문제를 맞힌 학생수를 Y, 중학교 2학년 학생들의 정답률을 $\widehat{p_1}$, 중학교 3학년 학생들의 정답률을 $\widehat{p_2}$, 공통의 모비율을 $\hat{p}=\dfrac{X+Y}{n_1+n_2}$, 귀무가설은 H_0: $p_1=p_2$, 대립 가설은 H_1: $p_1>p_2$로 하여 다음과 같은 검정통계량을 사용하여 Z-검정을 실시하였다.

$$Z=\frac{(\widehat{p_1}-\widehat{p_2})}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$$

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 방정식과 함수에 대한 교과서 분석

방정식과 관련된 교과서의 지도계통을 살펴보면, 중학교 1학년 문자와 식 단원에서 일차방정식에 대하여, 중학교 2학년 방정식과 부등식 단원에서 미지수가 2개인 연립일차방정식에 대하여, 중학교 3학년 문자와 식 단원에서 이차방정식에 대하여, 고등학교 수학 Ⅰ의 방정식과 부등식 단원에서 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식에 대하여 다루고 있다(<표 Ⅳ-1>).

각 교과서를 살펴보면 중학교 수학 1의 문자와 식 단원에서 문자의 사용과 더불어 일차식

의 계산을 학습한 후, 이를 바탕으로 방정식의 개념과 해에 대해 학습한다. 중학교 수학 1에서 방정식의 개념에 대해 설명할 때 '문자 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 대한 방정식이라고 하고, 이때 문자 x은 그 방정식의 미지수, 방정식을 참이 되게 하는 미지수의 값을 그 방정식의 해 또는 근이라고 한다(류희찬 외, 2013)'고 기술하고 있고, 일차방정식과 관련된 교사용 지도서의 지도상의 유의점에는 '미지수가 x인 일차방정식을 x에 관한 일차방정식, 미지수가 y인 일차방정식을 y에 관한 일차방정식이라고 한다(우정호 외, 2013a)'고 기술하고 있다. 그런데 중학교 수학 1 교과서에서 방정식의 개념과 해에 대해 설명하면서 x에 대한 식을 예로 들어 설명하고 하고 있고, 방정식의 해를 구하라는 예제와 문제들 역시 모두가 x에 대한 방정식들로 구성되어 있다(고호경 외, 2013; 류희찬 외, 2013; 우정호 외, 2013b, 이준열 외, 2013). 물론 교수・학습상황에서 미지수가 y(또는 다른 문자)를 사용한 일차방정식을 예를 들어 설명하면서 y(또는 다른 문자)에 관한 일차방정식이라고 설명할 수 있지만 교과서의 내용에는 y(또는 다른 문자)에 관한 일차방정식의 예와 문제를 거의 찾아볼 수 없다. 또한, 교과서에서 '방정식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (x에 대한 일차식)=0의 꼴로 되는 방정식을 일차방정식이라고 한다'고 기술하고 있다(고호경 외, 2013; 류희찬 외, 2013; 우정호 외, 2013b, 이준열 외, 2013). 이와 같이 교과서에서 방정식과 관련된 설명이나 문제들을 x에 대한 일차식의 형태로 표현하고 있기 때문에 학생들은 x가 아닌 y(또는 다른 문자)를 사용하여 표현한 일차방정식을 방정식으로 인식하지 못할 수도 있다. 또한, 일차방정식 (x에 대한 일차식)=0과 관련하여 교사들이 교수・학습상황에서 학생들에게 '～=0'로 표현되는 식을 방정식이라고 강조하여 설명하는 경우 학생들이 방정식과 관련된 오개념이 생길 수도 있다.

<표 Ⅳ-1> 방정식과 관련된 교과서 지도계통

	초등학교		수학 1		수학 2		수학 3		수학 Ⅰ
단원		⇒	문자와 식	⇒	방정식과 부등식	⇒	문자와 식	⇒	방정식과 부등식
내용			일차방정식		미지수가 2개인 연립 일차방정식		이차방정식		이차방정식의 판별식 이차방정식의 근과 계수와의 관계 여러 가지 방정식

함수와 관련된 교과서의 지도계통을 살펴보면, 중학교 1학년 함수 단원에서 함수의 개념과 함수와 그래프에 대하여, 중학교 2학년 일차함수 단원에서 일차함수의 의미와 그래프, 일차함수와 일차방정식과의 관계에 대하여, 중학교 3학년 이차함수 단원에서 이차함수의 의미와 이차함수의 그래프의 성질에 대하여, 고등학교의 수학 Ⅱ 함수 단원에서 함수, 유리함수와 무리함수에 대하여 다루고 있다(<표 Ⅳ-2>).

