Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 41, No. 5, pp. 447-452, October 2015.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2015.41.5.447

<Original Research Paper>

부품 판매 옵션을 갖는 두 단계 일렬 생산 시스템에서의 최적 생산 전략

김 은 갑†

이화여자대학교 경영대학

Optimal Production Controls in a Two-Stage Production System with a Component Selling Option

Eungab Kim

College of Business Administration, Ewha Womans University

This paper considers a two-stage make-to-stock production system. The first stage produces a single-component and the second stage produces a make-to-stock product using components. In addition to internal demands, the first stage faces external demands with the option of accepting or rejecting. To ration component inventory, the manufacturer adopts a static rule. This paper analyzes the production controls at both facilities that maximizes the manufacturer's profit. Using the Markov decision process model, we characterize the optimal production policy by two monotonic switching curves.

Keywords: Two-stage production system, Component selling, Production control, Inventory rationing, Make-to-stock

1. 서 론

본 논문은 계획 생산(make-to-stock, 이하 MTS) 기반의 제품생산시설과 부품생산시설을 보유하고 있는 제조 기업에서 제품생산과 부품생산 전략을 수립하는 문제를 다루고 있다. 부품생산시설은 제품생산시설이 필요로 하는 부품을 생산하고 있으며, 생산된 부품은 제품생산과 부품 시장 수요에 사용된다.

본 논문은 부품생산과 제품생산 각 단계에서 외부 수요를 고려하고 있다. 이로 인해 제조 기업은 부품재고 배급(rationing) 문제에 직면하게 된다. 재고배급은 한 품목에 대해 중요도가 다른 복수의 수요 계층이 존재할 때 중요도가 높은 계층의 미래 수요를 충족시킬 목적으로 가용 재고를 예약하는 기법이다 (Ha, 1997). 기존의 재고 관리 문헌들이 제품재고 배급을 다루었다는 점에서 부품재고 배급을 제안하고 있는 본 논문은 재고관리 문헌에 기여한다고 할 수 있다.

기업 사례를 통해 본 논문의 연구 모형이 실제 사용되고 있음을 알 수 있다. 최근 몇몇 기업들은 특정 고객과는 대규모 계약을 통해 MTS 방식으로 제품을 공급하고, 부품생산 용량에 여유가 있는 경우에 부품수요를 수용함으로써 복수의 시장 세그먼트(고객 군)를 동시에 공략하는 생산 전략을 추구하고 있다(Ross and Robertson, 2007). 예를 들면, Lenovo는 개인 컴퓨터 시장에서 경쟁 관계에 있는 Dell에게 컴퓨터 부품을 판매하고 있다. 자동차 부품업체인 TRW는 자동차 제조회사에 납품하는 부품에 사용되는 패스너를 다른 부품업체들에게 판매하고 있다. 또한, 본 연구 모형은 가전제품 시장의 판매 후 서비스 시장에서 적용 가능성을 찾을 수 있다. Wirlpool의 경우 부품 수요는 냉장고 조립뿐만 아니라 판매 후 서비스 운영에서 발생하고 있다. Cohen *et al*.(2006)에 따르면 자동차와 백색가전 산업의 경우 판매 후 서비스 부품 시장의 규모가 제품 시장의 4~5배에 이르며, 전체 수익의 45%를 판매 후 서비스 부품

† 연락저자 : 김은갑 교수, 03760 서울특별시 서대문구 이화여대길52 이화여자대학교 경영대학, Tel : 02-3277-3970, Fax : 02-3277-2835, E-mail : evanston@ewha.ac.kr
2015년 8월 4일 접수; 2015년 9월 15일 수정본 접수; 2015년 9월 16일 게재 확정.

시장에서 올린 것으로 나와 있다.

본 연구 모형은 두 단계 일렬 생산 시스템의 생산통제를 다룬 연구들과 밀접한 연관성을 갖고 있다 이 분야에서 생산통제를 다룬 대표적 연구는Veatch and Wein(1994)이다. 그들은 생산통제 문제를 마코프 의사결정(Markov Decision Process, 이하 MDP로 표기) 문제로 제시하고, 단계별 생산통제 전략의 구조를 분석하였다 He *et al.*(2002)은 부품을 이용하여 주문 제품을 생산하는 방식에서 부품생산 시간이 고려되지 않을 때 MDP 모형을 이용하여 부품생산량을 통제하는 문제를 분석하였다. Benjaafar and Elhafsi(2006)와 ElHafsi(2009)는 복수의 부품들을 조립하는 생산 방식에서 조립 시간이 고려되지 않을 때, MDP 모형을 이용하여 부품생산과 제품수요를 통제하는 문제를 연구하였다 Kim(2011)은 부품을 이용하여 주문 제품을 생산하는 방식에서 부품 판매가 허용될 때, 제품수요 및 부품수요를 통제하는 문제를 다루었다 Kim(2012a)은 Kim(2011)과 동일한 모형에서 부품생산이 뱃치 방식으로 이루어질 때 부품생산과 부품수요 통제를 위한 휴리스틱을 개발하였다 Kim(2012b)은 본 연구 모형과 동일한 모형에서 제품생산, 부품생산, 그리고 부품수요 통제를 위한 휴리스틱을 개발하였다

