

# 길이를 따라 선형적으로 감소된 폭을 가지는 보의 굽힘 진동에 대한 정확해

## Exact Solutions for Bending Vibration of Beam with Linearly Reduced width Along Its Length

이 정 우\* · 김 정 호\*\* · 이 정 윤†

Jung Woo Lee, Jung Ho Kim and Jung Youn Lee

(Received March 26, 2015 ; Revised June 2, 2015 ; Accepted June 2, 2015)

**Key Words** : Bending Vibration(굽힘진동), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Free Vibration Characteristics(자유진동특성), Bernoulli-Euler Beam(베르누이-오일러 보)

### ABSTRACT

In this paper a transfer matrix method is developed to solve for bending vibration of beam with linearly reduced width, and subsequently used to determine the exact natural frequencies for such problems. The differential equation, shear force, and bending moment are derived from Hamilton's principle, and the roots of the differential equation are computed using the power series solution of the Frobenius method. The effect of various taper ratio for bending vibration of beam with linearly reduced width is investigated in detail, and to validate the accuracy of the proposed method the results computed are compared with those given from commercial software(ANSYS).

### 1. 서 론

테이퍼진 보(tapered beam)에 대한 자유진동특성(free vibration characteristics) 해석은 많은 연구자들에 의해서 다양한 방법으로 수행되었고, 공학적 설계에 널리 사용되고 있다<sup>(1-11)</sup>. 테이퍼진 보의 폭(width)과 높이(height)가 동시에 감소된 것과 높이 치수만 감소된 것, 그리고 보의 길이를 따라 폭이 감소된 보로 구분된다. 일반적으로 많이 연구 되는 것은 높이가 감소된 보 요소에 대한 굽힘 진동이다. 테이퍼진 보의 굽힘 진동을 연구하기 위해 대부분의 연구자들이 형상함수(shape function)를 가정하였고,

이를 사용하여 선형적으로 단면 치수가 감소되는 보에 대한 연구가 보편적으로 수행하였다. 또한, 단진보(stepped beam)를 많은 요소로 이상화함으로써 테이퍼진 보를 연구할 수 있다. 하지만 길이를 따라 감소되는 폭을 가진 보 요소에 대한 조사는 극히 제한된 경우에 대해서만 연구되었기 때문에 이 연구에서 다양한 테이퍼 비(taper ratio)에 대하여 자세하게 조사되었다.

이와 관련하여, 동강성법<sup>(1-3)</sup>을 이용한 유한요소법이 테이퍼진 보에 대한 굽힘 진동 특성을 연구하기 위하여 많은 연구자들에 의하여 연구되었고, Rayleigh-Ritz 법<sup>(4,5)</sup>과 미분변환법(differential transform method)<sup>(6)</sup> 그리고 전달행렬법(transfer matrix method)<sup>(7)</sup>

† Corresponding Author ; Member, School of Mechanical System Design Engineering, Kyonggi University  
E-mail : jylee@kgu.ac.kr

\* Member, KEPCO KPS Technology Research & Development Institute

\*\* Mechanical Engineering, Kyonggi University

‡ Recommended by Editor Heung Soo Kim

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

등이 고려되었다. 그러나 유한요소법이나 다른 근사법과 같은 방법들에 비하여 상대적으로 적은 연구들이 전달행렬법에 대하여 수행되었다. 따라서 이번 연구에서는 테이퍼진 보의 고유진동수를 결정하기 위하여 전달행렬법이 고려되었고, 미분방정식의 근을 결정하기 위하여 멱급수(power series)의 하나인 Frobenius method이 고려되었다<sup>(1,8,9)</sup>.

이번 연구에서의 목적은 전달행렬법을 사용하여 길이를 따라 선형적으로 폭이 감소되는 보의 정확한 고유진동수를 결정하기 위한 것이다. 제안된 방법은 기존의 전달행렬 연구들과는 다르게 장행렬(field matrix)과 점행렬(point matrix)같은 구성요소를 가지지 않지만 기존의 방법과 동일하게 전달행렬의 주요특징들을 가지고 있다. 또한, 한 개의 보 요소로서 무한한 고유진동수를 계산 할 수 있다. 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 상업용 소프트웨어(ANSYS)를 사용하여 계산된 결과들과 비교 되었다.