함수와 관련된 각 교과서를 살펴보면, 중학교 수학 1의 함수 단원에서 함수의 뜻, 함수의 표현과 함수의 그래프의 개념을 다루고 있다. 중학교 수학 1에서 함수의 개념을 도입하면서 " … 상자에 넣는 공의 개수를 x, 상자의 개수를 y라 하면 x와 y는 여러 값을 가질 수

있다. 이와 같이 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 변수라고 한다. … 일반적으로 두 변수 x와 y 사이에서 x의 값이 변할 때, 각각의 x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 대응관계가 성립하면, y를 x의 함수라고 한다. … 이와 같이 y는 x의 함수이고 y가 x의 식 $f(x)$로 주어질 때, 이 함수를 $y=f(x)$와 같이 나타낸다.”

와 같이 실생활과 관련된 여러 가지 문제 상황을 제시한 후 변수의 개념을 먼저 설명하고, 변수를 이용하여 함수의 개념을 설명하고 있다(이준열 외, 2013). 함수를 $y=f(x)$ 형태의 표현과 관련하여 중학교 수학 1의 함수 단원에 대한 교사용 지도서의 지도상의 유의점에는 ‘정비례, 반비례 상황을 중심으로 함수를 도입하는 경우에 학생들은 식이 $y=ax$, $y=\frac{a}{x}$ 꼴이 아니면 함수가 아니라고 생각할 수 있다. 따라서 정비례, 반비례 이외의 상황에서 함수가 되는 예를 충분히 보여 주어 함수 개념을 폭넓게 이해하게 한다’라고 기술하고 있다(우정호 외, 2013a). 그러나 교사가 교수・학습상황에서 정비례, 반비례 이외의 다양한 상황에서 함수가 되는 예를 충분히 보여 주지 못할 경우 학생들은 $y=f(x)$의 형태로 표현하지 않은 함수를 함수로 인식하지 못할 수도 있다.

<표 Ⅳ-2> 함수와 관련된 교과서 지도계통

	초등학교		수학 1		수학 2		수학 3		수학 Ⅱ
단원		⇒	함수	⇒	일차함수	⇒	이차함수	⇒	함수
내용	규칙과 대응 정비례와 반비례		함수와 그래프		일차함수와 그래프 일차함수와 일차방정식의 관계		이차함수와 그래프		함수 유리함수와 무리함수

중학교 2학년 일차함수와 그래프 단원에서는 일차함수의 뜻과 일차함수의 그래프에 대하여 다루고 있다. 일차함수의 그래프는 함수 $y=ax$의 그래프가 원점을 지나는 직선의 형태로 나타내는 것으로부터 $y=ax+b$의 그래프는 $y=ax$의 그래프를 y축 방향으로의 평행이동하는 것만을 다루며 일차함수의 그래프에서는 다양한 형태의 일차함수를 좌표평면에 나타내는 방법에 대하여 학습한다. 그런데 학생들은 일차함수 $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프가 직선의 형태로 나타나는 것으로부터 어떤 함수가 직선의 형태로 표현되면 그 함수가 일차함수라고 생각하는 경우도 있다. 이와 관련하여 교사용 지도서의 지도상의 유의점에는 ‘일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프는 일차함수의 그래프가 아님에 유의하도록 한다’라고 기술하고 있다. 그러나 학생들은 직선으로 표현되는 모든 함수가 일차함수라고 생각하여 $x=p$, $y=q$와 같은 상수함수의 그래프가 직선으로 나타내지므로 일차함수라고 생각할 수도 있다.

중학교 2학년 함수단원에서 연립일차방정식의 해와 일차함수의 그래프 사이의 관계에서 연립일차방정식

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \quad (a\neq 0,\ a'\neq 0,\ b\neq 0,\ b'\neq 0)$$

의 해는 두 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, $y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'}$의 그래프의 교점과 같다는 것을 학습한다. 연립일차방정식의 해와 일차함수의 그래프 사이의 관계와 관련된 교과서 내용을 살펴보면,

"연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$을 풀면 그 해는 $x=3$, $y=2$이다. 한편, 두 일차방정식 ㉠, ㉡을 각각 y에 관하여 풀면 $\begin{cases} y=-x+5 & \cdots ㉢ \\ y=2x-4 & \cdots ㉣ \end{cases}$이고, 두 일차함수 ㉢, ㉣의 그래프는 그림과 같이 점 (3, 2)에서 만난다."