본 논문의 연구 결과를 요약하면 다음과 같다 첫째, 부품재고 수준이 특정 수준을 초과할 경우에 한해 부품 판매가 허용될 때, 단계별 생산통제 전략의 구조적 특성을 분석하기 위한 MDP 모형을 수립하였다. 둘째, 이 MDP 모형을 이용하여 최적 가치 함수가 가질 수 있는 함수적 특성들을 규명하였고, 제품과 부품생산통제를 위한 최적 전략이 두 개의 전환(switching) 곡선들로 특정될 수 있음을 증명하였다.

2. 연구 모형

연구 모형의 주요 가정은 다음과 같다 연구 모형에서 사용될 주요 용어들은<Table 1>에 정리하였다.

Table 1. 주요 용어

용어	설명
$\lambda_1(\lambda_2)$	product(component) demand rate
$\mu_1(\mu_2)$	unit product(component) production rate
$R_1(R_2)$	revenue of a product(component)
c_L	Lost sales cost of a product
$h_1(h_2)$	inventory holding cost rate of a product(component)
$c_P^1(c_P^2)$	production cost of a product(component)
$n_1(n_2)$	product(component) inventory level
$n=(n_1, n_2)$	state
M	rule for component selling

제품(부품)수요는 단위 시간당 발생 빈도가 $\lambda_1(\lambda_2)$인 포아송 분포를 따른다.

제품(부품) 한 단위 생산 시간은 평균$\mu_1^{-1}(\mu_2^{-1})$인 지수 분포를 따른다.

제품 한 단위 생산에 부품 한 단위가 사용된다

제품재고 부족 시 발생한 수요는 판매 기회 손실로 처리한다

부품수요는 부품 가용 재고가 M개를 초과할 경우에 한해 수용된다.

수식 표현의 용이성을 위해 다음 기호들을 정의한다 $\gamma=\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $H(n)=h_1n_1+h_2n_2$. 여기서 γ는 MDP 모형의 상태 전이 속도, e_i는 단위 벡터, $H(n)$는 재고 비용의 합을 나타낸다 $v(n)$을 상태 n에서 최적 가치 함수로 표기하기로 한다

MDP 모형을 이용한 최적 정책의 규명은 벨만(Bellman) 방정식을 도출하고, $v(n)$이 갖는 함수적 특성들에 대한 분석을 통해서 이루어진다(Porteus, 1982). 할인 수익 기준MDP 모형의 벨만 방정식은 다음과 같다(Puterman 2005) :

$$v(n)=Tv(n) \tag{1}$$

위 식에서 T는 가치 반복(value iteration, 이하 VI로 표기) 수식자이며, $v(n)$이 전이를 통해 다음 상태에서 가질 수 있는 가치 함수들을 확률적으로 정의하게 된다. $D=\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$를 상태 n에서 발생 가능한 전이 공간으로 정의한다 여기서 $d_1=e_1-e_2$, $d_2=e_2$, $d_3=-e_1$, $d_4=-e_2$. 즉, d_1, d_2, d_3, d_4는 각각 제품생산, 부품생산, 제품수요 발생, 부품수요 발생 전이를 나타낸다. 상태 n에서 이루어지는 전이는 다음과 같다:

제품생산 의사결정 : μ_1/γ의 확률로 상태는 n에서 $n+d_1$로 변하며 생산 비용 c_P^1이 발생한다.

부품생산 의사결정 : μ_2/γ의 확률로 상태는 n에서 $n+d_2$로 변하며 생산 비용 c_P^2이 발생한다.

제품수요 도착 : λ_1/γ의 확률로 재고가 있으면 상태는 n에서 $n+d_3$로 변하고 R_1의 매출이 발생한다. 재고 고갈이면 비용 c_L이 발생한다.

부품수요 도착 : λ_2/γ의 확률로 부품재고가 M보다 크면 상태는 n에서 $n+d_4$로 변하고 R_2의 매출이 발생한다.