## 2. 이 론

### 2.1 지배 미분방정식

Fig. 1은 길이를 따라 선형적으로 폭이 감소되는

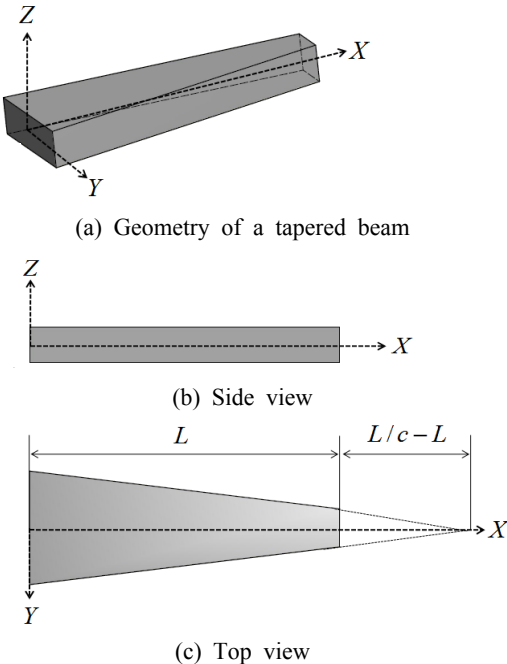


Fig. 1 Notation and coordinate system

보를 도식한 것이고, 단면의 치수 보다 충분히 길이가 크다고 가정하였기 때문에 회전관성과 전단변형이 고려되지 않았다. 여기서,  $XYZ$ 는 전체 좌표계이고  $L$ 은 보의 전체길이,  $c$ 는 테이퍼 비이다.

해밀턴의 원리(Hamilton's Principle)로부터 테이퍼진 보에 대한 미분방정식 및 다양한 힘을 유도 할 수 있다. 해밀턴의 원리의 필수요소인 변형에너지 ( $U$ )와 운동에너지 ( $T$ )는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{(x)} (w'')^2 dx \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_{(x)} (\dot{w})^2 dx \tag{2}$$

여기서,  $EI_{(x)}$ 와  $m_{(x)}$ 는 테이퍼 비로 인해 보 요소의 길이를 따라 변화되는 굽힘 강성과 단위 길이당 질량의 변화를 표현 한 것으로 다음의 식과 같이 쓸 수 있다<sup>(1,8,10)</sup>.

$$EI_{(x)} = EI_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right) \tag{3}$$

$$m_{(x)} = m_0 \left(1 - c \frac{x}{L}\right) \tag{4}$$

여기서,  $EI_0$ 와  $m_0$ 는  $c=0$ 일 때의 굽힘 강성과 단위 길이당 질량이다.

해밀턴의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \tag{5}$$

식 (1)과 (2)를 식 (5)에 대입하고 부분적분을 통하여 지배 미분방정식, 전단력(shear force)과 굽힘 모멘트(bending moment)를 다음과 같이 결정 할 수 있다.

$$(EI_{(x)} w'')'' + m_{(x)} \ddot{w} = 0 \tag{6}$$

$$V = (EI_{(x)} w'')' \tag{7}$$

$$M = -EI_{(x)} w''' \tag{8}$$

여기서,  $V$ 는 전단력이고  $M$ 은 굽힘 모멘트이다.

식 (6)이 각주파수( $\omega$ )를 가지는 조화진동이라고 가정한다면 구조물의 진폭은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$w_{(x,t)} = W_{(x)} \cos \omega t \tag{9}$$

식 (9)를 미분하여 식 (6)에 대입하고 변수를 분리한다면 미분방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$(1-\zeta) W'''' - \frac{2}{L} W'''' - \overline{\omega}^2(1-\zeta) W = 0 \tag{10}$$

여기서,  $\zeta = c\bar{x}$ ,  $\overline{\omega}^2 = \frac{m_0\omega^2}{EI_0c^4}$  이고  $\bar{x} = x/L$ 이다.

### 2.2 미분방정식의 일반해

식 (10)의 정확한 근들은 멱급수의 하나인 Frobenius Method을 사용하여 결정할 수 있으며 일반해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{11}$$

여기서,  $a_{i+1}$ 은 멱급수의 계수이다.