와 같이 기술하고 있다(이강섭 외, 2014). 이와 같은 표현에서 학생들은 식의 형태에 따라 직관적으로 식의 형태가 '~=0'이면 방정식으로 '$y=$'이면 함수라고 생각할 수도 있다. 학생들은 방정식과 함수를 구분할 때 교과서에 나와 있는 방정식과 함수의 정의로부터 방정식과 함수를 구분하기 보다는 식의 형태 즉, $ax+by=c(a\neq 0,\ b\neq 0)$의 형태로 표현된 식을 방정식으로 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$로 표현된 식을 함수로 구분할 수도 있다.

2. 방정식과 함수에 대한 학생들의 인식과 오류

방정식과 함수의 개념에 대한 학생들의 인식과 오류를 분석하기 위하여 중학교 2학년 학생 163명과 3학년 학생 103명 총 266명의 학생을 대상으로 방정식과 함수와 관련된 문제에 대하여 조사를 실시하였다. 먼저, 일차방정식에 대한 학생들의 인식과 오류에 대하여, 일차함수에 대한 인식과 오류에 대하여 살펴보고, 일차방정식과 일차함수에 대한 인식과 오류에 대하여 살펴보고자 한다.

1) 일차방정식에 대한 중학생들의 인식과 오류

[문제 1]은 방정식과 관련된 문항으로 다음 중 일차방정식인 것을 모두 선택하는 문제이다.

① $4-2y=y+1$ ② $2x+6=4x-2$ ③ $3x+1=7$ ④ $3x-y=4$ ⑤ $2x+y-5=0$

[문제 1]의 일차방정식인 것을 모두 선택하라는 문제의 응답 결과 정답을 모두 맞힌 학생들은 전체 266명 중 33명(2학년 28명, 3학년 5명)으로 조사되었다. 2학년 학생들의 경우 ④와 ⑤를 선택한 학생은 33명으로 가장 많은 학생들이 정답으로 선택하였고, 3학년 학생들의 경우 26명의 학생들이 ①, ②, ③을 정답으로 가장 많이 선택하였다(<표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>).

<표 Ⅳ-3> [문제 1]에 대한 2학년 학생들의 응답 결과

문항번호	③	①②③	①②③④⑤	③④	④⑤	기타	계
1	11	18	28	12	33	61	163

<표 Ⅳ-4> [문제 1]에 대한 중학교 3학년 학생들의 응답 결과

문항번호	①	③	①②③	②③	④⑤	기타	계
1	8	8	26	12	16	33	103

[문제 1]에 대한 중학교 2, 3학년 학생들의 정답률에 차이가 있는지를 통계적으로 조사하기 위하여 2학년 학생들의 정답률을 $\widehat{p_1}$, 중학교 3학년 학생들의 정답률을 $\widehat{p_2}$로 하여 Z-검정($\alpha = 0.01$)을 실시한 결과 비율의 차를 이용한 검정 통계량의 값 z=2.928이 표준정규분포의 한쪽이 99%인 z=2.33보다 커 고도로 유의적(**)이라 할 수 있다. 즉, 2학년 학생들의 정답률이 3학년 학생들의 정답률보다 높다고 할 수 있다.

<표 Ⅳ-5> [문제 1]에 대한 학생들의 정답률에 대한 검정 결과

문제	$\widehat{p_1}$	$\widehat{p_2}$	$\hat{p}$	z 값	유의확률
1	0.172	0.049	0.124	2.928	0.9983**

[문제 1]에 대한 중학교 2, 3학년 학생들의 각각의 항목별 응답 결과는 <표 Ⅳ-6>와 같다. <표 Ⅳ-6>에서 보는 바와 같이 2학년 학생들은 일차방정식으로 ④, ③, ⑤ 순으로, 3학년 학생들은 ③, ②, ④ 순으로 많이 선택하였고, 전체적으로 ③을 가장 많이 선택하였고, ①은 상대적으로 가장 작은 수의 학생들이 선택하였다.

<표 Ⅳ-6> [문제 1]에 대한 학생들의 응답 결과

	①	②	③	④	⑤	계
2학년	64(15.5)	80(19.4)	90(21.8)	94(22.8)	84(20.4)	412(100)
3학년	44(19.6)	58(25.9)	57(25.4)	38(17.0)	27(12.1)	224(100)
계	108(17.0)	138(21.7)	147(23.1)	132(20.8)	111(17.5)	636(100)

중학교 2, 3학년의 응답 결과를 비교해 보면, 2학년의 경우 3학년보다 ④와 ⑤를 상대적으로 많이 선택한 반면 3학년들은 2학년보다 ①, ②, ③을 많이 선택하였다. 2학년이 3학년보다 ④와 ⑤를 상대적으로 많이 선택한 이유는 중학교 수학에서 방정식과 관련된 내용 중 2학년 교과서에 미지수가 2개인 방정식과 연립방정식과 관련된 내용이 포함되어 2학년 학생들이 최근에 이와 관련된 내용을 학습했기 때문에 이와 같은 결과가 나타난 것으로 판단된다(<표 Ⅳ-5>, <표 Ⅳ-6>).

