대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 3, 381 ~ 405. Aug 2015

학교수학이란 무엇인가?

이 승 우*

최근의 고고학적으로 문맥화 된 수학사연구는 인류 초기 문명인 고대 바빌로니아의 학교에서 수학교육이 기능하였다는 사실과 함께 현존하는 가장 오래된 수학인 고대 바빌로니아의 수학적 텍스트가 학교에서 이루어진 교수-학습 과정의 산물(産物)임을 보여준다. 이러한 측면에서 학교수학의 본질과 기능에 대한 탐구의 필요성이 제기되는 바, 본 연구는 교수-학습 과정서 나타나는 산물을 포함하도록 학교수학의 개념을 확장하고 학교수학의 기능에 대한 분석을 시도하였다. 그 결과, 학교수학은 일상생활에서의 수학활동과 학문으로서의 수학의 경계를 명확히 하고 양자를 연결해왔으며 수학적 연습과 준비를 시키는 교육상황(ESMPR)과 수학적 창의성과 오류가 발현되는 교육상황(ESMCE)의 계속되는 연쇄를 통해 작동해온 것으로 파악되었다. 이로부터 본 연구자는 학습에 대한 상반된 두 패러다임인 획득으로서의 학습과 참여로서의 학습은 각각 ESMPR과 ESMCE에 대응하여 상보적으로 작동할 수 있으며 학교수학적 지식의 질적 성장이 Bruner가 말하는 교사와 학생이 형성하는 상호학습 커뮤니티가 Popper의 추측과 반박의 방법을 통해 완성해 나가는 작품으로 이해될 수 있다고 주장하였다.

I. 들어가며

수학의 발달로 인한 근대 자연과학의 눈부신 발전과 성공은 20세기 전반에 이르기까지, 적어도 유클리드의 원론으로 상징되는 합리적 이성의 빛나는 산물로서의 수학이 서구 사회에만 존재하였다는 서구 우월주의적 관점의 토대가 되었다. 그러나 지난 세기 후반에 이르러 수학철학에서 기초주의의 쇠퇴와 함께 다양한 문화내의 인간 활동이라는 측면에서 수학을 ‘문화현상’으로 보는 관점이 대두되었다(Wilder, 1968). 수학교육 분야에서는 ‘모든 문화는 수학을 창조 한다’(Bishop, 1988, p.180)는 문화적 관점에서 더 나아가 ‘모든 개인이 자신의 수학을 창조 한다’(Gerder, 1994, p.20)는 극단적인 상대주의적 관점에서 교육에 접근하려는 시도가 이루어지면서 수학의 보편성과 문화적 특수성에 대한 교육적 논의가 활발하게 이루어져 왔다. 그러나 21세기가 시작되고 십수년이 지난 현재에도 그러한 논의에서 의미 있는 진전은 여전히 이루어지지 않고 있는 것으로 파악되고 있는 바, 본 연구자는 그 주된 이유를 ‘학교수학이란 무엇인가?’하는 문제 자체를 도외시하거나 이 문제를 ‘수학이란 무엇인가?’하는 수학 본질에 관한 물음에 부차적인 것으로 다루어 온 흐름에서 찾는다.

NCTM(1989)이나 NRC(2001)의 문헌에서 나타나고 있듯이, 학교수학(School Mathematics)이란 용어는 수학교육 문헌에서 대체적으로 학교에서 가르치고 배우는 수학 지식으로서 의도된 수학

* 서울과학고등학교, ss2003@dreamwiz.com

교육과정(Intended Curriculum)이라는 뜻으로 사용되어 왔으며 이러한 관념은 Plato에서부터 D'Ambrosio, Chevallard 등 현대에 이르기까지 일관되게 유지되어온 하나의 흐름이다. 그러나 학교수학의 의미를 의도된 수학교육과정이라는 제한적인 의미에서 벗어나 실행된 수학교육과정(Implemented Curriculum), 평가된 수학교육과정(Assessed Curriculum) 등을 포함하는 보다 일반적인 수학교육과정으로 확장하여도 수학교육과정으로서의 학교수학은 여전히 학생과 수학교사가 참여하는 교수-학습 과정과 그 결과로 나타나는 산물 자체 사이의 관계를 포착하지 못 한다. 따라서 현재 사용되고 있는 학교수학이라는 용어는 그 외연이 교수-학습 과정과 그 산물을 포함하도록 확장될 필요가 있다. 이러한 측면에서 본고에서는 인식론적 관점에서 학생과 수학교사의 산물 (본고의 후반부에서는 Bruner를 따라 이를 작품이라 한다)에 그 지위를 부여하고 부각시키기 위하여 확장된 의미의 학교수학을 학교수학적 지식이라는 새로운 용어로 나타내며 이를 SM으로 표기한다. 이는 G. Ryle의 명제적 지식과 방법적 지식이라는 이분법적인 인식론적 구도아래 개인적 차원에 속하는 것으로 간주되어 인식론적으로 간과되었던 교사들의 교수경험에 Shulman(1986)이 실천적 지식(practical knowledge)으로서 PCK(Pedagogical Content Knowledge)라는 새로운 인식론적 지위를 부여하였던 것과 비슷하지만, 다른 차원에서 학교수학의 인식론적 영역을 확장하려는 시도이다.

교육은 문화의 일부로서 그 문화의 가치체계, 권리, 의무, 기회, 권력 등의 영향을 받으며 (Bruner, 1996, p.11), SM은 수학과 과학의 발전, 국가정책, 대학입시제도, 사회정의와 경제적 분배, 수학교육연구자의 연구 성과, 정책입안자의 철학 등과 같이 다양한 여러 외적 요소들의 영향 하에 변화된다. 이러한 SM의 측면을 거시적이라 한다면 교수-학습 과정에 국한된 SM의 측면을 미시적이라 할 수 있다. 본고에서는 SM의 미시적 측면에서 접근하며 이를 위해 우선 학교수학에 대한 D'Ambrosio와 Chevallard의 견해를 비교하고 고대 바빌로니아의 SM에 대한 고고학적으로 문맥화 된 수학사 연구 결과를 바탕으로 수학과 SM이 역사적으로 그리고 기능적으로 분리될 수 있다고 가정한다. 또한 이를 바탕으로 교수-학습 과정에서 SM이 작동하는 기제로 ESMPR(Educational Setting for Mathematical Practice and Readiness)과 ESMCE(Educational Setting for Mathematical Creativity and Errors)를 제시한다. 특히, Bruner의 문화심리학적 접근(Cultural Psychology)의 관점에서 교사와 학생이 상호학습 커뮤니티(Community of Mutual Learners)를 형성하며 SM은 그 산물로서 객관화된 수학적 지식이 Popper의 '세계3'[1])에서 성장하듯이 상호학습 커뮤니티의 심적으로 공유된 세계에서 성장한다고 이해할 필요성을 제기하고 그 성장 모델을 제시한다.

II. 학교수학에 대한 두 관점

D'Ambrosio(1988)는 Plato가 이상적인 교육을 위해 학문적 수학을 노동자나 다양한 문화적 소집단의 활동으로부터 기원하는 실용 수학과 엄격하게 구분하기 시작한 이래 사회 경제적 구조를 유지하기 위한 대중교육의 수단으로 자리하는 현대에 이르기까지 이러한 전통은 지속되고 있다고 본다. 비록, 산업혁명을 거치면서 학문적 수학뿐만 아니라 실용 수학이 강화됨으로써 학교수학이 학문적이면서 동시에 실용적인 특징을 가지게 된다는 점을 인정하면서도 D'Ambrosio

1) '논리적 내용의 세계'를 말한다(Popper, 1989, p.74).

(1988)는 학교수학을 여전히 학문적 수학으로 간주한다. D'Ambrosio(1988)가 학교수학을 학문적 수학으로 보는 견해를 견지하는 이유는 형식화되지 못 하고 학교수학의 영역 외부에 존재하는 특정한 사회적 문맥과 문화적 집단 속에 존재하는 인간 고유의 활동을 강조하고 이를 학교수학과 구분하기 위해서이다. D'Ambrosio(1988)는 문화적으로 구분되는 집단의 규칙적인 수학적 활동을 민속수학(Ethnomathematics)이라고 부른다.

민속수학은 인간의 수학적 활동과 수학적 지식의 본질이 문화적이고 사회적인 문맥 속에 상황화 되어(situated) 있다는 것을 드러냄으로써 앎(knowing)과 학습이 사회적 practice[2]의 일부라는 Lave & Wenger (1991)의 주장을 뒷받침한다. 예를 들어, 길거리에서 물건을 파는 브라질의 아동들이 학교에서 배우지 않은 방식으로 물건의 계산을 잘 하지만 자신들이 다니고 있는 학교에서 제시하는 문제는 똑같은 숫자로 이루어져 있음에도 잘 풀지 못 한다는 연구결과나 (Carraher, Carraher, & Schiliemann, 1985/2004), 성인들이 학교에서 배운 수학 지식을 슈퍼에서 물건을 사는 것과 같은 일상적 상황에서 사용하지 않는다는 보고 등은 (Lave, 1988) 수학 지식의 상황성(situatedness)을 드러낸다. 이들 연구결과는 수학 학습 시 학생들이 겪게 되는 어려움과 탈문맥화 된 학교 환경에서 학습된 수학 지식을 일상생활의 상황에 전이시키는데 실패하는 이유가 상황성을 간과하는데 있음을 시사한다. 이러한 측면에서 상황성에 붙박혀 있는 민속수학과 구체적인 문맥에서 탈피하여 추상화되고 형식화된 학교수학의 문화충돌로 인하여 학생들이 학교에서 학습할 때 겪게 되는 어려움을 보여주는 수학교육연구가 다양하게 이루어졌다. 예를 들어, 서구화된 수학-기술 문화와 서구의 학교 문화가 강제적으로 이식되었던 식민지 문화 사이에서 나타나는 충돌 (Zaslavsky, 1994), Navajo 원주민 인디언의 언어와 영어가 세계를 구조화하는 방식의 차이로 인한 문화충돌(Moore, 1994), 학생들의 학교 밖 문화와 수학 교사 문화의 충돌(Hofstede, 1986), 가정과 지역사회 사이의 문화충돌(Bishop, 1988) 등에 대한 보고가 있었다[3]. 또한 오늘날 학교수학이 소수인종, 저소득층, 여학생 등 사회의 특정한 계층을 소외시킨다는 연구가 언어, 기호표현, 기하개념, 계산과정에서부터 태도나 가치관, 신념 등에 이르기까지 다양한 주제에 대하여 수행되었다(Keitel, 1989; Bishop, 1994에서 재인용). 이로부터 학교에서 '문화적 공명'이 이루어질 수 있다는 가정 하에 문화화 경로를 찾아 '수학적 문화화(mathematical enculturation)'를 이루어야 한다는 주장은 문화적 지식으로서의 수학을 이해하지 못 하는 것으로 간주되었고 (Bishop, 1994) 학교수학에 다문화적 관점을 도입하려는 시도가 이루어졌다 (e.g., Zaslavsky, 1994; Nelson, 1993).

한편, 민속수학은 수학이 일종의 문화적 지식으로 이해되어야 한다는 것을 시사하기 때문에 (Bishop, 1988, p.180) '진정한 수학'이란 무엇인가 하는 논쟁을 불러일으켰으며 (Thomas, 1996), Chevallard나 Sierpinska와 같은 학자들은 민속수학을 진정한 수학으로 보지 않는다. Chevallard (1990)는 모든 문화가 인간 활동에서 수학으로

2) 여기서 practice란 가산(加算)명사로 사용되며 관습이나 실천 등의 뜻으로 번역되는 것과는 의미상 커다란 차이가 있다. Wenger(1998, p.5)는 활동에서 서로 관계되는 것(mutual engagement)을 가능하게 하는 역사적이고 사회적으로 공유된 자원, 틀, 관점 등에 대하여 말하는 방식이라고 practice를 정의한다. 이러한 측면에서 본고에서는 practice(s)를 번역하지 않고 원어 그대로 사용한다.