이자율을 β로 두면 Lippman(1975)으로부터 기대 전이 시간 γ^{-1} 동안 할인 상수는 $\gamma/(\gamma+\beta)$로 주어진다. 임의의 함수 f에 대해 할인 수익 기준MDP 모형의 가치 반복 수식자 T는 다음과 같다 :

$$\begin{aligned} Tf(n) &= \frac{\gamma}{\gamma+\beta}[-H(n)/\gamma+\mu_1/\gamma T_1f(n) \\ &\quad +\mu_2/\gamma T_2f(n)+\lambda_1/\gamma T_3f(n)+\lambda_2/\gamma T_4f(n)] \\ &= \frac{1}{\gamma+\beta}[-H(n)+\mu_1T_1f(n)+\mu_2T_2f(n) \\ &\quad +\lambda_1T_3f(n)+\lambda_2T_4f(n)] \end{aligned} \tag{2}$$

여기서

$$T_1f(n) = \max\{f(n+d_1) - c_P^1, f(n)\} \quad (3)$$

$$T_2f(n) = \max\{f(n+d_2) - c_P^2, f(n)\} \quad (4)$$

$$T_3f(n) = \begin{cases} R_1 + f(n+d_3), & n_1 > 0 \\ f(n) - c_L, & n_1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$T_4f(n) = \begin{cases} R_2 + f(n+d_4), & n_2 > M \\ f(n), & n_2 \le M \end{cases} \quad (6)$$

식 (2)에서 $-H(n)/\gamma$는 기대 전이 시간동안 발생하는 재고비용의 합을 나타낸다. T_1과 T_2는 각각 제품 및 부품 생산이 유리한 지 여부에 대한 의사결정을 나타낸다. T_3는 제품수요 발생 시 재고 유무에 따라 수용 또는 기회 손실로 처리되는 상황을 나타낸다. T_4는 부품수요가 발생 시 부품재고의 크기와 M을 비교하여 수용 여부를 결정하는 상황을 나타낸다.

3. 최적 정책의 구조

$a_1(n)$과 $a_2(n)$을 상태 n에서 제품 및 부품 생산을 위한 최적 의사결정으로 표기하면, $a_1(n)\,(a_2(n))$=1은 제품(부품)생산, $a_1(n)\,(a_2(n))$ = 0은 제품(부품)생산을 하지 않는 의사결정을 의미한다. 다음과 같은 함수적 특성들을 갖는 함수 f들의 집합 F를 정의하자: 즉, $f \in F$이면,

$$f(n+d_1+d_2) + f(n) \ge f(n+d_1) + f(n+d_2) \quad (7)$$

$$f(n+d_1+d_3) + f(n) \ge f(n+d_1) + f(n+d_3) \quad (8)$$

$$f(n+d_1+d_4) + f(n) \le f(n+d_1) + f(n+d_4) \quad (9)$$

$$f(n+d_2+d_3) + f(n) \ge f(n+d_2) + f(n+d_3) \quad (10)$$

$$f(n) - f(n+d_3) \le R_1 \quad (11)$$

$$f(n+d_2) - f(n) \le R_2 \quad (12)$$

식 (7)~식 (12)는 함수 f에 대한 supermodularity와 submodularity 성질을 나타낸다. 예를 들면, 제품생산 사건은 부품생산 사건과 제품수요도착 사건과는 supermodular, 부품수요 도착 사건과는 submodular 관계에 있다. 식 (7)~식 (12)로부터 함수 f의 concavity 성질을 유도할 수 있다.

보조 정리 1.

$$f(n+d_i) - f(n) \ge f(n+2d_i) - f(n+d_i), \quad (13)$$
$$i = 1, 2, 3, 4.$$

상태 n, $n+d_1$, $n+d_2$, $n+d_3$, $n+d_4$에서 $a_1(\cdot)$과 $a_2(\cdot)$ 간에 다음 관계가 성립한다.

보조 정리 2.

(i) $a_1(n) \ge a_1(n+d_1)$, $a_1(n) \le a_1(n+d_2)$,
$a_1(n) \le a_1(n+d_3)$, $a_1(n) \ge a_1(n+d_4)$.

(ii) $a_2(n) \ge a_2(n+d_2)$, $a_2(n) \le a_2(n+d_1)$,
$a_2(n) \le a_2(n+d_3)$, $a_2(n) \le a_2(n+d_4)$.

보조정리2의 첫 번째 결과는 부품생산 완료 또는 제품수요 수용은 제품생산을 촉진시키고, 제품생산 완료 또는 부품수요 수용이 이루어지면 제품생산 가능성은 낮아짐을 보여준다. 두 번째 결과는 제품생산 완료, 제품수요 수용, 또는 부품수요 수용은 부품생산을 촉진시키고, 부품생산이 완료되면 부품생산 가능성은 낮아짐을 보여준다.

다음 <정리 1>은 식 (7)~식 (12)에 식 (2)의 가치 반복 수식자 T를 적용하였을 경우에도 식 (7)~식 (12)의 함수적 특성들이 그대로 보존된다는 것을 보장한다.

정리 1. $f \in F$이면, $Tf \in F$이다.

최적 제품 및 부품생산 전략의 구조적 특성은 다음 정리를 통해 규명된다.

정리 2.

(i) $v \in F$.