또한, 전체적으로 많은 학생들이 $3x+1=7$을 일차방정식으로 생각한 반면, $4-2y=y+1$은 y에 대한 일차방정식임에 불구하고 일차방정식이 아닌 것으로 판단한 이유는 앞의 교과서 분석에서 나타난 바와 같이 중학교 수학 교과서의 일차방정식과 관련된 내용들이 x를 미지수로 하여 설명하고 있고 문제들 또한 x에 방정식 형태로만 표현하고 있어 x가 아닌 다른 문자인 y를 사용하여 표현한 방정식을 일차방정식으로 인식하지 못한데서 기인한 결과로 보인다.

2) 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류

[문제 2]는 함수와 관련된 문항으로 다음 중 일차함수인 것을 모두 선택하는 문제이다.

① $y=3x-2$　② $y=3$　③ $y=\dfrac{1}{x}$　④ $3x+1=7$　⑤ $2x+y-5=0$

[문제 2]의 일차함수인 것을 모두 선택하라는 문제의 복수 응답 결과 정답을 모두 맞힌 학생들은 전체 266명 중 101명(2학년 60명, 3학년 41명)으로 조사되었다. 2학년 학생들의 경우 ①과 ⑤를 선택한 학생은 60명으로 가장 많은 학생들이 정답으로 선택하였고, 3학년 학생들의 경우 41명의 학생들이 ①과 ⑤를 정답으로 가장 많이 선택하였다(<표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8>). [문제 2]에 대한 중학교 2, 3학년 학생들의 정답률에 차이가 있는지를 통계적으로 조사하기 위하여 Z-검정을 실시한 결과 비율의 차를 이용한 검정 통계량의 값 z=0.6879로 나타나 통계적으로 정답률에 차이가 없는 것으로 조사되었다.

<표 Ⅳ-7> [문제 2]에 대한 2학년 학생들의 응답 결과

문항번호	①	④	⑤	①⑤	기타	계
2	11	11	10	60	71	163

<표 Ⅳ-8> [문제 2]에 대한 3학년 학생들의 응답 결과

문항번호	①	③	①③⑤	①⑤	기타	계
2	15	10	8	41	29	103

<표 Ⅳ-9> [문제 2]에 대한 학생들의 응답 결과

	①	②	③	④	⑤	계
2학년	107(35.3)	37(12.2)	25(8.3)	38(12.5)	96(31.7)	303(100)
3학년	74(39.8)	16(8.6)	22(11.8)	15(8.1)	59(31.7)	186(100)
계	181(37.0)	53(10.8)	47(9.6)	53(10.8)	155(31.7)	489(100)

[문제 2]에 대한 중학교 2, 3학년 학생들의 각각의 항목별 응답 결과는 <표 Ⅳ-9>와 같다. <표 Ⅳ-9>에서 보는 바와 같이 2학년 학생들은 일차함수로 ①, ⑤, ④순으로 많이 선택하였고, 3학년 학생들도 ①, ⑤, ④순으로 많이 선택하였다. 전체적으로 ①을 가장 많이 선택하였고, ③은 상대적으로 가장 작은 수의 학생들이 선택하였다.

[문제 2]에 대한 학생들의 각 항목별 응답 결과를 살펴보면 $y=3x-2$를 일차함수로 선택한 학생이 가장 많았고, 그 다음으로 $2x+y-5=0$을 선택한 학생이 많았다. $y=3x-2$의 경우 일차함수의 일반적인 형태인 $y=ax+b(a\neq 0)$의 형태를 하고 있어 학생들이 쉽게 일차함수라고 인식할 수 있는 반면 $2x+y-5=0$의 경우는 미지수가 2개인 일차방정식의 형태임에도 불구하고 학생들은 형태($\sim=0$)에 의존하여 일차방정식으로 판단하지 않고 일차함수로 생각하는 학생이 많음은 확인할 수 있었다. 이는 학생들이 직관적으로 일차함수라고

판단하였다기보다는 중학교 2학년 함수단원에서 연립일차방정식의 해와 일차함수의 그래프 사이의 관계에서 연립일차방정식

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \quad (a \neq 0,\ a' \neq 0,\ b \neq 0,\ b' \neq 0)$$

의 해는 두 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, $y=-\dfrac{a'}{b'}x-\dfrac{c'}{b'}$의 그래프의 교점과 같다는 것으로부터 일차함수라고 판단했을 것이라고 추측된다. 한편, $y=3$과 $3x+1=7$을 일차함수라고 판단하는 학생들의 수가 거의 똑같이 나타나고 있다. 이는 $y=3$을 일차함수라고 판단하는 학생들은 $3x+1=7$도 일차함수라고 판단하고 있음을 알 수 있다. 이는 앞의 교과서 분석에서 언급한 바와 같이 학생들은 일차함수 $y=ax+b(a \neq 0)$의 그래프가 직선의 형태로 나타나는 것으로부터 그래프가 직선으로 표현되면 일차함수라는 잘못된 개념이미지가 생겨 상수함수 $x=p$, $y=q$의 그래프가 직선이므로 일차함수라고 생각하는 오개념이 생길 수도 있다.