3) 우리나라에서는 문화충돌에 대한 수학교육연구가 거의 수행되지 않은 것으로 보인다. 그러나 우리나라에서도 문화충돌은 예외가 아니며 교사는 학교에서 이를 실제로 경험한다. 개인적 예를 들자면, 본 연구자는 인문계 고등학교 수학수업 중 한 학생이 칠판에 적힌 알파벳으로 이루어진 수식과 기호를 가리키며 수학은 도대체 왜 이렇게 영어를 많이 쓰느냐고 불평하면서 자신은 영어를 못 하기 때문에 수학도 잘 할 수 없다고 푸념하는 것을 들은 적이 있다.

충분히 발전할 수 있는 싹을 가지고 있다는 점에는 동의하지만 이는 원시수학(Protomathematics)에 불과할 뿐 추상성과 일반성을 특징으로 하는 오늘날의 수학과는 본질적으로 다르다는 점을 강조한다. 즉, 수학은 특정한 기호와 개념 구조의 집합으로서 인간 활동에 대한 것이 아니라 ‘아이디어의 추출과 형식화, 그에 따른 다양한 결과’에 대한 것으로 (MacLane, 1985, Thomas, 1996, p.15에서 재인용) 이는 ‘대단히 일어나기 어려운 도전’인 것이다(Chevallard, 1990). 이와 같은 관점에는 다문화적 측면에서 문화접변(acculturation)[4]을 강조하는 것은 고도의 추상성을 갖는 수학의 본질을 외면하는 것이다. 특히, Chevallard의 관점에서 볼 때 학문적인 수학으로부터 교수학적인 변환 과정을 거친 학교수학은 학문으로서의 수학과는 인식론적으로 그 성격이 확연히 다른 것이다.

예를 들어, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 이나 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$와 같은 곱셈공식은 수학자들에게는 분배법칙의 특수한 경우에 불과하지만 분배법칙의 개념을 이해하고 이를 이용하여 문제를 풀어야 하는 학생들에게는 중요한 학습과제가 되기 때문에 교과서에서는 학생들의 이해와 기억을 돕기 위해 괄호 속의 항들을 선으로 연결하거나 직사각형의 그림 등을 이용하여 나타낸다(Kang & Kilpatrick, 1992). 이처럼 학교수학은 학문적 수학으로부터 교수학적인 변환을 거쳐 정합적인 이론적 집합체로 새롭게 구성된 것으로 학문적 수학과는 구별되어야 하는 것이다(Chevallard, 1988).

Bishop(1988)은 학교에서 문화충돌을 설명하기 위해 수학을 학문으로서의 수학(M)과 일상생활에서의 수학(m)으로 구분한다(Pinxten, 1994, 재인용). D’Ambrosio(1985)가 이론화 되지 않은 M의 외부에 잔존하는 문화적 소집단의 practice가 학교제도를 통하여 M에 이미 통합된 다른 practice로 대체됨으로써 m의 문화적 자원이 소실되는 결과를 우려하는 반면 Chevallard(1990)는 M이 학교수학으로 수정될 때의 인식론적 변화에 깊은 주의를 기울이면서 ‘인류의 공유재산’으로서의 M의 가치를 강조한다. 즉, D’Ambrosio(1985, p.47)가 ‘사회 속의 인간(the-person-in-society)’이라는 렌즈를 통해 (Lave & Wenger, 1991, p.113) 인간 활동으로서의 m과 구조화된 지식체로서의 학교수학 사이의 틈을 확대하여 본다면 Chevallard (1990, p.7)는 ‘모든 사회의 practice는 객관적인 자연법칙에 종속 된다’는 반대 관점에서 ‘세계 속의 인간(the-person-in-the-world)’이라는 렌즈를 통해(Lave & Wenger, 1991, p.52) m을 진정한 수학으로 간주하지 않으며 M과 학교수학 사이의 틈을 드러내는데 관심을 가진다. 이러한 측면에서 D’Ambrosio가 m에서 M을 향해 상향적으로 학교수학을 보고 있다면, Chevallard는 M에서 m으로 하향적으로 학교수학을 보고 있다고 할 수 있는 바 이는 수학교육 연구에서 두 줄기의 큰 흐름을 상징한다.

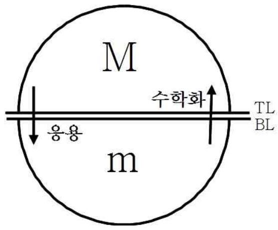
하향적 관점에서 수학교육의 주요한 목표는 이론적 정신을 배양하는 것이며 실생활 문맥에서의 구체적이고 실용적인 문제는 임시방편적인 방법으로 항상 해결 가능한 것이기 때문에, 학생들을 일상생활의 상황 속에서 학습시킨다면 학생들의 인지활동은 일상적인 것으로 될 뿐 수학적인 것과는 거리가 더 멀어지게 된다(Sierpinska, 1995, p.4). Piaget와 Vygotsky 이후 수학교육 연구는 학습과정의 개념발달이라는 측면에서 분석되어 왔으며(Sfard, 1998, p.5) 개인에 심리학적

---

4) 영어의 enculturation과 acculturation은 비슷한 뜻을 가지나 Bishop(1994)은 보다 상위문화에 하위문화가 포섭되는 것을 enculturation으로 사용하고 두 문화가 대등하게 접촉하고 융합되는 것을 acculturation으로 구분하여 사용한다. 이러한 측면에서 본고에서는 ‘enculturation’과 ‘acculturation’을 각각 문화화와 문화접변으로 번역한다.

연구의 초점을 맞추어 온 바(Stahl, 2009) 이를 인지주의(Cognitivism)라 특징지을 수 있다. 인지주의 관점에서는 학교수학에 대한 개념의 분석에서 출발하여 m의 문화에서 기인하는 학생들의 오개념을 발견하고 제거함으로써 m에서 M에 이르는 인지통로를 건설하고 이러한 통로를 따라 학생들을 끌어 올리는 시도를 한다(e.g., Sierpinska, 1987; Sfard, 1991; O'Callagahan, 1998; Sajka, 2003; Mesa, 2004). 반면 90년대 시작된 수학교육 개혁 시도는 M에서 이식되어 학교수학에 내재된 세계관과는 다른 m의 세계에서 아동들이 갖는 관념을 탐색하는 것에서 시작하여(Pinxten, 1994) 학생들이 학교 밖 문화에 기반 하는 자신들의 일상적이고 사회적인 지식을 지렛대로 하여 학교수학에 접근할 수 있도록 하는데 초점이 맞추어져 왔다(Nasir, Hand, & Taylor, 2008, p.218). 즉, 학교 밖 일상 문화에서의 수학적 활동은 학교수학으로 대체되어야 할 대상이 아니라 다문화적 관점에서 학교수학에 포함되어야 하며 억압적인 전통적 수학수업의 구조에서 학생들을 해방시키고 학생들의 사회적 문화적 정체성을 개발해야 한다는 것이다(Nasir et al., 2008, pp.217-220). 이러한 개혁시도는 문화접변을 통해 m에서 M으로 학생들을 밀어 올리려는 것으로 문화주의(Culturalism)라고 할 수 있다.

인지주의와 문화주의의 상반된 시각은 인간의 활동과 문화에 대한 견해의 차이에서 비롯된다. 두 관점 모두 '수학이 다양한 인간의 활동에서 기원 한다'(MacLane, 1981, p.463)는 점에는 동의하지만 문화주의의 관점에서 활동의 의미는 문화 안에서 상황화 되어 있기 때문에 수학이 '우리의 모든 활동의 전제'가 되는 문화를 초월할 수 없는 반면 (Heymann, 2003, p.22), 인지주의 관점에서 논리-수학적 구조는 가장 광범위하게 일반화되는 생명체의 조직 기능에서 출발하여 신경의 조정을 거치는 활동의 일반적 조정에서 비롯되므로 '생물체의 산물'일 뿐인 사회나 문화를 초월한다(Piaget, 1971, p.368). 결국 인지주의와 문화주의는 m에서 M으로의 이동이라는 학습의 진행방향에 있어서는 일치하지만 이러한 지렛대의 운동을 가능하게 하는 지렛대의 받침을 어디에 두는가 하는 점에서 서로 다른 견해를 보이는 것으로 해석할 수 있다. 인지주의와 문화주의가 각각의 지레받침을 놓은 위치를 각각 TL(Top Line)과 BL(Bottom Line)이라 하면 수학화와 응용이라는 관계로 직접 연결되었던 M과 m이 실제로는 단절된 것처럼 나타난다. [그림 II-1]과 같이 Chevallard가 인식론적 관점에서 M과 학교수학의 차이를 명확히 하며 그 사이에 그어 놓은 TL과 D'Ambrosio가 학교수학과 m의 practice의 차이를 조명하면서 사이에 그어 놓은 BL이 M과 m사이의 새로운 공간을 드러내며 학교수학을 그 사이의 공간에 위치시키는 것을 가능하게 한다.



[그림 II-1] M 과 m 및 두 경계선 TL과 BL

본 연구자의 관점에서 볼 때 D'Ambrosio와 Chevallard의 학교수학이라는 관념은 모두 학습대상과 학습과정을 엄격히 분리시킨 Plato적 전통의 흐름 속에 위치한다. 영어 'mathematics'의 어원인 그리스어 $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$는 학습주제, 수업, 지식의 학습 등을 뜻하는데(Liddell & Scott, 1891, p.422), Plato가 교수주제 또는 학습주제라는 일반적 의미를 갖는 $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$의 외연을 수학적 주제에 한정하여 사용하였고 이러한 전통은

Aristotle에 이르러 확립되었다(Heath, 2003, p.5). 따라서 mathematics는 그 자체로 학교수학의 의미를 함의하며 M은 학교수학을 포함한다. D'Ambrosio와 Chevallard는 모두 이러한 Plato적 전통 위에 서있는 학교수학 관념에 기초하여 각자의 교수-학습의 관점을 학교수학과 결합시키는 과정에서 학교수학의 반대편 경계를 바라보고 있다. 그러나 Plato가 M으로서의 mathematics를 설정하기 이전에 이미 학교수학은 존재하였으며 그러한 학교수학은 의도된 수학교육과정으로 한정되기보다 교수-학습과정 그리고 교사와 학생들의 산물이 혼재되어 있는 학교수학적 지식(SM)으로서 존재하였다. 이는 그리스 시대 수학자 집단의 연구 결과의 결정체로서(Artmann, 1999) 오류가 제거되고 경제적 사고가 실현되어 있는 Euclid 원론과는 달리 창의적인 요소와 함께 정돈되지 않고 비효율적이며 반복적이고 오류적인 요소도 갖는 교수-학습과정의 산물인 지식체이다.