(ii) 함수식 $P_1(n_2)$와 $P_2(n_1)$을 다음과 같이 정의하자:

$$P_1(n_2) := \max\{n_1 | v(n+d_1) - c_P^1 > v(n), n_2 > 0\} \quad (14)$$

$$P_2(n_1) := \max\{n_2 | v(n+d_2) - c_P^2 > v(n)\} \quad (15)$$

상태 n에서 $n_1 \le P_1(n_2)$이면 제품 한 단위를 생산하는 것이, $n_2 \le P_2(n_1)$이면 부품 한 단위를 생산하는 것이 최적이다.

(iii) n_2가 증가하면 $P_1(n_2)$는 증가하고, n_1이 증가하면 $P_2(n_1)$는 감소한다.

정리1은 최적 생산통제 전략을 두 개의 전환 곡선으로 정의할 수 있음을 의미한다. 전환 곡선 $P_1(n_2)$과 $P_2(n_1)$가 의미하는 바는 다음과 같다. 첫째, $P_1(n_2)$은 n_2가 주어진 상황에서 제품생산의 기대 수익을 생산하지 않을 때의 기대 수익보다 크게 하는 제품재고 수준(n_1)중에서 가장 큰 값이다. n_1이 일정 수준보다 작게 되면 재고고갈위험이 커지기 때문에 제품생산이 수익 측면에서 유리하고, n_1이 과도하게 크면 높은 재고유지비용 부담 때문에 제품을 생산하지 않는 것이 유리하다고 판단할 수 있다. n_2가 증가할 때 $P_1(n_2)$이 증가하는 것은 부품재고 증가로 인해 부품재고 유지비용 부담을 낮출 필요성이 커지기 때문으로 이해할 수 있다. 그러나 제품생산으로 인해 제품재고 유지비용에 대한 부담도 커질 수 있으므로 $P_1(n_2)$의 증가 폭은 크지 않을 것으로 판단된다.

둘째, $P_2(n_1)$은 n_1이 주어진 상황에서 부품생산의 기대 수익을 생산을 하지 않는 경우의 기대 수익보다 크게 하는 부품재고수준(n_2)중에서 가장 큰 값이다. 부품생산의 경우에도, n_2가

크면 높은 부품재고 유지비용 부담 때문에 부품생산을 하지 않는 것이 유리하고, n_2가 작으면 재고고갈위험이 커지기 때문에 부품을 생산하는 것이 유리하다고 판단할 수 있다. 한편, n_1이 증가할 경우 $P_2(n_1)$가 감소하는 것은 제품재고의 증가로 인해 부품생산의 필요성이 줄어들기 때문으로 이해할 수 있다.

<Figure 1>은 R_1 = 50, R_2 = 20, c_L = 25, c_P^1 = 20, c_P^2 = 5, h_1 = 2, h_2 = 1, λ_1 = 1, λ_2 = 1, μ_1 = 1.2, μ_2 = 1.4, M = 5 , β = 0.05를 이용하여 수치적으로 구한 $P_1(n_2)$과 $P_2(n_1)$을 나타낸다. n_2가 증가할 때 $P_1(n_2)$는 증가하지만 $P_1(n_2)$의 증가 폭은 크지 않고, n_1이 증가할 때, $P_2(n_1)$은 감소하다가 어느 수준을 지나면 더 이상 감소하지 않는 것을 볼 수 있다. <Figure 1>에서 P1(P2)은 제품(부품) 생산, NP1(NP2)은 제품(부품) 생산안함, S와 R은 각각 부품수요 수용과 거절을 나타낸다. 예를 들면, (5, 7)에서는 제품생산은 중단하고 부품은 생산하며 부품수요는 수용한다. <Figure 1>의 결과는 부품재고가 동일해도 제품재고수준에 따라 통제 전략이 달라져야 함을 시사하며 제품과 부품 생산통제가 두 생산 시설의 통합적인 관점에서 이루어져야 함을 알 수 있다. 이 이슈는 Kim(2012b)에서 자세하게 다루어졌다.