3) 일차방정식과 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류

[문제 3]은 방정식과 함수와 관련된 문제로 다음 문장 중 옳은 문장을 모두 선택하는 문제이다.

① $y=\sim$는 함수이다. ② $\sim=0$는 방정식이다.
③ 모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다.
④ 모든 일차 함수는 일차방정식의 형태로 표현할 수 있다.

[문제 3]의 옳은 문장을 선택하라는 문제에서 일차함수인 것을 모두 선택하라는 문제의 복수 응답 결과 2학년 학생들의 경우 ③을 정답으로 선택한 학생이 29명으로 가장 많았고, 3학년 학생들도 ③을 정답으로 선택한 학생이 29명으로 가장 많았다(<표 Ⅳ-10>, <표 Ⅳ-11>).

[문제 3]에 대한 학생들의 각 항목별 응답 결과를 살펴보면, 중학교 2학년 학생들의 경우 '모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다'라는 응답이 가장 많았고, 그 다음으로 '$y=\sim$는 함수이다'라는 응답이 많았다. 중학교 3학년 학생들의 응답 결과를 보면 '모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다'라는 응답이 가장 많았고, '모든 일차 함수는 일차방정식의 형태로 표현할 수 있다'라는 응답이 다음으로 많았음을 볼 수 있다(<표 Ⅳ-12>). 전체적으로도 '모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다'라는 응답이 가장 많게 조사되어 많은 학생들이 일차방정식을 일차함수 형태로 표현할 수 있다고 인식하는 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-10> [문제 3]에 대한 2학년 학생들의 응답 결과

문항번호	①	②	③	④	①②	①②③④	①④	③④	기타	계
3	13	11	29	12	18	14	15	17	34	163

<표 Ⅳ-11> [문제 3]에 대한 3학년 학생들의 응답 결과

문항번호	①	②	③	④	①②	①③	②③	②④	기타	계
3	15	6	24	15	14	8	7	6	8	103

<표 Ⅳ-12> [문제 3]에 대한 학생들의 응답 결과

	①	②	③	④	계
2학년	77(24.9)	66(21.4)	93(30.1)	73(23.6)	309(100)
3학년	40(26.5)	23(15.2)	45(29.8)	43(28.5)	151(100)
계	117(25.4)	89(19.3)	138(30.0)	116(25.2)	460(100)

미지수가 2개인 일차방정식은 일차함수의 형태로 표현할 수 있지만 미지수가 하나인 일차방정식($ax+b=0$, $a \neq 0$)은 일차함수의 형태로 표현할 수 없음에도 불구하고 많은 학생들이 '모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다'라고 잘못 인식하고 있음을 알 수 있다. 이는 중학교 2학년 교과서의 '일차함수와 일차방정식의 관계' 단원에서 'x, y의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0(a \neq 0,\ b \neq 0)$의 해는 무수히 많고 해의 순서쌍 ($x$, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 또한, 이 식을 y에 관하여 풀면 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$이고, 이 일차함수의 그래프는 y절편이 $-\dfrac{c}{b}$, 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$이므로 직선이 된다.'와 같이 기술하고 있는데 학생들은 미지수가 2개인 일차방정식의 해의 그래프와 이 일차방정식을 일차함수의 형태로 표현했을 때 일차함수의 그래프와 같다는 사실을 잘못 이해하여 모든 일차방정식은 일차 함수의 형태로 표현할 수 있다는 오개념이 생긴 것으로 보인다.

[문제 4]는 방정식과 함수의 가장 큰 차이점이 무엇이라고 생각하는지 다음 중 선택하라는 문제이다.