증거는 빈약하지만 기원전 4000년 무렵의 메소포타미아 지역에서는 이미 학교에서 수학을 가르치고 배운 듯하며 기원전 3000년경의 텍스트 중 SM을 보여주는 증거가 많이 발견되었다는 점에서(Hфyrup, 2007, p.261) '수학교육은 수학만큼이나 오래된 것으로'(Robson, 2000b, p.105), mathematics의 의미가 고대 그리스 시대에 확립되기 훨씬 이전부터 이미 SM이 존재하고 있었다고 할 수 있다. 특히, 기원전 2000년경의 고대 바빌로니아의 '수학 텍스트는 모두 학교 텍스트'라는 점에서(Hфyrup, 2007, p.269) 고대 바빌로니아의 수학은 SM으로 간주된다. 실제로 이 시대에 문제를 포함하는 점토판은 일반적인 해법을 보여주기 위한 의도로 사용되었으며 모든 풀이는 거의 항상 '그렇게 푸는 것이다'라고 끝맺는다 (Bunt, Jones, & Bedient, 1988, p.58). Chevallard (1990)와 D'Ambrosio(1994)는 모두 이론적 지식의 추구여부에 기반을 둔 Plato의 mathematics관념에 기초하여 교수-학습 과정을 그 대상으로부터 분리시키기 때문에 고대 바빌로니아의 수학을 학교수학으로 보지 못 한다. 즉, Chevallard(1990)의 관점에서 고대 바빌로니아의 SM은 고대 그리스의 수학과는 달리 증명을 통한 일반화를 추구하지 않았기 때문에 원시수학에 해당하며 D'Ambrosio (1994, p.232)의 관점에서 이는 관료나 측량사와 같은 특정한 직업집단의 문화 내에서 '전승되는 지식'으로서 민속수학의 일부이다. 이렇듯 인지주의와 문화주의는 m과 M의 이분법적인 구도 안에서 학교수학을 M에 포함시킴으로써 학교라는 사회의 체계 안에서 작동해왔던 수학교육의 역사적 기능과 그 기제를 간과한다. 그러나 고대 바빌로니아의 수학은 교수-학습 과정의 산물로서 m이나 M 또는 배워야 할 것으로서의 학교수학에 해당하지 않으며 오히려 교육의 기능이 작동하여 나타난 결과물이기 때문에 기존의 학교수학이라는 관념으로는 이를 설명할 수 없다.

인류의 초기 문명에서부터 수학교육이 이루어졌다면 고대에서 현재에 이르기까지 SM의 구성과정에 관여하는 모종의 공통 기제가 존재할 것이라 가정할 수 있다. 고대 바빌로니아에서 현대에 이르는 일관된 SM의 발전사를 기술하는 연구물은 없다는 점에서 이러한 가정은 논란의 여지가 있을 수 있으나[5] 그러한 SM의 역사가 따로 존재하지 않는다고 해도 Piaget(1971)의 '기능적 불변성(functional invariant)'의 개념을 사회체계와 문화에 적용하면 학교에서 SM을 구성해나가는 공통 기능이 존재하며 그러한 기능을 갖춘 기제

---

5) 현재 M과 독립된 SM의 역사를 따로 기술한 연구는 없으며 그러한 기술이 가능한지도 알 수 없다. 독립된 SM의 역사기술이 상상에 불과할 수 있지만 고대 바빌로니아 SM의 유산이 현재에 이르기까지도 시간의 분과 초를 60진법으로 나타내는 것과 같이 모종의 영향을 미치고 있기 때문에(Aaboe, 1998, p.22) 그 가능성이 전혀 없는 것은 아니라고 생각한다.

는 현대의 새로운 수학교육 환경 특히 인터넷과 같은 가상공간에서도 여전히 작동할 것으로 가정할 수 있다. 최근의 고고학적으로 문맥화 된 수학사연구는 이러한 가정을 뒷받침한다.

III. 고대 바빌로니아의 학교수학적 지식

메소포타미아 지역에서 나오는 유적 중에는 소위 Eduba[6] 텍스트라 하는 학교교육 관련 점토판이 있다. Kramer(1949, pp.205-207)가 해독한 기원전 2000년경의 점토판에는 한 소년이 아침 일찍 학교에 가서 필기술(scribal art), 세기와 회계 등을 포함하는 학교공부를 하였는데 잘 하지 못해서 선생님께 회초리를 맞았다는 내용이 나온다. 또한 다른 점토판에서는 아버지가 선생님을 집으로 초대해서 가장 좋은 자리에 모시고 아들이 선생님 앞에서 배운 것을 펼쳐 보이도록 한다. 이 때, 아들이 잘 하자 아버지는 기쁨에 겨워 선생님께 좋은 술을 따르고 선물을 드리며 선생님은 소년을 축복하면서 배움의 신인 Nibada에게 감사드리도록 한다. 이러한 내용으로부터 고대 바빌로니아에 학교교육과정이 존재했으며 또한 세기나 회계와 같은 모종의 수학을 가르쳤다는 것을 알 수 있다.

20세기 초까지 기존의 수학사 연구는 19세기 메소포타미아 지역에서 무분별하게 발굴되어 그 출토지가 불분명한 점토판의 내용을 해독하는데 초점이 맞추어져 있었으며 그 당시 학교교육과 수학적 텍스트 사이의 관련성을 파악하지 못 하였다. 현대수학의 관점에서 해석된 고대 바빌로니아의 수학적 텍스트는 (e.g., 60진법, (세)제곱과 (세)제곱근, 수열의 합, 피타고라스 수, 방정식의 해법 등) M의 역사의 한 장(章)으로 기술되었다 (e.g., Boyer, 1991; Kline, 1972). 이와는 달리 최근의 고고학적으로 문맥화 된 수학사 연구는 고대 바빌로니아의 수학에 대한 기존의 관점을 수정해야 할 필요성을 제기한다. 예를 들어, 지난 반세기 동안 가장 논란이 되어 왔던 점토판 Plimpton 322가 (Robson, 2002c) 피타고라스 순서쌍의 목록을 기록한 것으로 해석되고 실생활에서의 시행착오 방법으로는 피타고라스 순서쌍을 기록된 것처럼 많이 발견할 수 없기 때문에 (Katz, 1993, p.27), 기존의 수학사에서는 이를 고대 바빌로니아의 '연구수학'으로서 M의 성과물로 간주되어 왔다(Robison, 2001, p.199). 그러나 최근의 새로운 증거들은 피타고라스 순서쌍이 메소포타미아 지역에 있던 고대 학교들에서 다루어진 공통 주제였으며(Robson, 2002c, p.109), Plimpton 322가 그 당시 '교사들의 문제목록'과 비슷하다는 것을 보여준다(Robson, 2002c, p.118). 이러한 측면에서 이 점토판의 저자는 교사일 가능성이 높으며(Robson, 2002c, p.117), 그 용도를 '교수도구'나 '수업보조자료'로 볼 수 있다[7] (Robson, 2001, p.200). Katz(1993, p.1)가 상상하듯이, Plimpton 322는 고대 바빌로니아의 교사가 자신의 학생들을 가르치기 위해 만들어낸 산물일 가능성이 높은 것이다.

고대 바빌로니아의 점토판 중 극히 일부만이

6) Eduba는 메소포타미아 지역에서 사용되었던 Sumer어로 '학교'를 뜻한다(Robson, 2002, p.348). Sumer어는 사화되어 기원전 2000년 경 고대 바빌로니아의 실생활에서는 다른 언어인 Akkad어로 완전히 대체되었음에도 그 당시 학교에서는 오늘날 라틴어와 비슷하게 사용되는 지위를 누렸다.

7) 직업으로서의 수학자가 존재한 것은 그리 오래된 일이 아니며 당시에는 수학자라는 직업이 없었을 것이므로 교사가 M을 개발하는 역할을 했을 것이라고 생각할 수 있다. 그러나 기원전 2000년경의 메소포타미아 지역에서 고대 그리스나 근대 유럽에서와 같이 여가를 누리며 수학적 취미를 즐기는 중산층 계급이 존재했다는 어떠한 증거도 없기 때문에 직업적 수학자는 물론 아마추어 수학자로도 볼 수 없다 (Robson, 2001, p.199).

학교터에서 출토된 것으로 알려져 있었으나 최근 몇몇 도시에서 그 당시 학교에서 만들어진 점토판이 다수 발굴되었고 각 학교의 점토판 중 5~16%는 수학을 포함하고 있어서(Robson, 2002b, p.329) '이 시기의 학교에 수학교육과정이 존재했다는 풍부한 증거'가 되고 있다(Robson, 2000b, p.105). 그 중 Nippur시에서 발굴된 House F는 기원전 1740년 이전부터 학교로 사용되었던 곳인데 이곳에서 출토된 점토판들은 '필경사(scribe) 학교 교육과정에서 수학의 역할을 자세히 기록할 수 있게 한다'(Robson, 2007, p.417). 이 학교터에서 발굴된 1425개의 점토판 중 50%는 초등교육용이며 약 9%가 수학이다. 초등과정에서 학생은 처음 기본 쐐기문자 쓰기를 배우고 긴 목록의 곱셈표, 측량 단위 목록과 분수표 등을 배웠다. 저울의 명칭, 무게와 통의 부피재기 등을 배우고 나면 더 복잡한 형태의 쓰기를 연습하고 60진법으로 부피, 무게, 길이 등의 단위가 커지는 순서로 쓰면서 암기하고 최종 단계에서 판매, 대부, 유산 등에 대한 계약서를 쓰는 법을 배웠다. 이 학교의 교육목표는 '읽고 쓰고 계산할 수 있는 필경사'를 배출하는 것이었다(Robson, 2000a, p.154).

이처럼 고대 바빌로니아의 SM은 필경사 직업교육을 위하여 개발되었으나 적어도 2가지의 다른 기능을 수행한 것으로 보인다. 우선, 고대 바빌로니아의 SM은 두 개의 직업집단인 관료집단과 측량사집단의 practices에서 유래된 '실용수학(practical mathematics)'[8]의 특징을 갖는데 (Hϕyrup, 2007), 학교에서 배우는 많은 용어와 단위, 문제와 풀이 등을 통해 이러한 직업의 전통이 학생들에게 전수되었다. 이로부터 고대 바빌로니아의 SM이 '사회적 필요와 학생들의 자아실현을 위해 문화와 지식을 전달'하는 기능을 수행하고 있었음을 보여준다(NCTM, 1989, p.2). 흥미로운 점은 동시대의 관료집단과 측량사집단에서는 더 이상 사용하지 않는 죽은 용어와 단위 등이 학교에서 문장제 문제를 만드는데 여전히 사용되고 있었으며 과거부터 내려온 많은 문제가 매우 비실재적이어서 더 이상 현실에 적용될 수 없었음에도 그러한 문제들을 학생들이 배우고 있었다는 것이다(Robson, 2000b, p.103; 2001, p.200). 이는 당시 학교교육이 직업교육에 한정되지 않았음을 시사한다.

한편, 고대 바빌로니아의 SM은 어려운 분수를 찾거나 2차 방정식을 푸는 것과 같이 실생활이나 필경사 직업에 필요한 기술습득을 넘어서는 내용을 포함하고 있는데 이는 주로 이전에 전해져 온 것이 아닌 새로운 형태의 문제들이 추가되어 형성된 것으로 실생활이나 직업교육과는 관련이 없기 때문에 Hϕyrup (2007, p.171; p.261)은 '초실용수학(supra-utilitarian mathematics)'[9]이라 특징짓는다. 고대 바빌로니아의 교사들은 초실용문제를 M[10]에서 등차수열이나 무한소수인 유리수와 같은 주제에 대해 직업집단에서 전해져 내려온 m의 대부나 유산과 같은 시나리오를 사용하여 '실재와 유사한 문장제(pseudo-realistic word problems)'를 만들었다(Robison, 2000b, p.103). 즉, 고대 바빌로니아 교사들은 알려진 수학적 지식에서 출발하여 거꾸로 짜깁기하는 방식으로 초실용문제를 만들었으며 이는 새로운 문제를 발견하는 수

8) 각각의 수학을 '관료수학(bureaucratic mathematics)'과 '측량대수학(surveyor's algebra)'이라 한다(Hϕyrup, 2007).

9) 초실용수학은 '대수(algebra)'와 '정수론(number theory)'으로 이루어져 있다(Hϕyrup, 2007),

10) 고대 바빌로니아 시대에 수학자라는 직업은 없었을 것이므로 이론적 지식으로서의 M을 상정하는 것은 적절하지 않으나 M을 그 시대에 알려진 높은 수준의 일반화된 수학지식이라 보자. 예를 들어, 이차방정식의 풀이법이나 오늘날의 표기로 '$1+2+2^2+\cdots+2^{10}$'이나 '$1^2+2^2+\cdots+10^2$'과 같은 주제가 이에 해당된다(Kline, 1972). 그리고 m은 관료나 측량사 집단과 같이 특정한 집단에서 전승되어 온 민속수학적 지식이라 보자.