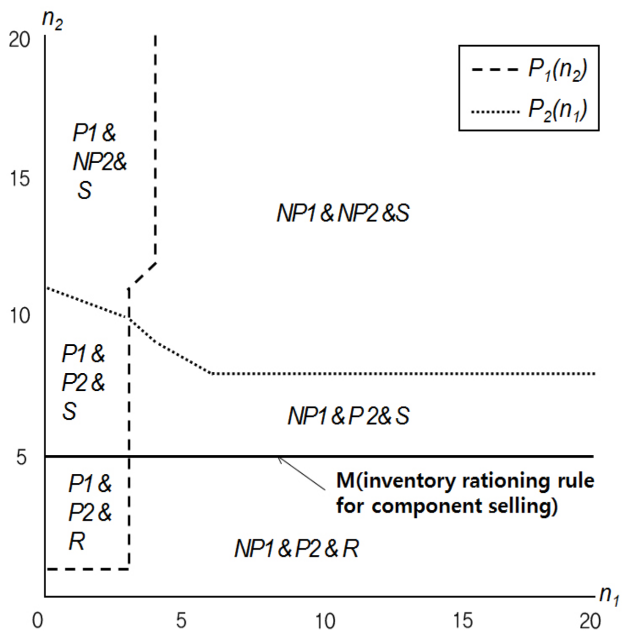

Figure 1. $P_1(n_2)$과 $P_2(n_1)$의 예

4. 결 론

본 논문은 제품 및 부품 생산시설을 보유한 제조 기업에서 부품에 대한 내・외부 수요가 존재할 때, 부품재고 배급이 제품 및 부품 생산통제에 미치는 영향을 분석하였다는 점에서 연구 기여도가 있다. 본 논문은 마코프 의사결정 모형을 이용하여 최적 제품 및 부품생산 전략이 전환 곡선으로 특정될 수 있음을 증명하였다. 본 논문에서 제안한 연구 모형은 컴퓨터 제조 산업과 자동차 부품 산업에서 찾아볼 수 있으며, 백색 가전 산업처럼 판매 후 서비스 사업 비중이 높은 산업에 직접 적용 가능한 모형이다. 추후 연구에서는 부품 판매 단가를 연구 모형의 새로운 의사결정 변수로 반영함으로써 부품 판매가 기업의 수익성과 경쟁력에 실질적으로 미치는 영향을 파악하고자 한다.

참고문헌

Benjaafar, S. and Elhafsi, M. (2006), Production and inventory control of a single product assemble-to-order system with multiple customer classes. *Management Science*, **52**, 1896-1912.

Cohen, M. A., Agrawal, N., and V. Agrawal, V. (2006), Winning in the Aftermarket, *Harvard Business Review*, DOI:10.1225/R0605H.

Elhafsi, M. (2009), Optimal integrated production and inventory control of an assemble-to-order system with multiple non-unitary demand classes, *European Journal of Operational Research*, **194**, 127-142.

Ha, A. Y. (1997), Inventory rationing in a make-to-stock production system with several demand classes and lost sales, *Management Science*, **43**, 1093-1103.

He, Q., Jewkes, E. M., and Buzacott, J. (2002), Optimal and near-optimal inventory control policies for a make-to-order inventory-production system, *European Journal of Productional Research*, **141**, 113-132.

Kim, E. (2011), On the admission control and demand management in a two-station tandem production system, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **7**(1), 1-18.

Kim, E. (2012a), Joint batch production and inventory rationing control in a two-station serial production system, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineering*, **38**(2), 89-97.

Kim, E. (2012b), Coordinated production control and inventory rationing in a two-stage make-to-stock tandem production system, *Journal of the Korean Society of Supply Chain Management*, **37**(2), 45-56.

Lippman, S. (1975), Applying a new device in the optimization of exponential queueing systems, *Operations Research*, **23**, 687-710.

Porteus, E. (1982), Conditions for characterizing the structure of optimal strategies in infinite-horizon dynamic programs, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **36**, 419-432.

Puterman, M. (2005), *Markov Decision Processes*, John Wiley and Sons.

Ross, W. and Robertson, D. (2007), Compound relationship between firms, *Journal of Marketing*, **71**(3), 108-123.

Veatch, M. and Wein, L. (1994), Optimal control of a two-station tandem production/inventory system, *Operations Research*, **42**, 337-350.

<부록 1> (보조정리 1 증명)

$i=1$일 때, 식 (8)로부터 $f(n+d_1+d_3+d_2)+f(n+d_2) \geq f(n+d_1+d_2)+f(n+d_3+d_2)$. $-d_1=d_2+d_3$을 이용하면 $f(n)+f(n+d_2) \geq f(n+d_1+d_2)+f(n-d_1)$. 이 식과 식(7)을 더하면 결과가 성립한다. $i=2$일 때, 식 (7)로부터 $f(n+d_1+d_2+d_3)+f(n+d_3) \geq f(n+d_1+d_3)+f(n+d_2+d_3)$. $-d_1=d_2+d_3$을 이용하면 $f(n)+f(n+d_3) \geq f(n-d_2)+f(n+d_2+d_3)$. 이 식과 식 (10)을 더하면 결과가 성립한다. $i=3$일 때, 식 (10)으로부터 $f(n+d_2+d_3+d_1)+f(n+d_1) \geq f(n+d_2+d_1)+f(n+d_3+d_1)$. $-d_1=d_2+d_3$을 이용하면 $f(n)+f(n+d_1) \geq f(n-d_3)+f(n+d_1+d_3)$. 이 식과 식(7)을 더하면 결과가 성립한다. $i=4$일 때, $-d_4=d_2$이므로 $i=2$에서 유도된다.