식 (11)을 미분하여 식 (10)에 대입하고 정리하면 지수  $k$ 와 계수  $a_{i+1}$ 값들을 결정 할 수 있고, 다음과 같이 멱급수의 결정방정식(indicial equation)이 얻어진다.

$$k(k-1)(k-2)(k-3)a_1 = 0 \tag{12}$$

또한, 순환관계(recurrence relationship)에 의해 일반화된 계수들에 대한 식이 다음과 같이 결정된다.

$$a_{i+5} = \frac{k+i+\frac{2}{L}}{(k+i+4)} a_{i+4} + \frac{\overline{\omega}^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_{i+1} - \frac{\overline{\omega}^2}{(k+i+1)(k+i+2)(k+i+3)(k+i+4)} a_i \tag{13}$$

그리고 계수  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 그리고  $a_5$ 의 값들은 다음과 같이 주어진다.

$$a_1 = 1 \tag{14}$$

$$a_2 = \frac{k-3+\frac{2}{L}}{(k+1)} a_1 \tag{15}$$

$$a_3 = \frac{k-2+\frac{2}{L}}{(k+2)} a_2 \tag{16}$$

$$a_4 = \frac{k-1+\frac{2}{L}}{(k+3)} a_3 \tag{17}$$

$$a_5 = \frac{k+\frac{2}{L}}{(k+4)} a_4 + \frac{\overline{\omega}^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_1 \tag{18}$$

따라서, 식 (12)에서 주어진 지수  $k$ 의 4개에 값에 대해 미분방정식의 일반해가 다음과 같이 주어진다.

$$W(\zeta) = A_1 f(\zeta, 0) + A_2 f(\zeta, 1) + A_3 f(\zeta, 2) + A_4 f(\zeta, 3) \tag{19}$$

식 (19)의 함수  $f(\zeta, k)$ 는 다음과 같다.

$$f(\zeta, k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \zeta^{k+i} \tag{20}$$

### 2.3 전달행렬

식 (20)을 미분함으로서 변형곡선의 기울기( $\Phi$ )는 다음과 같이 된다.

$$\Phi = c \{ A_1 f'(\zeta, 0) + A_2 f'(\zeta, 1) + A_3 f'(\zeta, 2) + A_4 f'(\zeta, 3) \} \tag{21}$$

식 (7)과 식 (8)에 식 (11)을 미분하여 대입하면 전단력과 굽힘 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$V = EI_0 c^3 \left\{ (1-\zeta) f'''(\zeta, j-1) - \frac{1}{L} f''(\zeta, j-1) \right\} A_j \tag{22}$$

$$M = -EI_0 c^2 (1-\zeta) f''(\zeta, j-1) A_j \tag{23}$$

고정단과 자유단에서의 보 요소의 길이  $x$ 는 0과  $L$ 이므로  $x=0$ 을 식 (19), (21)~(23)에 대입하고 행렬 형태로 표현하였을 경우 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

식 (24)는 식 (25)와 같이 단수하게 표현할 수 있고,

$$\{Z\}_i = [C_{ij}]\{A_j\} \quad (25)$$

이 식으로부터 상수  $A_j$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$\{A_j\} = [C_{ij}]^{-1}\{Z\}_i \quad (26)$$

동일한 방법으로  $x = L$ 을 식 (19), (21)~(23)에 대입하고 행렬형태로 표현한다면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} W \\ \Phi \\ M \\ V \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)을 다음과 같이 단순하게 표현하고

$$\{Z\}_{i+1} = [H_{ij}]\{A_j\} \quad (28)$$

식 (26)를 대입하면 폭이 선형적으로 감소된 보의 굽힘 진동에 대한 전체 전달행렬이 얻어진다.

$$\{Z\}_{i+1} = [T_{ij}]\{Z\}_i \quad (29)$$

여기서,  $[T_{ij}] = [H_{ij}][C_{ij}]^{-1}$ 이다.

식 (29)의 전체 전달행렬에 다양한 경계조건을 적용함으로써 시스템의 고유진동수를 계산 할 수 있으나, 하나의 예로써 Cantilever 경계조건이 고려되었다. Cantilever 경계조건은 고정단에서 변위들이 0이 되고

$$W, \Phi = 0 \quad (30)$$

자유단에서 힘이 0이 된다.

$$M, V = 0 \quad (31)$$

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 적용 예

제안된 방법의 정확성을 논리적으로 검증하기 위

**Table 1** Material properties

Notation	Description	Value
$E$	Elastic modulus	200 GPa
$\rho$	Density of beam material	7850 kg/m <sup>3</sup>
$L$	Length of beam	0.8 m
$b_0$	Width of cross-section	0.03 m
$h_0$	Height of cross-section	0.01 m

**Table 2** The first three natural frequencies when  $c=0$

Mode number	Natural frequency (Hz)		
	$c = 0$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	12.740	12.763	0.178
2	79.842	79.925	0.104
3	223.56	223.55	-0.005

하여 Table 1에서 주어진 물성치가 사용되었고, 제안된 방법으로 계산된 고유진동수들이 ANSYS를 사용하여 얻어진 결과들과 비교되었다. Table 1에서  $b_0$ 와  $h_0$ 는 테이퍼 비가 0일 때, 다시 말해, 감소되지 않은 사각 단면의 폭과 높이 이다. 또한, 회전관성과 전단변형의 영향을 최소화하기 위해 폭과 높이에 비해 상당히 긴 구조물이 선택되었다.