학자들의 작업과는 다른 것으로(Hφyrup, 2007, p270), 현대의 교사들도 여전히 사용하는 전략이기도 하다.

초실용수학 문제의 간단한 예로는, '넓이가 10 km^2인 직사각형 모양의 땅의 폭이 18 cm일 때 그 길이를 구하여라'[11]이다. 이 문제는 측량사가 실생활 상황에서 마주칠 수 있는 문제가 아니며 간단한 나눗셈 문제도 아닌 것으로 수와 연산에 초점이 맞추어져 있다는 점에서 매우 추상적이고 인위적인 특징을 갖는다. 필경사가 수행하는 행정 업무에 필요한 읽고 쓰고 계산할 수 있는 능력을 배양하는 것은 관련되는 실용적인 문제들을 연습하는 것으로 충분하기 때문에 새롭게 발명된 초실용문제는 '인식론적으로 근본적인 혁신'으로 간주된다(Hφyrup, 2007, p261). 최근의 연구는 이러한 인식론적 혁신이 순수하게 학교교육을 위한 것으로(Hφyrup, 2007; Robson, 2000a; 2000b; 2002a; 2002b; 2002c; 2007), '수학 자체의 심미적 요소'를 주입하는 기능을 하였음을 보여준다(Robson, 2000a, p.154).

고대바빌로니아의 SM은 관료, 측량사와 같은 직업의 전통에서 내려오는 m으로부터 문맥화 된 학습상황을 학생들에게 제공하여 m으로의 전이를 가능하게 함으로써 필경사를 배출하는 기능을 하는 한편, 다른 한편으로는 학생들의 순수한 수학적 능력을 개발하는 기능도 수행하였다. 이 과정에서 고대바빌로니아의 교사들은 교수학적으로 가르치는 지식의 정합성을 확립할 수 있는 '설명하는 원리(a canonical mode of exposition for mathematics)'를 고안하여 SM을 조직하였는데 그 조직방식은 학교별로 달랐다(Hφyrup, 2007, p.207).[12] 이렇듯 M의 지식을 변환하여 SM을 조직하는 과정은 M의 이론화 가능성을 증대시킬 것으로 보인다.[13] 따라서 SM은 m의 문맥화 된 상황을 도입하고 다시 이를 전이하도록 함으로써 m의 활동을 전승하도록 하는 한편, M의 알려진 지식을 교수학적으로 변환하여 도입하는 과정에서 정합성을 추구함으로써 다시 M의 이론화의 필요성을 증대시킨다. 이러한 과정을 통해 SM은 뚜렷이 구분되지 않던 m과 M을 분명하게 경계지으면서 m과 M을 연결하는 기능을 한다. 이렇듯 SM이 m과 M을 연결하는 고유한 기능을 갖는다면 m과 M을 연결하는 것이 수학교육의 중요한 과제라는 Pinxten(1994)의 주장은 '보다 효과적으로'라는 조건이 추가되어야 하며 이를 밝히기 위해서는 SM이 어떠한 방식으로 기능하는지에 대한 이해가 필요하다.

기존의 문화와 지식을 전수하고 수학의 심미적 요소를 주입하는 기능을 하는 고대바빌로니아의 SM은 현대의 SM과 유사해 보인다. 그러나 거시적 측면에서 초실용수학은 이론적 관점에서 M의 발전을 추구하는 것과는 관련이 없었으며 그 당시 사회의 가치체계를 반영하였다. 즉, 다른 필경사들만이 평가해 줄 수 있는 '필경사의 덕(scribal virtuosity)'이 보다 추상적인 수학 문제를 풀도록 하는 추동력이었으며 (Hφyrup, 2007,

---

11) Hφyrup(2007, p.256)이 acre와 inch로 나타낸 것을 다시 MKS 단위로 수치를 변환하여 나타내었다.

12) SM을 정합적으로 조직하려는 이러한 노력은 높은 수준에서 수학을 연역적으로 조직하는 수학자들의 활동과 비슷해 보이지만 이들은 M을 발전시키는 수학자들이 아니며 교육적 목적 아래 SM을 개발한 것이다(Hφyrup, 2007, p270). 고대 바빌로니아의 교사들과 마찬가지로 현대의 수학교사들에게도 수학적 지식의 정합성은 관심사이지만 이는 공리적 방법에 따라 '경제적 사고(economy of thought)'를 추구하는 (Bourbaki, 1950, p.227) 수학자의 정합성과는 그 성격이 다른 것으로 Chevallard의 견해가 잘 드러내고 있듯이 수학교사는 학생들의 인지수준과 이해를 고려하여 수학적 지식을 교육상황에 맞게 도입하고 조직하는 활동을 한다.

13) 고대 바빌로니아의 SM이 M의 이론화를 자극했다는 어떠한 증거도 없다. 그러나 M의 역사에서 SM의 필요성에 따라 M이 이론화된 사례는 찾을 수 있다. 예를 들어, 수학사에서 음수에 대한 교수학적 어려움과 필요성이 새로운 수학인 추상대수를 개발하는 추동력이 되었다(Kleiner, 1995, p.226; Katz, 1993).

p270), 수학 자체에 대한 심미적 즐거움을 깃들게 한 것이었다(Robson, 2000b, p.534). 반면 증명은 필경사가 하는 일과는 아무런 관련이 없었기 때문에 필경사의 덕이 증명된 정리를 개발할 동기를 부여하지는 않았다(Hϕyrup, 2007, p270). 이처럼 외적인 사회적 영향은 학생들의 수학적 능력을 배양하는 동기가 되기도 하지만 수학적 탐구를 제한하기도 한다. 따라서 SM의 거시적 측면은 SM의 연결기능이 M이나 m이외의 다른 사회문화적 요소에 강력한 영향을 받는다는 것을 보여주나, 본고에서는 SM의 미시적 측면에서 교육상황에 초점을 맞춘다.

고대 바빌로니아 교사들은 SM를 조직하기 위해 문제를 만드는데 관심이 있었으며(Hϕyrup, 2007, p270), 앞서 두 가지 기능을 위하여 적어도 두 가지의 교육상황을 구분하여 학생들에게 제공하였던 것으로 보인다. 우선, 교사들은 효과적인 교수를 위해 쉬운 계산 과정과 간단한 수치를 답으로 하는 문제를 설명하기 위한 도구로 사용하였으며, 또한 학생들이 보다 쉽게 연습할 수 있도록 수치적으로 계산하기 좋은 문제들을 개발하였다(Robson, 2001, p.200). 즉, 고대 바빌로니아의 학생들은 새로운 용어와 단위 등을 암기하고 교사들이 제공하는 비슷한 문제들을 반복해서 풀고 교사의 풀이를 단순히 복사하는 방식으로 풀이법을 학습할 수 있는 교육상황을 제공받았다. 고대 바빌로니아 SM의 이러한 측면을 ESMPR(Educational Setting for Mathematical Practice and Readiness)라 하자. ESMPR은 학교교육과정에서 풀이법, 개념적 도구, 기호, 표현 등과 같은 수학적 인공물을 도입하기 위한 교육상황으로 학생들이 이어지는 교육상황에 참여할 수 있는 인지 도구를 제공한다.

한편 초실용문제는 개념과 풀이방법을 설명하고 간단한 예를 통해 연습을 하는 ESMPR과는 다른 교육상황을 제공하는데, Robson(2001, p.200)은 이를 학생들의 수학적 능력을 더 심화시키는 '수학적 창의성을 위한 교육상황 (Educational Setting for Mathematical Creativity)'이라고 특징짓는다. 초실용문제는 실용문제에 비해 훨씬 일반화되고 추상화된 성격을 띠고 있었기 때문에 문제를 푸는 과정에서 학생들은 창의성을 발휘해야 했을 뿐만 아니라 더 많은 오류도 범하였을 것으로 보인다. 실제로, 약 기원전 2500년 전에 만들어진 점토판에서 다음과 같은 초실용문제의 풀이과정 중에 오류가 나타난다.

> 저장고에 40×60 gur의 곡식이 들어있다. 8×60 sila인 각 gur의 곡식을 한 명당 7sila씩 나누어준다. (이 때 몇 명에게 나누어줄 수 있는가?)[14] (Hϕyrup, 2007, p261)

이 문제를 풀기 위해서는 $(40 \times 60) \times (8 \times 60) \div 7$을 계산하여 164,571명과 나머지 3sila를 구해야 하는데 사용되는 수가 실제적으로 사용되기에는 너무 크기 때문에 초실용문제에 해당한다(Hϕyrup, 2007, p261). 이 문제는 간단한 숫자로 이루어진 문제와 풀이법이 유사할 것이나 그 계산과정은 복잡하기 때문에 실용문제에 비해 학생들의 오류를 증가시킬 것이다. 실제로, 이 문제의 풀이를 적은 점토판에서 반쪽의 답이 맞은 반면 다른 반쪽의 풀이는 틀렸다.[15] 이러한 측면에서 Hϕyrup(2007)은 이 점토판들도 교수-학습 과정에서 만들어진 교사와 학생들의 작품일 것으로 추측하고 있다. 학생들

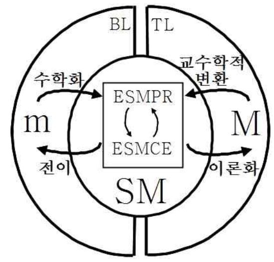
14) Hϕyrup (2007, p261)이 번역한 문장에 문제에 대한 이해를 돕기 위해 괄호의 문장을 추가하였다.

15) 고대 바빌로니아 시대의 점토판 중에서는 점토판을 반으로 나누어 한쪽에 교사가 쓰면 학생이 다른 한쪽에 교사가 쓰는 것을 따라 쓰는 방식으로 만들어진 것이 있다. 또한 같은 문제에 대한 풀이를 적은 6개의 점토판도 발견되었는데 Hϕyrup (2007)은 6명의 학생이 같이 연습을 한 것이던지 한 학생이 6번 반복 연습을 한 것으로 보고 있다.

의 오류는 학교교육 과정에서 ESMPR과 ESMCE 모두에서 발생하겠지만 보다 추상화된 문제가 제공하는 ESMCE에서 학생들이 오류를 더 많이 범할 것이며 자신들의 오류를 수정해 나가는 모종의 과정을 통해 학습하였을 것이라고 볼 수 있다. 이러한 측면에서 Robson(2001)의 '수학적 창의성을 위한 교육상황'은 ESMCE(Educational Setting for Mathematical Creativity and Errors)로 확장될 수 있다.

고대 바빌로니아 학생들은 ESMPR에서 간단한 문제를 연습하고 익힘으로써 필경사 직업준비를 하는 동시에 ESMCE에서 필경사 직업과는 무관한 초실용문제를 풀면서 수학적 능력을 배양하였다. 이를 위하여 고대 바빌로니아 교사들은 m과 M에서의 자원을 사용하여 SM을 조직하고 교육상황을 설계하였으며 새로운 문제를 만들었다. 이는 측량사나 관료로서 m의 활동을 확장하기 위한 것이 아니었으며 수학자로서 M의 새로운 지식을 개발하기 위한 것도 아니었다. 오히려 이는 SM 자체를 발전시키는 활동으로 보아야 한다. 고대 바빌로니아 학생들은 두 문화를 결합시키는 교육상황을 통해 m에서 M으로 점차 이동하였을 것이므로 ESMPR과 ESMCE는 학교교육과정에서 인간의 활동을 더 정교하게 조직하는 하나의 기제라고 생각된다. 새로운 학습주제, 기호체계, 필기방법, 컴퓨터와 같은 교수도구 등과 같이 현대 SM의 거시적 측면을 벗어나면 오늘날 교사와 학생들도 고대 바빌로니아의 교사와 학생들과 마찬가지로 유사한 활동을 하며 이 과정에서 ESMPR과 ESMCE가 작동하는 것으로 보인다.