<부록 2> (보조정리 2 증명)

(i) $a_1(n) \leq a_1(n+d_2)$의 중명은 $a_1(n)=1$일 때 $a_1(n+d_2)=1$임을 보이면 된다. $a_1(n)=1$이면 식 (3)에 의해 $v(n+d_1)-c_P^1-v(n)>0$. 여기에 식 (7)을 적용하면 $v(n+d_1+d_2)-c_P^1-v(n+d_2) \geq v(n+d_1)-c_P^1-v(n)>0$. 따라서 $a_1(n+d_2)=1$. 비슷한 논리 전개를 통해 $a_1(n) \leq a_1(n+d_3)$은 식(8)에 의해, $a_1(n) \geq a_1(n+d_4)$에 식(9)에 의해, $a_1(n) \geq a_1(n+d_1)$은 식 (13)에 의해 성립한다.

(ii) $a_2(n) \leq a_2(n+d_1)$의 중명은 $a_2(n)=1$일 때 $a_2(n+d_1)=1$임을 보이면 된다. $a_2(n)=1$이면 식 (3)에 의해 $v(n+d_2)-c_P^2-v(n)>0$. 식 (7)을 적용하면 $v(n+d_1+d_2)-c_P^2-v(n+d_1) \geq v(n+d_2)-c_P^2-v(n)>0$. 따라서 $a_2(n+d_1)=1$. 비슷한 논리 전개를 통해 $a_2(n) \leq a_2(n+d_3)$은 식 (10)에 의해, $a_2(n) \leq a_2(n+d_4)$과 $a_2(n) \geq a_2(n+d_2)$은 식 (13)에 의해 성립한다.

<부록 3> (정리 1 증명)

(i) $\Delta \equiv Tf(n+d_1+d_2)+Tf(n)-(Tf(n+d_1)+Tf(n+d_2))$: $i=1, 2, 3, 4$에 대해
$\Delta_i \equiv T_if(n+d_1+d_2)+T_if(n)-(T_if(n+d_1)+T_if(n+d_2))$로 두면,
$\Delta=1/\gamma[\mu_1\Delta_1+\mu_2\Delta_2+\lambda_1\Delta_3+\lambda_2\Delta_4]$이므로 $\Delta \geq 0$의 증명은 $\Delta_i \geq 0$의 증명으로 충분하다.

1. $\Delta_1 \geq 0$: $a_1(n+d_2) \geq a_1(n) \geq a_1(n+d_1+d_2) \geq a_1(n+d_1)$이므로 가능한 $a_1(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (0, 0, 0, 0)과 (1, 1, 1, 1)이면 전이 방향이 자가 순환 또는 d_1이므로 $\Delta_1 \geq 0$. (0, 1, 0, 1)이면 $\Delta_1=0$. (0, 0, 0, 1)과 (1, 1, 0, 1)이면 $\Delta_1 \geq \Delta_1^{(0,1,0,1)}=0$.
2. $\Delta_2 \geq 0$: $a_2(n+d_1) \geq a_2(n) \geq a_2(n+d_1+d_2) \geq a_2(n+d_2)$이므로 가능한 $a_2(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (1, 1, 1, 1)과 (0, 0, 0, 0)이면 전이 방향이 자가 순환 또는 d_2이므로 $\Delta_2 \geq 0$. (0, 1, 1, 0)이면 $\Delta_2=0$. (0, 0, 1, 0)과 (1, 1, 1, 0)이면 $\Delta_2 \geq \Delta_2^{(0,1,1,0)}=0$.
3. $\Delta_3 \geq 0$: $n_1>0$일 때, 전이 방향이 d_3이므로 $\Delta_3 \geq 0$. $n_1=0$일 때, $\Delta_3=2f(n)-(f(x-d_2)+f(n+d_2)$. 따라서 식(13)에 의해 $\Delta_3 \geq 0$.
4. $\Delta_4 \geq 0$: $n_2>M+1$이면 전이 방향이 d_4이므로 $\Delta_4 \geq 0$. $n_2=M+1$이면,
$\Delta_4=R_2+f(n+d_4)-f(n)$. 식 (12)에 의해서 $\Delta_4 \geq 0$.

(ii) $\Delta \equiv Tf(n+d_1+d_3)+Tf(n)-(Tf(n+d_1)+Tf(n+d3))$: $\Delta_i \equiv T_if(n+d_1+d_3)+T_if(n)-(T_if(n+d_1)+T_if(n+d_3))$라 두면 $\Delta \geq 0$의 증명은 $\Delta_i \geq 0$의 증명으로 충분하다.