① 함수는 등식의 좌변이 y이고 우변이 x에 관한 식이고, 방정식은 등식의 좌변이 x(또는 y)에 관한 식이고 우변이 0이다.
② 함수에서 x는 변수이고, 방정식에서 x는 미지수이다.
③ 함수는 두 변수 사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이다.
④ $y=ax+b(a \neq 0)$이 두 양 사이의 관계 학습에서는 함수이고, 문제해결과정의 학습에서는 방정식이다.
⑤ 기타

[문제 4]의 함수와 방정식의 가장 큰 차이점이 무엇인지에 대한 물음에 중학교 2학년 학생들의 경우 '함수는 두 변수 사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이다'라고 응답한 학생이 71명으로 가장 많았고, '함수에서 x는 변수이고, 방정식에서 x는 미지수이다'라고 응답한 학생이 44명으로 그 다음으로 많은 것으로 조사되었다(<표 Ⅳ-13>). 중학교 3학년 학생들의 경우 '함수는 두 변수

사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이다'라고 응답한 학생이 47명으로 가장 많았고, 그 다음으로 '함수는 등식의 좌변이 y이고 우변이 x에 관한 식이고, 방정식은 등식의 좌변이 x(또는 y)에 관한 식이고 우변이 0이다'라고 응답한 학생들이 26명으로 조사되었다.

<표 Ⅳ-13> [문제 4]에 대한 학생들의 각 항목별 응답 결과

	①	②	③	④	기타	계
2학년	28(15.6)	44(24.4)	71(39.4)	30(16.7)	7(3.9)	180(100)
3학년	26(22.8)	24(21.1)	47(41.2)	14(12.3)	3(2.6)	114(100)
계	54(18.4)	68(23.1)	118(40.1)	44(15.0)	10(3.4)	294(100)

전체적으로 살펴보면, '함수는 두 변수 사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이다'라고 응답한 학생들이 가장 많이 나타났는데 이는 교과서에서 방정식과 함수를 이와 같이 설명하고 있어서 이러한 응답이 많이 나타난 것으로 보인다. 2학년 학생들은 방정식과 함수의 차이점에서 '함수에서 x는 변수이고, 방정식에서 x는 미지수이다'라는 응답이 두 번째로 많은 반면, 3학년 학생들은 '함수는 등식의 좌변이 y이고 우변이 x에 관한 식이고, 방정식은 등식의 좌변이 x(또는 y)에 관한 식이고 우변이 0이다'라는 응답이 두 번째로 많은 것으로 조사되었다. 이는 방정식과 함수의 차이점을 2학년 학생들의 경우 변수의 의미로 판단하는 반면, 3학년 학생들은 식의 형태로 판단하고 있음을 알 수 있다. '$y = ax + b\,(a \neq 0)$이 두 양 사이의 관계 학습에서는 함수이고, 문제해결과정의 학습에서는 방정식이다'라고 응답한 학생들을 살펴보면 2학년 학생들의 응답은 30명(16.7%)인데 반해 3학년 학생들의 응답은 14명(12.3%)으로 상대적으로 적음을 알 수 있다. 기타 의견으로 소수의 학생들이지만 함수에는 y가 있고, 방정식에는 0이 있는 것 즉, y의 유무와 '~=0'의 형태로 함수와 방정식을 판단하는 학생들도 있었다. 이는 앞의 교과서 분석에서 언급한 바와 같이 방정식과 함수의 의미로 판단하기 보다는 식의 형태에 따라 직관적으로 '~=0'이면 방정식으로 '$y =$'이면 함수로 판단하는 것으로 여겨진다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 방정식과 함수에 대한 중학생들의 인식과 오류를 조사하기 위하여 M시에 있는 N중학교 2, 3학년 학생 266명을 대상으로 방정식과 함수와 관련된 문제에 대하여 조사를 실시하였다. 또한, 방정식과 함수에 대한 학생들의 오류의 원인을 찾기 위하여 현행 중학교 교과서의 내용을 분석하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 학생들은 일차방정식을 대수적 표현에만 의존하여 'x에 관한 식$=0$'만을 일차방정식으로 인식하는 경향이 있다. 우미령(2005)과 오윤희(2006)는 중학교 2, 3학년 학생들이 '$y=$대수식'과 같은 식으로 표현된 함수만이 함수라고 인식한다고 하였는데 'x에 관한 식$=0$'만을 일차방정식으로 인식하는 것으로 조사되었다. 일차방정식과 관련된 [문제 1]에서 $4-2y=y+1$을 일차방정식이라고 인식하는 학생들의 수가 x (또는 x와 y)에 관한 일차방정식을 방정식으로 인식하는 학생수보다 상대적으로 작게 나타났는데 이는 y에 관한 일차

방정식을 일차방정식이 아니라고 생각하는 학생들이 상대적으로 많음을 의미한다고 할 수 있다. 서종진(2009)은 중학교 1학년 학생들은 주로 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식보다 등호의 좌변에 변수가 있는 문항을 많이 접하기 때문에 변수가 우변에 있는 일차방정식을 해결할 때 오류를 범할 가능성이 높다고 하였다. 그러나 본 연구의 [문제 1]의 결과 2, 3학년의 경우 변수의 위치보다 변수로 어떤 문자가 사용되었는지에 더 큰 영향을 미친 것으로 조사되었다. 이는 중학교 수학 교과서의 모든 일차방정식과 관련된 설명이나 문제들이 x에 대한 식으로 표현하고 있어 학생들은 x 이외의 다른 문자 y를 사용한 일차방정식을 일차방정식이 아니라고 생각하는 경향이 있다고 할 수 있다.