[그림 III-1]에서 SM은 m과 M을 자원으로 하여 학생들에게 ESMPR와 ESMCE을 제공하는 기능을 수행한다. 즉, SM은 m의 자원을 통해 문맥화



[그림 III-1] SM의 기제로서의 ESMPR과 ESMCE의 연쇄

되는 한편, 다른 한편으로 M에서 알려진 수학 지식으로부터 교수학적으로 변환된다. 이렇게 문맥화 되고 변환된 SM은 일상생활에 다시 전이될 수 있으며 동시에 M의 이론화 가능성을 증대시킨다. ESMPR이 학습자 커뮤니티에 m의 문맥 속에 M의 기호, 개념, 모범 풀이 등을 도입하여 ESMCE에 참여하는 것을 가능하게 하는 인지 도구를 습득할 기회를 제공한다면 ESMCE는 학생들이 ESMPR에서 획득한 인지 도구를 적용하고 그 결과를 반성하게 함으로써 더 높은 수준의 M의 도구가 다시 도입되는 ESMPR로 연결시킨다. 학생들은 m과 M의 결합된 문화를 반영하는 ESMPR과 ESMCE의 연쇄를 거치면서 m의 문맥화 된 유리창을 통해 '보다 넓은 문화의 자원과 기회'로서의 M에 접하고 수학적 능력을 배양해 나갈 수 있으며(Bruner, 1996, p.xv), 이 과정에서 미시적 수준에서 SM의 성장이 이루어진다. 따라서 SM의 기능적 측면에서 볼 때 m과 M사이의 관계는 수학화와 응용으로 단순 도식화될 수 없다. 오히려, 이러한 관계는 SM이 m과 M의 상이한 문화적 요소를 결합시키고 두 영역을 연결함으로써 가능한 것으로 볼 수 있다. ESMPR과 ESMCE의 연쇄의 기제가 m과 M의 문화를 연결하는 기능을 수행한다면 이는 현대적 SM에서도 마찬가지로 작동할 것으로 생각된다.

Ⅳ. 수학내용을 매개로 하는 연결된 앎의 성장

인지주의에서는 인간의 사고를 공간화 하여 학습을 설명하는 반면 문화주의에서는 문화적 practices를 공간화 하는 방식으로 설명하기 때문에 두 패러다임은 서로 통약불가능하다. 인지주의에서는 '이해', '추상화', '개념화 수준' 등의 용어가 학습의 형태와 관련되어 사용되지만 문화주의에서는 학습이 발생하는 문화적 practices에 대한 것으로 본다. 예를 들어, Piaget(1970, pp.17-18)는 추상화를 활동의 수준에서 조작의 수준으로 상승되는 것과 같이 하나의 층위에서 다른 층위로의 전환이라는 의미로 사용하며, 사물로부터의 추상화인 단순추상화와 조정된 활동으로부터의 추상화인 반영적 추상화를 구분한다. 특히, 반영적 추상화는 영어의 reflection이라는 말이 물리적으로 반사라는 의미와 심리적으로 반성이라는 뜻으로 중의적으로 사용되기 때문에 심리적 반성을 통해 하나의 사고의 면에서 새로운 사고의 면으로 반사되어 전환된다는 의미로 사용된다(Piaget, 1970, pp.17-18). 이렇듯 인지주의 패러다임 내에서는 추상화, 개념 수준 등의 용어가 사고를 공간화 하지만, 문화주의 패러다임 내에서는 문화적 practice가 주변부와 중심부로 공간화 되며 추상화란 단어는 학습자가 특정한 community of practice로부터 분리되어 그 practice에 주변부에서부터의 참여(peripheral participation)가 가능하지 않은 것에서 비롯된 것일 뿐(Lave and Wenger, 1991, p.104) 중요한 의미를 갖지 못한다. 문화주의적 관점에서는 문화적 practice로부터의 단절이 어떤 지식이 '구체적'이고 '추상적'이라고 구분하는 세속적인 이분법적 인식론을 강화시켰을 뿐 이들 범주는 세계 속에 구분되는 형태의 지식으로 존재하는 것도 아니며 존재하는 지식의 층위를 반영하는 것도 아니라고 본다. 이와 같이 한편에서는 학생들이 겪는 학습의 어려움이 동화와 조절과 같은 모종의 인지과정을 제대로 거치지 않음으로써 학습자가 추상화된 수학내용을 잘 획득하지 못 하는 것에서 비롯된다고 보며 다른 한편에서는 문화적 practice와 학습자 사이의 단절이 학습 즉, 합법적인 주변부에서부터의 참여(legitimately peripheral participation)를 가로막는 원인이라고 간주한다(Lave & Wenger, 1991).

학습은 존재론적 관점에 따라 주로 획득과 참여라는 두 개의 은유로 개념화 되어 온 바[16](Sfard, 1998), AM과 PM은 인지주의와 문화주의로 특징지어진 수학교육의 커다란 두 흐름에 각각 평행하게 움직여 왔다. AM의 패러다임 내에서 지식은 개념을 기본단위로 하며 외부에 존재하는 것으로 가정된다. 이러한 가정으로부터 AM은 개념을 축적하고 점차 개선하고 결합하여 풍부한 인지구조를 형성함으로써 지식을 내면화하는 것이 곧 학습이라고 간주한다(Sfard, 1998, p.5). AM의 이러한 관점 아래에서는 교사가 학생들에게 지식을 전달하는 것이 가능하나 구성주의자들은 어떤 사람도 다른 사람이 지금 마시고 있는 포도주를 맛볼 수 없는 것과 마찬가지로 의미나 개념, 지식 등을 공유하는 것은 환상에 불과한 것으로 공격해 왔다(von Glasersfeld, 1983, p.41; 1990, p.311). 그러나 지식의 전달 가능성에 대한 이러한 비판은 일부 성공적이었으나 개인이나 사회가 인식주체로서 스스로 개념구조를 구성한다는 구성주의자 자신들의 주장 역시 개인 사이 또는 사회 사이에서의 개념의 통약불가능성이라는 딜레마에 빠뜨리는 부메랑이 된다.

PM의 패러다임에서는 'a community of practice'가 지식이 존재하기 위한 본질적인 조건이기 때문에(Lave & Wenger, 1991, p.98) 인간의 지적활

16) 이를 각각 AM(Aquisition Metaphor)와 PM(Participation Metaphor)이라 표기한다.

동은 '개인이던 집단이던 본질적으로 사회적'인 것이다(Sfard, 2000, p.161). 즉 우리의 모든 생각과 활동은 사회적 구성물이며 개념과 아이디어는 집합적 표현이고 협력을 통해 정교화된 것으로 지식과 그 체계는 항상 이러한 개념과 아이디어의 네트워크의 일부이다(Restivo, 1992, p.xiii). 따라서 어떠한 지식이 존재하는 그 문화적 practice에 참여하는 것이 바로 학습의 인식론적 원리가 된다(Lave & Wenger, 1991, p.98). PM에서 사고는 곧 '담화적 활동'이고(Sfard, 1998, p.6) 앎과 의사소통은 분리불가능하기 때문에(Bruner, 1996, p.3), 고정된 객체로서의 지식이란 단어는 앎(knowing)과 담화로 대체되었으며(Sfard, 1998, p.6), 수학적 의사소통이 수학교육 연구에서 중심 주제가 되어왔다(Sfard, 2000, p.161). PM의 관점에서 의미를 만드는 것은 이 세계와 조우하는 것이 무엇인지 안다는 것이며 이는 그 조우를 적절한 문화적 문맥에 상황화 하는 것을 포함하기 때문에 의미는 문화적으로 상황화 되어 있다(Bruner, 1996, p.3). 따라서 이러한 관점에서는 von Glasersfeld(1983; 1990)가 말하는 '사적인 의미'의 존재여부는 초점이 될 수 없으며 중요한 것은 의미가 문화적 교류의 기초를 제공한다는 점이다(Bruner, 1996, p.3).

PM은 AM의 가정에서 비롯된 난제를 우회하기 위해서 지식을 '객체화'하지 않고 자신들의 패러다임의 어휘목록에서 지식이란 단어를 아예 삭제해 버린다(Sfard, 1998, p.8). 그러나 이는 학습자의 경험의 연속적인 성장에 대한 설명을 어렵게 만듦으로써 AM에서는 발생하지 않는 함정에 PM을 빠뜨린다(Sfard, 1998, p.6). 즉, 어떤 학생의 이전의 수학학습을 고려하지 않고서는 그 학생의 수학학습이란 무엇인지 설명하지 못 하는 것이다(Sfard, 1998, p.10).

1990년대 들어 강의에 기초한 일방적인 전달 방식의 전통적 교수법을 토론 중심의 교수법으로 바꾸려는 수학교육개혁 시도가 계속되어 왔다(NCTM, 1989; 1991; 2000; Becker & Jacob 2000; Swan, 2002). 이러한 과정에서 PM의 패러다임에 위치한 교육자들은 반복연습과 결합된 AM이 학생들에게 '앵무새수학'을 학습하도록 강요한다고 비난하며(Becker & Jacon, 2000, p.532), AM의 패러다임에 위치한 사람들은 토론에 기초한 교수법과 결합된 PM이 학생들이 산만하고 비생산적인 방향에서 방황하도록 방치되어 '퍼지수학'만 학습하고 정작 필요한 수학은 제대로 학습하지 못 하게 한다고 걱정한다(Boaler, 2002, p.45). M에서 도입된 명확하고 세분화된 수학내용은 AM 내에서만 의미를 갖는 반면(Sfard, 1998, p.12), m의 문화에 기초하여 학습자가 자신의 정체성과 활동능력(agency)를 개발하는 수학의 사회문화적 측면은 PM에서 설명할 수 있다. 이러한 점에서 Kant의 표현을 빌리자면 PM없는 AM은 맹목적이며 AM없는 PM은 공허하다.

Sfard(1998)는 AM과 PM의 패러다임 사이에 통약불가능성이 존재함에도 두 패러다임이 양립불가능한 것은 아니라고 본다. 이러한 측면에서 AM과 PM 사이의 균형을 잡는 새로운 이론의 확립은 수학교육 이론가들의 관심사가 되어왔다. 예를 들어, Cobb은 참여가 학습을 제한하거나 가능하게 하지만 학습자체를 결정하지는 않는 것으로 보고 PM을 '학습 가능성의 조건'으로 고려하는 한편(Cobb & Yackel, 1996, p.185), 다른 한편으로 AM을 학생들의 학습 내용과 과정을 들여다보는 창으로 간주한다(Cobb, 1994). 최근에 Sfard(2008)는 communication과 cognition을 합성하여 'comognition'이라는 신조어를 제시하면서 개인의 마음과 사회의 practice 사이의 격벽을 제거함으로써 AM과 PM의 통약불가능성에 대한 극복을 시도한다.

AM은 수학내용과 '학습자의 연결(the knower's being connected with)'을 설명하는 반면(Bolaer &

Greeno, 2000, p.191), PM은 학습자 커뮤니티 내에서의 '연결된 앎(connected knowing)'을 설명한다(Boaler & Greeno, 2000, p.177). 그러나 AM은 연결된 앎을 도외시하고 PM은 '잘 정돈된 학습 주제의 증발'이라는 문제를 갖는다(Sfard, 1998, p.10), 이렇듯 두 패러다임은 서로 상충되지만 SM의 측면에서는 ESMPR과 ESMCE를 통해 서로 보완하며 기능하는 것으로 보인다. 물론 두 교육 상황 모두에서 AM과 PM의 패러다임이 작동할 수 있겠지만, 본 연구자는 ESMPR에서 교육과정 내의 새로운 지식내용을 습득함으로써 학생 개인이 참여에 필요한 인지 도구를 획득하고 이를 바탕으로 ESMCE에서 협력을 통한 SM의 구성과정을 경험할 수 있을 것으로 본다. 이러한 두 과정의 연쇄를 통해 수학내용을 매개로하는 연결된 앎의 성장 즉, 상호학습자 커뮤니티 내에서 m이나 M과는 독립된 지식체로서 SM의 성장[17]을 설명하는 것은 두 패러다임을 상보적으로 조화시키는 하나의 방안이 될 수 있다.