#### 3.2 결과 및 고찰

검토된 테이퍼 비는 0부터 0.9까지 0.1간격으로 증가 되었고, Table 2에 테이퍼 비가 0일 때 계산된 고유진동수들이 나타나있고, ANSYS로부터 주어진 것들과의 비교 결과 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 또한, Tables 3~5에 테이퍼 비가 0.1부터 0.9까지 계산된 결과들이 비교 되어있다.

Table에서 비교된 결과들을 보아서 알 수 있듯이 제안된 방법으로부터 주어진 결과와 ANSYS를 사용하여 계산된 결과가 아주 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 하지만, 이 결과를 얻기 위하여 제안된 방법은 1개의 요소를 사용하였고, ANSYS는 평균 7370 개의 요소가 사용되었다. 또한, 결과들 사이의 차이 (Diff. (%))는 다음의 식으로 계산되었다.

$$Diff.(\%) = \frac{\omega_{ANSYS} - \omega_{Present}}{\omega_{ANSYS}} \times 100\% \quad (32)$$

**Table 3** Effects of tapering on the first three natural frequencies when  $c=0.1, 0.2$  and  $0.3$

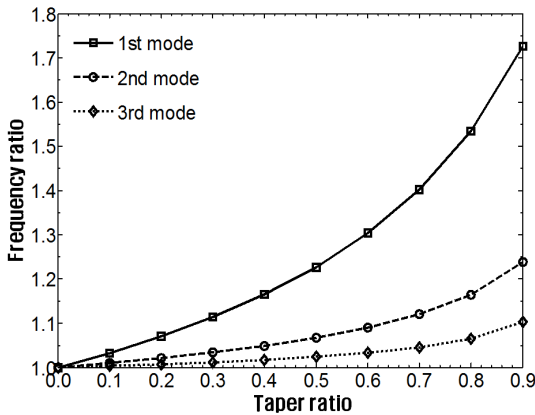
Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$c = 0.1$			$c = 0.2$			$c = 0.3$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	13.157	13.180	0.175	13.635	13.658	0.171	14.190	14.213	0.164
2	80.638	80.719	0.101	81.535	81.616	0.099	82.565	82.645	0.097
3	224.33	224.31	-0.009	225.21	225.18	-0.013	226.24	226.20	-0.017

**Table 4** Effects of tapering on the first three natural frequencies when  $c=0.4, 0.5$  and  $0.6$

Mode number	Natural frequency(Hz)								
	$c = 0.4$			$c = 0.5$			$c = 0.6$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	14.845	14.869	0.159	15.636	15.660	0.154	16.615	16.640	0.152
2	83.771	83.849	0.094	85.222	85.300	0.091	87.041	87.117	0.088
3	227.47	227.43	-0.018	229.00	228.95	-0.023	231.00	230.94	-0.028

**Table 5** Effects of tapering on the first three natural frequencies when  $c=0.7, 0.8$  and  $0.9$

Mode Number	Natural frequency (Hz)								
	$c = 0.7$			$c = 0.8$			$c = 0.9$		
	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)	Present	ANSYS	Diff. (%)
1	17.870	17.896	0.147	19.558	19.587	0.147	21.996	22.027	0.141
2	89.455	89.529	0.083	92.964	93.037	0.078	98.918	98.986	0.069
3	233.81	233.74	-0.031	238.23	238.15	-0.036	246.81	246.69	-0.050



**Fig. 2** Effects of tapering on the natural frequencies of beam

선택된 예제를 통하여 검토된 결과들로부터 제안된 방법의 정확도가 논리적으로 증명되었고, 다양한 테이퍼 비에 대한 영향이 검토 되어 Fig. 2에 그 결과들이 보여진다. 일반적으로 높이가 테이퍼진 보는 1차 고유진동수가 증가하고, 2차 및 3차 고유진동수는 감소하는 것으로 문헌<sup>(8)</sup>에서 보고되었으나 폭이

테이퍼진 보는 모든 고유진동수가 테이퍼의 영향으로 증가 되는 것으로 확인되었고, 1차 고유진동수가 테이퍼 비의 영향이 가장 큰 것으로 확인되었다.