1. $\Delta_1 \geq 0$: $a_1(n+d_3) \geq a_1(n) \geq a_1(n+d_1+d_3) \geq a_1(n+d_1)$ 이므로 가능한 $a_1(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (0, 0, 0, 0)과 (1, 1, 1, 1)이면 4개 상태들이 자가 순환 또는 d_1으로 움직이므로 $\Delta_1 \geq 0$. (0, 1, 0, 1)이면 $\Delta_1=0$. (0, 0, 0, 1)과 (1, 1, 0, 1)이면 $\Delta_1 \geq \Delta_1^{(0,1,0,1)}=0$.
2. $\Delta_2 \geq 0$: $a_2(n+d_1+d_3) \geq a_2(n+d_1) \geq a_2(n)$과 $a_2(n+d_1+d_3) \geq a_2(n+d_3) \geq a_2(n)$이므로 가능한 $a_2(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (1, 1, 1, 1)과 (0, 0, 0, 0)이면 전이 방향이 자가 순환 또는 d_2이므로 $\Delta_2 \geq 0$. (1, 0, 1, 0)이면 $\Delta_2=2f(n)-(f(x-d_3)+f(n+d_3))$. 식 (13)에 의해 $\Delta_2 \geq 0$. (1, 0, 0, 0)이면 $\Delta_2 \geq \Delta_2^{(0,0,0,0)} \geq 0$. (1, 0, 1, 1)이면 $\Delta_2 \geq \Delta_2^{(1,1,1,1)} \geq 0$. (1, 0, 0, 1)이면 $\Delta_2=2f(n)-(f(n+d_1)+f(x-d_1))$. 식 (13)에 의해 $\Delta_2 \geq 0$.
3. $\Delta_3 \geq 0$: $n_1>1$이면 전이 방향이 d_3이므로 $\Delta_3 \geq 0$. $n_1=1$이면, $\Delta_3=f(n+d_1+2d_3)+R_1-f(n+d_1+d_3)$. (11)에 의해 $\Delta_3 \geq 0$.
4. $\Delta_4 \geq 0$: $n_2>M+1$이면 전이 방향이 d_4이므로 $\Delta_4 \geq 0$. $n_2=M+1$이면, $\Delta_4=f(n+d_1+d_3)+f(n+d_4)+R_2-(f(n+d_1)+f(n+d_3+d_4)+R_2)=2f(n)-(f(n-d_3)+f(n+d_3))$. 식 (13)에 의해 $\Delta_4 \geq 0$.

(iii) $\Delta \equiv Tf(n+d_1+d_4)+Tf(n)-(Tf(n+d_1)+Tf(n+d_4))$: $n=m+d_2$라 두면, $\Delta=Tf(m+d_2+d_1+d_4)+Tf(m+d_2)-(Tf(m+d_2+d_1)+Tf(m+d_2+d_4))$. $d_2+d_4=0$이므로, (i)에 의해 $\Delta \leq 0$.

(iv) $\Delta \equiv Tf(n+d_2+d_3)+Tf(n)-(Tf(n+d_2)+Tf(n+d_3))$:

$\varDelta_i \equiv T_i f(n+d_2+d_3)+T_i f(n)-(T_i f(n+d_2)+T_i f(n+d_3))$로 두면, $\varDelta \geq 0$의 증명은 $\varDelta_i \geq 0$의 증명으로 충분하다.

1. $\varDelta_1 \geq 0$: $a_1(n+d_2+d_3) \geq a_1(n+d_2) \geq a_1(n)$과 $a_1(n+d_2+d_3) \geq a_1(n+d_3) \geq a_1(n)$이므로 가능한 $a_1(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (0, 0, 0, 0)과 (1, 1, 1, 1)이면 전이 방향이 자가 순환 또는 d_1이므로 $\varDelta_1 \geq 0$. (1, 0, 1, 0)이면 $\varDelta_1 = 2f(n)-(f(x-d_3)+f(n+d_3))$. 식 (13)에 의해 $\varDelta_1 \geq 0$. (1, 0, 0, 0)이면 $\varDelta_1 \geq \varDelta_1^{(0,0,0,0)} \geq 0$. (1, 0, 1, 1)이면 $\varDelta_1 \geq \varDelta_1^{(1,1,1,1)} \geq 0$. (1, 0, 0, 1)이면 $\varDelta_1 = 2f(n)-(f(n+d_2)+f(x-d_2))$. 식 (13)에 의해 $\varDelta_1 \geq 0$.
2. $\varDelta_2 \geq 0$: $a_2(n+d_3) \geq a_2(n) \geq a_2(n+d_2+d_3) \geq a_2(n+d_2)$이므로 가능한 $a_2(\cdot)$ 조합은 다음과 같다. (1, 1, 1, 1)과 (0, 0, 0, 0)이면 전이 방향이 자가 순환 또는 d_2이므로 $\varDelta_1 \geq 0$. (0, 1, 0, 1)이면 $\varDelta_2 = 0$. (0, 0, 0, 1)과 (1, 1, 0, 1)이면 $\varDelta_2 \geq \varDelta_2^{(0,1,0,1)} = 0$.
3. $\varDelta_3 \geq 0$: $n_1 > 1$이면 전이 방향이 d_3이므로 $\varDelta_3 \geq 0$. $n_1 = 1$이면 $\varDelta_3 = 0$.
4. $\varDelta_4 \geq 0$: $n_2 > M$이면 전이 방향이 d_4이므로 $\varDelta_4 \geq 0$. $n_2 = M$이면, $\varDelta_4 = 0$.