Ⅴ. 학교수학적 지식의 성장

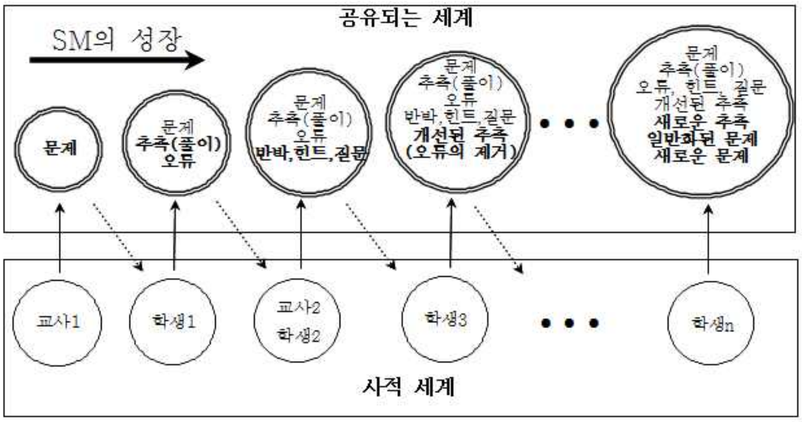
미시적 측면에서의 SM의 질적 성장과 관련하여 주목할 만한 두 가지 이론은 Bruner의 문화심리학적 접근과 Popper의 세계3이다. Bruner(1996, pp.165-166)는 마음과 문화의 관계를 마음이 문화를 창조하고 문화도 마음을 창조하는 상호관계로 보며 학습 역시 모든 문화에서 발생하는 하나의 문화적 현상으로 문화와 마음 사이의 상호작용을 통해 가능하다고 본다(Bruner, 1996, p.166). Bruner(1996)의 문화와 마음의 상호작용은 Popper(1978, p.160)가 피이드백 관계라 부르는 '사고과정'으로서의 세계2와 '사고내용'으로서의 세계3 사이의 상호작용과 비슷하다. 문화와 세계3은 '인간 마음의 산물'라는 공통점을 갖지만 (Popper, 1978, p.144), Popper(1978)는 세계3의 추상적인 대상 자체와 그 추상물이 책과 같은 세계1의 물리적 대상으로 구현된 것을 구분하고 물질을 포함하는 포괄적인 문화의 개념을 Plato의 이데아와 비슷한 세계3으로 축소시킴으로써 세계3의 객관성과 자율성을 드러내고자 한다. 학습은 이러한 세계3의 객관성과 자율성에 따르는 행위이며 이해라는 행위로서의 개별적인 세계2의 과정도 이러한 세계3과 관련지어서 설명될 수 있다(Popper, 1989, p.164). 즉, 우리는 세계3에서 $P_1 \to TT \to EE \to P_2$[18]라는 추측과 반박의 방법을 사용하여 학습하므로(Popper, 1989, p.164), 지식은 곧 협력의 산물인 것이다(Bruner, 1996, p.23). 이러한 측면에서 지식은 단순히 정보만 담고 있는 것이 아니라 그 지식에 대해 어떻게 생각해야 하는지에 대한 방안도 포함하고 있어서 학습이란 개인적 활동으로 보여도 근본적으로 타인과의 상호작용에 바탕을 둔 상호학습(mutual learning)이다(Bruner, 1996, p.23). 상호학습이란 학습이 단지 말하고 보여주는 것에 의해 이루어지는 것이 아니라 서로에게서 배워나가는 상호작용임을 뜻하며, Bruner(1996, p.22)는 상호학습자 커뮤니티를 형성하는 것이 인간 문화의 본질이라고 본다. 이와 비슷한 관점은 동양에서도 찾아 볼 수 있는 바, 예기(禮記)에 나오는 교학상장(敎學相長)은 교사는 가르치면서 발전하고 학생은 배우면서 성장한다는 말로 교사와 학생이 형성하는 상호학습자 커뮤니티를 설명하고 있다.

Bruner(1996, p22)는 프랑스 심리학자 I. Meyerson을 따라 모든 집합적 문화 활동의 주요 기능은

17) 지식의 성장이라는 개념은 분명 철학적으로 논란이 되는 중심 개념이다. 그러나 본고에서는 그러한 성장이 가능하며 실제로 이루어지고 있다고 소박하게 간주한다.
18) P_1: 문제, TT: 잠정적인 이론 또는 TS: 잠정적인 해결, EE: 오류의 제거, P_2: 새로운 문제.

작품(oeuvres)을 생산하는 것이라고 설명한다. 거시적 측면에서 SM은 사회의 작품이며 미시적 측면에서 SM은 상호학습자 커뮤니티를 형성하는 교사와 학생의 작품이다. 고대 바빌로니아의 점토판에서 나타나는 모델 풀이, 예시 문제, 초실용문제, 학생들의 습작, 풀이에서의 오류 등이 그 당시 교사와 학생들의 작품으로서 고대 바빌로니아의 SM을 상징하듯이 오늘날 교과서, 학생들의 숙제, 활동지 풀이, 시험문제, 오답, 교사의 지도안 등은 현대의 SM을 상징한다. 이러한 산물은 창의적인 측면뿐만 아니라 오류적인 측면도 함께 지니며 개인 활동의 산물로 보여도 근본적으로는 상호학습자 커뮤니티에 참여함으로써 이루어진 것이다. 양적 측면에서 SM의 성장은 이러한 산물의 총합으로 볼 수 있고 보다 좁게는 학생 개개인이 획득한 지식을 점수로 환산할 수 있으나 질적인 측면에서의 SM의 성장은 협력을 통한 수학적 지식의 구성 과정의 경험으로 규정될 수 있다. 상호학습은 개인의 인지발달을 수반하지만 상호학습의 사회적 과정이 AM의 측면에서 개인의 학습으로 대체되지 않는다는 점에서 Bruner(1996)는 교실 수준에서 상호학습자 커뮤니티를 형성할 것을 강조한다. 이러한 맥락에서, 일군의 수학교육자들은 학생들이 '수학을 하는 것을 배울 수(learning to do mathematics)' 있도록 (Schoenfeld, 1996, p.11) 서로 협력하여 탐구해나가는 과정에서 SM의 성장을 질적으로 경험할 수 있는 탐구 커뮤니티(Community of Inquiry)를 수업에서 형성할 것을 강조해 왔다(e.g., Lampert, 1990; Schoenfeld, 1996; Boaler, 1999; Goos, 2004). 예를 들어, Schoenfeld (1996)는 학부의 문제풀이 활동에 집중하는 강좌에서 탐구 커뮤니티를 형성하고 자신도 그 안에서 학생들의 새로운 아이디어로부터 배웠던 경험을 보고하고 있다. 그러나 실제 수업에서 탐구 커뮤니티를 형성하는 일은 매우 어려워서 학생들이 서로 연결된 앎의 성장을 경험하기보다 퍼지수학만을 배우는데 그칠 수도 있다.

SM의 질적 성장 즉, 수학내용을 매개로하는 연결된 앎의 성장을 설명하기 위해 본고에서는 Garrison의 실천적 탐구모델(Practical Inquiry Model)에 Popper의 추측과 반박을 결합시켜 [그림 V-1]과 같이 제시한다(Garrison, Anderson, & Archer, 2000; Garrison, 2007). 이 모델은 세계3과 비슷하게 커뮤니티 내에서 공유되는 세계(Shared World)를 상정함으로써 개인의 사적 세계(Private World)가 수학내용을 매개로 Popper(1989)의 추측과 반박의 모델을 통하여 연결되는 사회적 과정을 드러낸다. 이 모델에서 공유되는 세계는 수학적 의사소통으로 드러나는 세계이며 대면수업에서 말로 진행되는 경우보다 인터넷 공간과 같이 텍스트를 기반으로 하는 경우에 상호학습 커뮤니티의 작품으로서의 SM의 성장 과정이 보다 쉽게 시각적으로 잘 드러난다. 세계3에서 수학내용이 독립적으로 존재하여 객관적인 수학 내용이 자율적으로 성장하듯이 상호학습자 커뮤니티의 수학적 사고와 풀이는 개인과는 독립적으로 공유되는 세계에 존재하고 구성원의 참여에 따라 공유되는 세계 내의 지적 풍경이 시시각각으로 변하고 자율적으로 성장하게 된다. 개별 학습자는 변화되는 지적 풍경에 상황화 됨으로써 지식의 획득이 가능하며 개인의 사고는 공유되는 세계를 통해 다른 학습자와 연결되고 공유되는 세계 내에 저장된 아이디어와 지식이 협력을 통하여 발전되는 과정이 순환적으로 일어나면서 개인의 학습과 SM의 성장이 계속적으로 이루어진다. 이 과정에서 AM을 통해 학습자가 공유되는 세계로의 참여가능성을 살펴볼 수 있으며 공유되는 세계에서 아이디어와 지식의 공유를 통해 상호학습이 이루어지는 과정은 PM을 통해 검토할 수 있다. 본연구자의 관점에서 이 모델은 ESMPR보다는 상호학습 커뮤니티의 구성원들이



[그림 V-1] 학교수학적 지식의 성장

창의적 아이디어를 제시할 가능성과 오류를 발생시키는 빈도가 높아지는 ESMCE에서 상대적으로 더 잘 작동할 것으로 예측된다.

SM의 성장을 보여주는 예는 앞서 Schenfeld (1996) 등의 연구결과가 있지만 본고에서는 개개인의 성취를 평가하는 학교의 시험 상황과 비슷한 경시 대회에서도 추측과 반박을 통한 SM의 질적 성장이 가능하다는 것을 보여주는 예를 제시한다. Gauss의 천재성을 보여주는 유명한 일화에서 교사는 ESMPR에서 2자리 정도의 덧셈을 학습한 초등학생들에게 $1+2+3+\cdots+100$이라는 도전적인 문제를 제시함으로써 ESMCE를 제공한다. Boyer(1991)는 Gauss가 창의성을 발휘하여 다음의 식과 같은 방식의 아이디어를 생각하여 풀었을 것으로 예측한다.

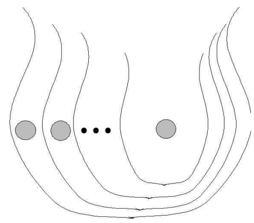
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

고등학교 수준에서는 이 공식을 배우므로 앞서 Gauss의 문제는 ESMPR에서 기본적인 예로 제공되지만 초중등수준에서는 배우지 않으므로 ESMCE에서 작동한다. 이 때, 교사는 잘 알려져 있는 위의 식에 m의 시나리오를 입혀 고대 바빌로니아 교사들과 마찬가지로 짜깁기하는 방식으로 새로운 문제를 만들어 ESMCE를 제공할 수 있다. 예를 들어, 미국의 6-8학년 경시 대회인 MATHECOUNTS에서는 다음과 같은 문제가 제시되었다.

> 각각의 주머니에 최소한 한 개 이상의 조약돌을 담아야 하며 어느 두 개의 주머니에도 같은 개수의 조약돌을 넣지 않는다고 할 때, 190개의 조약돌을 담는 주머니의 최대개수를 구하여라 (MATHECOUNTS Foundation, 1999, p.8).