둘째, 학생들은 상수함수 $y=p$를 일차함수라고 생각하는 경향이 있다. 개념 정의는 수학의 형식적인 정의를 의미하며, 개념 이미지는 개념 이름과 더불어 마음속에 연상되는 비언어적 실체를 의미한다(Vinner, 1992). 이나현(2009)은 학생들은 일차함수를 판별하는데 일차함수의 개념정의 보다는 일차함수의 그래프가 직선 모양이라는 개념이미지에 의해 많은 영향을 받고 있다고 하였는데 본 연구에서도 이와 같은 경향이 있는 것으로 조사되었다. 학생들은 일차함수 $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프가 직선의 형태로 나타나는 것으로부터 함수의 그래프가 직선으로 표현되면 이 함수는 일차함수라는 잘못된 개념이미지가 생겨 상수함수 $y=p$의 그래프가 직선이므로 일차함수라고 생각하는 학생들도 있었다. 즉, 일차함수에 대한 개념정의보다는 일차함수의 그래프가 직선이라는 개념 이미지에 의해 $y=p$가 일차함수라고 판단하는 학생들도 있었다. 박선화(1998)는 직관과 시각화에 의존하는 방식은 개념에 대한 정확한 수학적인 이해를 방해할 수 있다고 하였는데 이러한 그래프에 의한 직관이 학생들의 오개념의 원인이 되기도 한다.

셋째, 학생들은 식을 표현하는 형태에 의존하여 방정식과 함수를 구분하는 경향이 있다. $x+y+c=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$의 형태로 표현된 식에 대하여 대부분의 중학생들은 이 식을 방정식이라고 생각하고, $y=-x-c$의 형태로 표현된 식을 대부분의 학생들은 함수라고 생각한다. 이러한 방정식과 함수식의 구분은 교과서에 나와 있는 방정식과 함수를 문맥과 개념정의로 구분하기 보다는 식의 형태에 초점을 두고 즉, '$y=$'로 표현되는 식을 함수로, '~=0'으로 표현되는 식을 방정식으로 인식하는 경향이 있다. 이는 일차방정식의 일반적인 형태를 교과서에서 '(x에 대한 일차식)=0'로 기술하고 있고, 교수 · 학습상황에서 교사들이 학생들에게 '~=0'로 표현되는 식을 방정식이라고 강조하여 설명하는 경우 학생들이 방정식과 함수와 관련된 오개념이 생길 수도 있다.

넷째, 학생들은 방정식과 함수의 가장 큰 차이점에 대해 교과서의 개념정의에 의해 판단하는 경향이 두드러졌다. 학생들은 방정식과 함수의 가장 큰 차이점에 대해 함수는 두 변수 사이의 관계를 나타내는 식이고, 방정식은 미지수 x에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식이라고 생각하는 학생들이 많음을 볼 수 이었다. 또한, Usiskin(1988)의 대수학습과 관련한 변수의 의미로 $y=ax+b(a\neq 0)$이 두 양 사이의 관계 학습에서는 함수이고, 문제해결과정의 학습에서는 방정식라고 구분한 학생들도 다수 있었다.

위의 결론으로부터 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 중학교 교과서의 일차방정식과 관련된 내용을 설명하거나 문제에서 x에 대한 일차방정식뿐만 아니라 다른 문자를 사용하여 방정식을 설명할 필요가 있다. 방정식과 관련된 교과서의 설명이나 문제들이 모두 x에 대한 일차방정식만을 나타내고 있어 x 이외의 다른 문자를 사용한 방정식은 방정식이 아니라는 오개념을 생성시킬 수 있는 원인이 될 수 있어 이러한 오개념이 생기는 것을 방지하기 위하여 다양한 문자를 사용하여 방정식을 설명할 필

요가 있다.

둘째, 방정식과 함수를 설명할 때 식을 표현하는 형태를 강조하여 설명하기 보다는 다양한 문맥과 개념정의를 이용하여 설명할 필요가 있다. 방정식과 함수를 문맥과 개념정의로 보다는 '∼=0'으로 표현되는 식을 방정식으로, '$y=$'로 표현되는 식을 함수라고 강조하여 지도할 경우 방정식과 함수와 관련된 오개념이 생길 수도 있다.