(v) $\varDelta \equiv Tf(n) - Tf(n+d_3) \leq R_1$: $\varDelta_i \equiv T_i f(n) - T_i f(n+d_3)$로 두자. $a_1(n) \leq a_1(n+d_3)$이므로 (0, 0)과 (1, 1)이면 $\varDelta_1 \leq R_1$, (0, 1)이면 $\varDelta_1 \leq \varDelta_1^{(0,0)} \leq R_1$. $a_2(n) \leq a_2(n+d_3)$이므로 (0, 0)과 (1, 1)이면 $\varDelta_2 \leq R_1$, (0, 1)이면 $\varDelta_2 \leq \varDelta_2^{(0,0)} \leq R_1$. $n_1 > 1$이면, $\varDelta_3 \leq R_1$, $n_1 = 1$이면, $\varDelta_3 = R_1$. $\varDelta_4 \leq R_1$은 $(n, n+d_3)$이 d_4 또는 자가 순환하기 때문에 성립한다. 따라서 $\varDelta = 1/\gamma[-h_1+\mu_1\varDelta_1+\mu_2\varDelta_2+\lambda_1\varDelta_3+\lambda_2\varDelta_4] \leq 1/\gamma[-h_1+\gamma R_1] \leq R_1$.

(vi) $\varDelta \equiv Tf(n) - Tf(n+d_4) \leq R_2$: $\varDelta_i \equiv T_i f(n) - T_i f(n+d_4)$로 두자. $a_1(n) \geq a_1(n+d_4)$이므로 (0, 0)과 (1, 1)이면 $\varDelta_1 \leq R_2$, (1, 0)이면, $\varDelta_1 \leq \varDelta_1^{(1,1)} \leq R_2$. $a_2(n) \leq a_2(n+d_4)$이므로 (0, 0)과 (1, 1)이면 $\varDelta_2 \leq R_1$, (0, 1)이면, $\varDelta_2 \leq \varDelta_2^{(0,0)} \leq R_2$. $\varDelta_3 \leq R_2$는 $(n, n+d_4)$이 d_3 또는 자가 순환하기 때문에 성립한다. $n_2 > M+1$이면, $\varDelta_4 \leq R_2$. $n_2 = M+1$이면 $\varDelta_4 = R_2$. 따라서 $\varDelta = 1/\gamma[-h_2+\mu_1\varDelta_1+\mu_2\varDelta_2+\lambda_1\varDelta_3+\lambda_2\varDelta_4] \leq 1/\gamma[-h_2+\gamma R_2] \leq R_2$.

<부록 4> (정리 2 증명)

(i) 할인 수익 기준MDP 모형에서 $f(n) \in F$에 가치 반복 수식자 T를 반복 적용하게 되면 $v(n) = \lim_{k\to\infty} T^{(k)} f(n)$이 성립한다(Puterman(2005)의 제 6.2.1절). 여기서 $T^{(k)}$는 T를 k번 합성한 함수이다. 정리 1로부터 $Tf \in F$이므로 $T^{(k)} f \in F$. 따라서 $v \in F$.

(ii) $w_1 = (P_1(n_2), n_2)$과 $w_2 = (P_1(n_2)-1, n_2)$를 고려하자 $(w_2 = w_1 + d_3)$. $P_1(n_2)$의 정의로부터 $a_1(w_1) = 1$과 $a_1(w_1) \leq a_1(w_1+d_3)$. $y_1 = (n_1, P_2(n_1))$과 $y_2 = (n_1, P_2(n_1)-1)$를 고려하자 $(y_2 = y_1 + d_4)$. $P_2(n_1)$의 정의로부터 $a_2(y_1) = 1$과 $a_2(y_1) \leq a_2(y_1+d_4)$. 따라서 $a_2(y_2) = 1$.

(iii) $w_1 = (P_1(n_2), n_2)$과 $w_2 = (P_1(n_2), n_2+1)$를 고려하자 $(w_2 = w_1 + d_2)$. 임의의 n_2에 대해서 $P_1(n_2) \leq P_1(n_2+1)$임을 보이면 된다. $P_1(n_2)$의 정의로부터 $a_1(w_1) = 1$과 $a_1(w_1) \leq a_1(w_1+d_2)$이므로 $a_1(w_2) = 1$. 따라서 $P_1(n_2) \leq P_1(n_2+1)$. $y_1 = (n_1, P_2(n_1+1))$과 $y_2 = (n_1+1, P_2(n_1+1))$을 고려하자 $(y_1 = y_2 + d_3)$. 임의의 n_1에 대해서 $P_2(n_1) \geq P_2(n_1+1)$이 성립함을 보이면 된다. $P_2(n_1+1)$의 정의로부터 $a_2(y_2) = 1$과 $a_1(y_2) \leq a_1(y_2+d_3)$이므로 $a_2(y_1) = 1$. 따라서 $P_2(n_1) \geq P_2(n_1+1)$.