이 문제의 저자들이 준비한 답안은 첫 번째 주머니에는 한 개, 두 번째 주머니에는 두 개, 그리고 n번째 주머니에는 n개의 조약돌을 담는다고 생각하면 $1+2+\cdots+n=190$이므로 방정식 $n(n+1)/2=190$의 해 19를 구하는 것이었다. 그러나 경시대회에 참가한 한 학생이 자신의 답이 맞다고 계속해서 주장하자 주최측은 준비된 답안과 학생의 아이디어를 검토하였고 그 결과 학생의 아이디어가 수용되었다. 그 학생의 풀이는 각 주머니에 한 개의 조약돌을 집어넣고 다시 각 주머니 안에 주머니를 넣는 방식으로 하여 최대 190개의 주머니가 필요하다는 것이었다 [그림 V-2]. 흥미롭게도 대학교수, 중고등 교사, 기술 전문직 종사자 등 40여명이 출제된 문제를

검토하였는데 이 풀이를 생각하지 못 하였다 (MATHECOUNTS Foundation, 1999, p.45).



[그림 V-2] 주머니 속의 주머니

“학습과 사고는 항상 하나의 문화적 상황에 상황화 되어 있으며 문화적 자원을 사용하는 것에 종속 된다”(Bruner. 1996, p.4). 이러한 문화적 상황성은 일상적 m의 문맥에서 주머니 안에 주머니를 넣는 것은 거의 일어나지 않기 때문에 이 예에서 출제자들과 검토자들이 그러한 가능성에 대해 생각하지 못 한 이유를 설명해 준다. 한편, 우리는 일상적인 m의 자원과 일반적인 M의 자원이 도입된 ESMCE에서 발생한 m과 M의 문화적 충돌이 추측과 반박을 통해 해소되는 과정을 볼 수 있다. 문제에서 주머니는 물리적인 세계1의 원소가 아니라 어떠한 물건이든 넣을 수 있는 기능을 가진 추상적인 대상이며 세계3의 원소로서 주머니 안에 주머니를 제한 없이 넣을 수 있는 논리적 가능성을 만들어 낸다. 이러한 가능성으로부터 추측(준비된 풀이)과 반박(새로운 풀이)의 과정을 거쳐 우리는 보다 나은 아이디어를 배우게 된다. 이렇듯 새로운 풀이의 발견을 통한 상호학습이 가능한 것은 세계3이 ‘독자적인 자율성의 영역’이며(Popper, 1989, p.118), 문제와 풀이 사이의 관계가 논리적 관계로서 객관적인 세계3에 속하기 때문이다(Popper, 1989, p.165).

이 예는 교사와 학생이 SM을 구성해나가는 사회적 과정과 교사와 학생의 상호학습을 보여준다. 수학적 지식의 구성과정에서 교사와 학생들은 새로운 문제, 준비된 정답, 오류, 새로운 정답 등을 만들어 내며 그 과정에서 오류의 제거를 통한 성장의 가능성이 존재한다. 교사들은 알려진 지식을 바탕으로 거꾸로 짜깁기 하여 문제를 만들기 때문에 앞서 예와 같은 오류는 학교 시험에서도 나타날 수 있다. 이 때, 교사들과 학생들이 준비된 답안의 오류를 찾지 못 할 수도 있으며 교사가 권위를 내세워 학생의 반박을 수용하지 않을 가능성도 존재한다. 그러나 건전하고 개방성이 존재하는 커뮤니티에서는 SM의 구성과정에서 검토하고 토론하는 사회적 과정을 통하여 오류를 제거함으로써 SM이 질적으로 성장하는 것을 경험할 수 있다. 상호학습 커뮤니티에서는 학생의 창의성과 오류가 자유롭게 발현되며 교사는 권위를 자신이 아니라 지식의 추구에 귀속시킴으로써 전능한 연설자가 아니라 학생들과 함께 학습하는 구성원임을 자처한다.

이 예는 두 가지 측면에서 중요하다. 우선, SM의 구성과정에서 추측과 반박이라는 학습기제가 작동하여 상호학습이 이루어지며 이로부터 미시적이고 국소적인 수준에서 SM이 질적으로 성장하는 것이 가능하다는 점이다. 이는 인간이 만들어낸 지식으로서 수학은 반박되지 않는 한에서만 잠정적으로 진리가 된다는 오류주의적 관점이 SM에도 적용될 수 있음을 보여준다. 또한, 미시적 수준의 학교 수업에서 교사와 학생들이 만들어내는 창의적이거나 오류적인 산물은 대부분 공유되지 않고 사라지지만, 이 예는 출판되고 공유됨으로써 다른 수학교사들이 알려진 수학지식으로부터 거꾸로 짜깁기하여 문제를 만드는 과정에서 비슷하게 범할 수 있는 오류를 방지한다. 드물기는 하지만 SM의 오류적인 측면이 출판되어 공유되기도 한다(e.g., Barbeau, 2000; Bunch, 1982; Campbell, 2002). 이러한 측면에서 미시적이고 국소적인(local) SM의 성장은 그 결과가 공유될 때 대역적인(global) 성장으로 확대

될 수 있다. 결국, SM의 질적 성장이 가능하기 위해서는 상호학습 커뮤니티의 개방성과 아이디어의 공유가 핵심적인 요소임을 보여준다.

Ⅵ. 결 론

수학사에서 고대 바빌로니아의 수학은 학문적 수학의 성과물로 포함되어 기술되어 왔다. 또한 Chevallard나 D'Ambrosio의 관점에서 볼 때, 고대 바빌로니아의 수학은 학문적 수학 수준에 이르지 못 한 원시수학이나 특정한 직업 집단의 수학적 활동을 반영하는 민속수학으로 간주된다. 그러나 최근의 문맥화된 수학사 연구는 현존하는 가장 오래된 수학인 고대 바빌로니아의 수학이 학교에서 체계적으로 가르치고 배우는 과정의 산물로서(Robson, 2001, p.167), 원시수학이나 민속수학이 아니며 또한 학문적인 수학도 아니라는 것을 보여준다. 이로부터 본 연구는 다음과 같은 두 개의 문제를 제기하고 답하고자 하였다.

첫째, 고대 바빌로니아 교사들과 학생들이 교수-학습 과정에서 만들어낸 문제목록, 모범 풀이, 오류, 학생들의 연습 등과 같은 수학적 텍스트를 학교수학이라 부를 수 있는가? 만약 그렇다면, 오늘날 교수-학습 과정의 산물인 교사의 설명, 판서, 지도안, 시험문제, 오답 및 오류, 질문, 발표, 학생들의 풀이, 숙제, 시험문제와 답안 등 또한 학교수학이라 불러야 한다. 왜냐하면, 지금까지 발굴된 고대 바빌로니아의 수학적 텍스트가 학교에서 수학을 가르치고 배우는 과정에서 나온 산물이기 때문에 학교수학이라 부른다면 현재의 교수-학습 과정에서 나타나는 산물을 발견하게 될 미래의 인류도 같은 이유로 그것을 학교수학이라 부를 것이기 때문이다. 이러한 학교수학의 관념은 Plato이래 유지되어 온 배워야 할 것으로서의 학교수학이라는 관념에서 벗어난다. 따라서 현재의 학교수학이라는 개념은 교수-학습 과정과 그 산물을 포함하도록 확장될 필요가 있다. 본 연구에서는 이렇게 확장된 학교수학의 개념을 학교수학적 지식(SM)이라 하였다.

둘째, 인류의 초기 문명인 고대 바빌로니아에서부터 학교에서 수학교육이 기능해왔다는 사실은 학교수학의 역사가 수학사와 독립적으로 존재할 수 있다는 가능성과 함께 수학교육이 어떻게 기능해왔는가 하는 문제를 제기한다. 최근, Sfard(2008, p.16)도 '학교에서의 학습이 어떤 기제를 통하여 인간의 활동을 계속해서 재조직하고 끊임없이 정교하게 성장시키는가?'라는 학교교육의 기능문제를 제기하고 있다. 교육사는 인간의 삶을 발전시킨 두 요소로 기호의 발명과 교육을 꼽는다(Bowen, 1972, p.2). 즉, 기호는 물리적 실재를 표상의 세계로 대체함으로써 지적 환경을 창조하고 이를 공유가능하게 하였으며 교육은 물리적 환경의 중요성을 감소시킴으로써 인간의 환경의 중심을 사회적이고 지적인 방향으로 지속적으로 이동시켜왔다는 것이다. 이처럼 교육의 발전과 지적 환경의 진화는 상호적으로 이루어져 왔기 때문에, 인식론에 기초하여 교육의 문제를 해결하려는 일방적 시도로는 교육이 인간의 삶을 실제로 어떻게 발전시켜 왔는지에 대해 답할 수 없다. Kant(1900, p.15)는 이미 오래전에 이를 간파하고 "인간이 헌신할 수 있는 가장 위대하면서도 가장 어려운 문제는 교육이다. 그 이유는 인간의 통찰력이 교육에 의존하고 교육은 다시 통찰력에 의지하기 때문이다."라고 하였다. 따라서 인간 지식의 발전으로부터 교육의 발전을 이끌어 내려는 노력뿐만 아니라 그 역방향의 접근도 이루어져야 한다는 점에서 학교수학교육에 대한 기능적 탐구의 필요성이 제기된다. 본 연구는 수학교육의 기능적 측면에 접근하기 위해서 고대 바빌로니아의 SM과 현대의 SM에는 고유한 공통 기능이 존재한다고 가정하

고 그 기능에 대한 분석을 시도하였다. 이로부터 SM이 일상에서의 수학적 활동과 일반적인 지식 사이의 경계를 명확히 하면서 양자를 연결하는 역할을 수행하여 왔다고 보았으며 이를 가능하게 하는 기제로 ESMPR과 ESMCE를 제시하였다.

학교수학에 대한 D'Ambrosio와 Chevallard의 두 관점은 학교수학의 서로 다른 쪽 경계를 명확히 드러낸다. 그러나 이들 관점은 인식론에 기반한 교육 문제의 해결이라는 기존의 흐름에 충실하기 때문에 인류의 초기 문명부터 작동해 온 학교의 기능과 그 산물에 대해서는 설명할 수 없다. 본 연구는 학교교육의 기능적 관점에서 SM의 본질에 대해 접근하기 위해 문화와 수학에 대해 상반된 이들 두 견해를 문화주의와 인지주의라 특징짓고 비교하였다. 수학을 문화적 지식으로 보는 문화주의적 관점에서는 서구수학이 보편타당한 명제를 개발했다는 사실이 곧 서구수학이 문화와 가치를 초월한다는 것을 뜻하지는 않기 때문에 학교수학에서 문화충돌을 고려할 것을 주장하는 반면(Bishop, 1994, p.16), 수학을 인류 전체의 유산으로 보는 인지주의적 관점에서는 현재의 수학은 고도의 추상성과 보편성을 갖춘 지식이기 때문에 서구수학에 기반하는 학교수학은 문화적 차이를 초월하여 배워야 하는 것이다. 본 연구는 수학교육의 연구방향과 교육과정의 결정에 커다란 영향을 미쳐온 인지주의와 문화주의가 충돌하게 되는 원인을 Plato적인 전통 아래 수학적 지식을 학교수학에 적용하는 것에 찾았으며, 두 패러다임의 인식론적 기반인 AM과 PM은 SM의 성장이라는 개념을 통해 상보적으로 결합될 수 있다고 주장하였다. 수학내용을 매개로 연결된 앎의 성장으로서 미시적 수준에서의 SM의 질적 성장은 수학교육목표인 수학내용에 대해 아는 것과 수학자체에 대해 아는 것(Howson, 2005, p.23) 즉, 수학내용의 획득과 수학을 하는 것에 대해 경험하는 것을 동시에 실현 가능하게 한다. 전자는 AM의 패러다임에서 작동하며 후자는 PM으로 뒷받침 된다는 점에서, SM의 질적 성장을 통해 수학교육에서 지배적 학습 패러다임인 AM과 PM을 상보적으로 조화시키는 것이 가능하다.