셋째, 방정식과 함수와 관련된 학생들의 오개념의 원인이 학생이 교수・학습 상황에서 잘못 인지한 것인지, 아니면 교사의 잘못된 지도방법에 의한 것인지 좀 더 자세히 알아보기 위하여 방정식과 함수와 관련된 교사의 인식과 지도방법에 대해 연구할 필요가 있다.

참고 문헌

고호경 외 11인 (2013). 중학교 수학 1. (주)교학사.

김남희 (2009). 변수 개념의 분석 및 교수-학습. 경문사.

김남희・나귀수・박경미・이경화・정용옥・홍진곤 (2011). 수학교육과정과 교재연구. 경문사.

류희찬 외 9인 (2013). 중학교 수학 1. 천재교과서.

박선화 (1998). 수학적 극한개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

박정미・이중권 (2013). 동일한 수학적 상황에서 문제해결 능력 분석 연구-방정식・부등식과 함수를 중심으로-, 한국학교수학회논문집, 16(4), 883-898.

변희현・주미경 (2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 22(3), 353-370.

서종진 (2009). 일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구-중학교 1학년과 3학년을 중심으로-, 한국학교수학회논문집, 12(3), 267-289.

서종진 (2010). 문제 유형에 따른 풀이과정에서의 변화 -중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 반응을 중심으로 -, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(2), 445-474.

오윤희 (2006). 중학교 2학년 학생들이 함수 학습에서 겪는 인지적 장애에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

우미령 (2005). 중학생의 함수 개념 이해에 관한 연구: 함수의 표현방법에 따른 문제해결의 차이 비교. 고려대학교 대학원 석사학위논문.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교출판문화원.

우정호 외 16인 (2013a). 중학교 수학 1 교사용지도서. 두산동아.

우정호 외 16인 (2013b). 중학교 수학 1. 두산동아.

이강섭 외 10인 (2014). 중학교 수학 2. 미래앤.

이나현 (2009). 중학교 2학년 학생들의 일차함수 그래프 과제 해결능력. 한국교원대학교 대학원석사학위논문.

이종희・김부미 (2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 5(1), 115-133.

이준열 외 7인 (2013). 중학교 수학 1. 천재교육.

전영배 · 노은환 · 김대의 · 정찬식 · 김창수 · 강정기 · 정상태 (2010). 미지수가 2개인 연립일차 부등식의 문제해결과정에서 발생하는 오류 분석 및 지도방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(3), 543-562.

최은형 (2004). 함수의 그래프에 대한 이해와 오류 분석에 관한 연구-중학교 2학년을 대상으로-. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

Freudenthal, H. (1982). Variables and Functions, Paper presented at the Conference on Functions, Enschede, Holland.

Freudenthal, H. (1983). The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel Dordrecht.

Sajka, M. (2003). A Secondary School Student's Understanding of the concept of Function-A Case Study, Educational Studies in Mathematics, 53, 229-254.

Sierpinska. A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Duvinsky, & G. Harel(Eds.), The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy(MAA Notes No. 25, pp. 25-58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of variables, In The Ideas of Algebra K-12, NCTM 1988 yearbook, 8-19.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, Int. J. Maths, 14(3), 293-305.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics thing. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy(MAA Notes No. 25, pp. 195-214). Washington, DC: Mathematical Association of America.

A study on middle school students' recognition and fallacy for linear equations and functions[6)]

Lee, Heonsoo[7)] · Kim, Youngcheol[8)] · Park, Yeongyong[9)] · Kim, Minjeong[10)]

Abstract

In this paper, we study the recognition and fallacy of middle school students about the concepts of liner equations and liner functions. We chose 163 8th grade students and 103 9th grade students in M city and investigate their recognition and fallacy about the concepts of liner equations and liner functions. We found following facts. First, middle school students recognize an equation with respect to x as an equation, but do not recognize an equation with respect to y as an equation. Second, middle school students tend to recognize a linear function as a constant function $y=p$. Third, middle school students tend to distinguish an equation and a function according to the form of an algebraic expression. Finally, middle school students discern the difference between an equation and a function using their concepts in textbooks.

Key Words : linear function, liner equation, function, equation, fallacy

Received May 8, 2015
Revised September 14, 2015
Accepted September 21, 2015

6) This paper was supported by Research Funds of Mokpo National University in 2014
7) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (leehs@mokpo.ac.kr)
8) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (yckim@mokpo.ac.kr), Corresponding author
9) Dept. of Math. Education, Mokpo National University (yypark@mokpo.ac.kr)
10) Graduate School of Education, Mokpo National University