#### 4. 결 론

이 길이를 따라 선형적으로 감소되는 폭을 가진 보에 대해 정확한 고유진동수를 제안된 전달행렬법을 이용하여 해석하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 질량행렬과 강성행렬을 가지는 기존의 전달행렬법과는 다르게 구성요소로 이들 행렬을 가지지 않는 새로운 전달행렬법을 개발하였다.

(2) 테이퍼 보에 대해 정확한 형상함수를 가정함으로써 맥급수를 통하여 미분방정식의 근을 결정하였고, 제안된 방법에 적용함으로써 1개의 요소를 사용하여 폭이 테이퍼진 보에 대해 정확한 고유진동수들을 결정할 수 있는 전달행렬법이 개발되었다.

(3) 길이를 따라 선형적으로 감소되는 폭을 가진 보에 대한 테이퍼의 영향을 조사하기 위해 테이퍼 비를 0에서 0.9까지 0.1단위로 증가시켜 그 영향을

검토하였다. 또한, 검토된 3개의 고유진동수가 모두 테이퍼의 영향으로 증가되는 것으로 확인되었고, 1차 고유진동수는 다른 고유진동수들에 비하여 그 영향이 더 큰 것으로 확인되었다.

## 후 기

이 연구는 2015학년도 경기대학교 대학원 연구원 장학생 장학금 지원에 의하여 수행되었음.

## References

(1) Banerjee, J. R., 2000, Free Vibration of Centrifugally Stiffened Uniform and Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 5, pp. 857~875.

(2) Leung, A. Y. T. and Zhou, W. E., 1995, Dynamic Stiffness Analysis of Axially Loaded Non-uniform Timoshenko Columns, *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 4, pp. 577~588.

(3) Spyrakos, C. C. and Chen, C. I., 1990, Power Series Expansions of Dynamic Stiffness Matrices for Tapered Bars and Shafts, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, No. 2, pp. 259~270.

(4) Zhou, D. and Cheung, Y. K., 2001, Vibrations of Tapered Timoshenko Beams in Terms of Static Timoshenko Beam Functions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 4, pp. 596~602.

(5) Lu, Z. R., Huang, M., Liu, J. K., Chen, W. H. and Liao, W. Y., 2009, Vibration Analysis of Multiple-Stepped Beams with the Composite Element Model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 4-5, pp. 1070~1080.

(6) Ozgumus, O. O. and Kaya, M. O., 2006, Flapwise Bending Vibration Analysis of Double Tapered Rotating Euler-Bernoulli Beam by Using the Differential Transform Method, *Meccanica*, Vol. 41, No. 6, pp. 661~670.

(7) Stafford, R. O. and Giurgiutiu, V., 1975, Semi-analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 17,

No. 11-12, pp. 719~727.

(8) Wang, G. and Wereley, N. M., 2004, Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers, *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 12, pp. 2429~2437.

(9) Gunda, J. B., Gupta, R. K. and Ganguli, R., 2009, Hybrid Stiff-string-polynomial Basis Functions for Vibration Analysis of High Speed Rotating Beams, *Computers & Structures*, Vol. 87, No. 3-4, pp. 254~265.

(10) Gunda, J. B. and Ganguli, R., 2008, New Rational Interpolation Functions for Finite Element Analysis of Rotating Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, No. 3, pp. 578~588.

(11) Lee, J. H. and Yoo, H. H., 2009, Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Having Tapered Cross Section, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 363~369.



**Jung Youn Lee** is Professor of Dept. of Mechanical System Engineering at Kyonggi University, where he has been since 1996. He received a B.S., an M.S. and his Ph.D. from Hanyang University in 1979, 1889 and 1992 respectively. His research interests are in System Identification, Structural Modification, Inverse Problem, Modal Analysis and Sensitivity Analysis of Vibration.



**Jung Woo Lee** received B.E. and M.S. in mechanical engineering in 2002 and 2004, respectively, from Kyonggi University, Suwon, Korea. He has been working as a researcher in Technology Research and Development Institute at KEPCO KPS. In March of 2012, he enrolled at Kyonggi University as a doctoral student under the supervision of Professor Jung Youn Lee at mechanical system engineering.