교육현장에서 SM의 질적 성장이 실제로 이루어지기 위해서는 ESMPR과 ESMCE가 효과적으로 기능할 수 있도록 하는 교육상황의 디자인 문제와 교실수준에서 형성된 상호학습 커뮤니티의 작품에 대한 평가의 문제가 해결되어야 한다. 미시적 측면에서의 SM의 질적 성장은 교육상황의 디자인에 따라 결정된다. 교육상황을 디자인할 때, m과 M에서 도입된 문화적 자원이 공유되는 세계에서 형성하는 지적 풍경과 이러한 풍경이 개인의 지식의 획득과 참여에 주는 영향 등에 대한 면밀한 검토가 필요하다. 교육상황의 디자인의 과정에서 유용하게 사용할 수 있는 두 개의 도구는 Bruner의 문화 심리학과 Popper의 추측과 반박의 방법이다. 문화 심리학은 사적 세계에 있는 개별 학습자를 '협력적 사고자(collaborative thinker)'(Bruner, 1996, p.50)로 변화시킬 수 있는 교육상황에 초점을 맞추는데 도움을 주며 Popper(1968/2002)의 추측과 반박을 이용하여 공유된 세계 내에서 상호학습을 예측하고 분석할 수 있다. 또한, 현대 정보 기술은 인간의 의사소통의 통로를 새롭게 넓혀 놓았으며 이로부터 SM의 성장도 교실 정도의 국소적 수준에서가 아니라 대역적으로 이루어지는 것이 가능해졌기 때문에 관련되는 커뮤니케이션 기술의 발달을 고려하는 것이 필요하다. 인터넷을 기반으로 형성된 상호학습자 커뮤니티는 SM의 대역적 성장의 가능성을 보여준다. 예를 들어, 경시대회를 준비하는 학생들을 돕는 사이트인 Art of Problem Solving에는 세계 각국의 학생들이 제시된 문제에 대해 아이디어를 제시하고 공유하며 상호학습을 진행해가면서 오류를 수정하고 다양

한 아이디어를 개발해 가고 있다. 현재, CSCL (Computer Supported Collaborative Learning)이나 KB(Knowledge Building) 패러다임 내에서 컴퓨터를 통한 상호학습자 커뮤니티를 구축하는 시도가 이루어지고 있으며, [그림 V-1]에 제시된 SM의 성장 모델이 교실수준에서도 인터넷을 통해 실제로 작동하는 결과도 보고되고 있다 (졸고, 2014).

상호학습자 커뮤니티에서의 SM의 성장은 본질적으로 협력학습(collaborative learning)이므로 공유된 세계 내에서의 평가가 이루어져야 한다. 학습자 개인의 반성적이고 의미에 초점을 맞춘 사적 세계에서의 학습 평가가 개인이 획득한 지식의 양을 평가한다면 계획적이고 구조화된 교육 환경과 결합된 공유되는 세계에서의 협력학습 성과물에 대한 평가는 상호학습자 커뮤니티가 생산한 수학적 담화를 양적이면서도 질적으로 평가하는 것이다. 그러나 그간의 평가는 AM의 패러다임 내에서 학생 개인이 얼마나 성장하였는가에 초점이 맞추어져 있었으며 PM의 패러다임 내에서의 사회문화적 측면은 평가에서 도외시 되어왔다(Scardamalia, Bereiter, & Lamon, 1994). 현재의 주된 평가 방식은 인지주의적 관점에서 개인의 머릿속에서 일어나는 과정에 대한 심적 모델에 기초하는 개인별 평가 방식인 바 이는 사적세계에 대해서는 잘 작동하지만 협력학습 과정에서 발생하는 공유되는 의미를 만드는 것을 포착하지 못 하기 때문에(Stahl, 2006, p.8), 공유된 세계에서는 작동하지 않는다. 이러한 측면에서 공유된 세계에서 일어나는 수학학습 과정의 사회적 측면에 대한 평가 방법의 개발이 요구되지만 이와 관련하여 아직까지 아무것도 이루어진 바가 없다 (Scardamalia, 1994, p.211). 따라서 미시적 수준에서 SM의 질적 성장을 어떻게 평가할 수 있는가 하는 문제의 해결은 앞으로 수학교육 연구에서 시급히 해결해야 할 과제 중 하나이다.

참고문헌

Aaboe, A. (1998). *Episodes from the early history of mathematics*. Washington D.C.: MAA.

Artmann, B. (1999). *Euclid-The Creation of Mathematics*. New York: Springer-Verlag.

Barbeau, B. (2000). *Mathematical fallacies, flaws, and flimflam*. Washington D.C.: MAA.

Becker, J. P. & Jacob, B. (2000). The politics of California school mathematics: The anti-reform of 1997-99. *The Phi Delta Kappan, 81*(7), 529-537.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19*(2), 179-191.

Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. *For the Learning of Mathematics, 14*(2), 15-18.

Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice and identity in mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 22*(1), 42-47.

Boaler, J. & Greeno, J. (2000). Identity, agency and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Westport, CT: Alblex Publishing.

Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematics Monthly, 57*(4), 221-232.

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bunch, B. H. (1982). *Mathematical fallacies and paradoxes*. New York: Van Nostrand Reinhold

Company.

Campbell, S. K. (2002). *Flaws and fallacies in statistical thinking*. Minola: Dover Publications, Inc.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schilemann, A. D. (1985/2002). Mathematics om ine streets and in schools. In T. W. Carpenter, J. A. Dossey, & J. L. Koehler (Ed.) *Classics in Mathematics Education Research*(pp.187-193). Reston, VA: NCTM.

Chevallard, Y. (1988). On didactic transpose theory: Some introductory notes. Paper presented at I*nternational Symposium on Research and Development*. Bastislava, Czechoslavakia.

Chevallard, Y. (1990). On Mathematics education and culture: Critical afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics, 21*(1), 3-27.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23*(7), 13-20.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3), 175-190.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Ernest, P. (1994). Social constructivism and the psychology of mathematics education. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematical education* (pp.62-72). London: The Falmer Press.

Garrison, D. R. (2007). Online community of inquiry review: Social, cognitive, and teaching presence issues. *Journal of Asynchronous Learning Networks, 11*(1), 61-72.

Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *The Internet and Higher Education*, 1999(Spring), 87-105.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.

Heymann, H. W. (2003). Why teach mathematics?: A focus on general education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hofstede, G. (1986). Cultural differences in teaching and learning. *International Journal of Intercultural Relations 10*(3), 301–320.

Høyrup, J. (2007). The roles of mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration - carrier of teachers' professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 257-271.

Kang, W. & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 2-7.

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*: Volume 1. New York; Oxford: Oxford University Press.

Kramer, S. N. (1949). Schooldays: A Sumerian composition relating to the education of scribe. *Journal of the American Oriental Study, 69*(4), 199-215.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge, UK: Cambridge University Press

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* New York: Cambridge University Press.

Lee, S. (2014). *The growth of school mathematics: Korean secondary gifted students' collaborative problem solving using the Wiki.* (Doctoral dissertation paper, University of Missouri-Columbia, 2014).

Liddell & Scott (1891). *A Lexicon Abridged from Liddell and Scott's Greek-English Lexicon.* Oxford, UK: Oxford University Press.

MacLane, S. (1981). Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics. *The American Mathematics Monthly, 88*(7), 462-472.

MATHCOUNTS Foundation. (1999). *The all-time greatest mathecounts problems.* Alexandria, VA: Author.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2/3), 255-286.

Moore, C. G. (1994). Research in native american mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 12*(2), 9-15.

Nasir, N. I. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between "Culture" and "Domain" knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education, 32*, 187-4240.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 21-40.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology.* New York: Columbia University Press.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes.* Edinburgh: Edinburgh University Press.

Pinxten, R. (1994) Ethnomathematics and its practice. *For the Learning of Mathematics, 14*(2), 23-25.

Popper, K. (1978). *Three worlds: the tanner lecture on human values*: University of Michigan.

Popper, K. (1989). *Objective knowledge: An evolutionary approach* (revised ed.). Oxford, UK: Oxford University Press.

Popper, K. (2002). *Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge* (reprinted ed.). New York: Routledge Classics.

Robson, E. (2000a). The uses of mathematics in ancient Iraq, 6000-600 BC. In H. Selin (Ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics* (pp. 93-113). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Robson, E. (2000b). Mesopotamian mathematics: Some historical background. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics* (pp. 149-158). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Robson, E. (2001). Neither Sherlock. Holmes nor

Babylon: A reassessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica, 28*, 167-206.

Robson, E. (2002a). Guaranteed genuine Babylonian originals: the Plimpton collection and the early history of mathematical Assyriology. In C. Wunsch (Ed.), *Mining the Archives: Festschrift for C.B.F.* Walker (pp. 245-292). Dresden: ISLET.

Robson, E. (2002b). More than metrology: Mathematics education in an old babylonian scribed school. In J. M. Steele A. Imhausen (Eds.), *Under one sky:Mathematics and astronomy in the ancient Near East* (Vol. 325-365). Münster Ugarit-Verlag.

Robson, E. (2002c). Words and pictures: new light on Plimpton 322. *American Mathematical Monthly, 109*(2), 105-120.

Robson, E. (2007). Mathematics, metrology, and professional numeracy. In G. Leick (Ed.), *The Babylonian world* (pp. 414-427). London: Routledge.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function; A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229-254.

Scardamalia, M. (2002). Collective cognitive resposibility for the advancement of knowledge. In B. Smith (Ed.), *Liberal Education in a Knowledge Society* (pp.67-98). Peru, IL: Carus Publishing Company.

Scardamalia, M., Bereiter, C., & Lamon, M. (1994). The CSILE project: Trying to bring the classroom into world 3. In M. Kate (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp.201-228). Cambridge, MA: The MIT Press.

Schoenfeld, A. H. (1996). In fostering community of inquiry, must it matter that teacher knows"the answer"?, *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 11-16.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher, 27*(2), 4-13.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking & Learning, 2*(3), 157-189.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4- 31

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371-397.

Sierpinska, A. (1995). Mathematics: "In context", "pure", or "with applications"? a contribution to the question of transfer in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 2-15.

Stahl, G. (2009). Toward a science of group cognition. In G. Stahl (Ed.), *Studying Virtual Math Teams* (Vol. 11, pp. 555-579). New York: Springer US.

Thomas, R. (1996). Proto-mathematics and/or real mathematics. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 11-18.

von Glasersfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the 5th annual meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education* (pp.41-101). Montreal: PME-NA.

von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. In *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4: Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.19-29). Reston, VA: NCTM.

Wenger, E. (1998). Community of practice: Learning, meaning, and identity. New York: Cambridge University Press.

Wilder, R. L. (1968). *Evolution of mathematical concepts: An elementary study.* New York: Jonson Wiley & Sons

Zaslavsky, C. (1994). "Africa counts" and ethnomathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(2), 3-8.

What is School Mathematics?

Lee, Seoung Woo (Seoul Science High School)

The nature of school mathematics has not been asked from the epistemological perspective. In this paper, I compare two dominant perspectives of school mathematics: ethnomathematics and didactical transposition theory. Then, I show that there exist some examples from Old Babylonian (OB) mathematics, which is considered as the oldest school mathematics by the recent contextualized anthropological research, cannot be explained by above two perspectives. From this, I argue that the nature of school mathematics needs to be understand from new perspective and its meaning needs to be extended to include students' and teachers' products emergent from the process of teaching and learning. From my investigation about OB school mathematics, I assume that there exist an intrinsic function of school mathematics: Linking scholarly Mathematics(M) and everyday mathematics(m). Based on my assumption, I suggest the chain of ESMPR(Educational Setting for Mathematics Practice and Readiness) and ESMCE(Educational Setting For Mathematical Creativity and Errors) as a mechanism of the function of school mathematics.

* Key Words : School Mathematics(학교수학, 학교수학적 지식), ESMPR(수학적 연습과 준비를 시키는 교육상황), ESMCE(수학적 창의력과 오류가 발현되는 교육상황), Growth of School Mathematics(학교수학적 지식의 성장).

논문접수 : 2015. 7. 10
논문수정 : 2015. 8. 12
심사완료 : 2015. 8. 14