

# 집중질량과 초기 비틀림을 갖는 회전중심방향 자유단 외팔보의 진동해석

## Vibration Analysis of Rotating Pre-twisted Inward Beams with a Concentrated Mass

이 건 호\* · 유 흥 희†

Gun Ho Lee and Hong Hee Yoo

(Received November 27, 2014 ; Revised June 9, 2015 ; Accepted June 9, 2015)

**Key Words** : Vibration Analysis(진동 해석), Rotating Inward Cantilever Beam(회전중심방향 자유단 외팔보), Pre-twisted(초기 비틀림), Euler-Bernoulli Beam Theory(오일러-베르누이 보 이론), Hybrid Deformation Variable Modeling(복합 변형 변수를 이용한 모델링)

### ABSTRACT

The vibration analysis of rotating inward beams considering the pre-twisted is presented based on Euler-Bernoulli beam theory. The frequency equations, are calculated using hybrid deformation variable modeling along with the Rayleigh-Ritz assumed mode methods. In this study, resulting system of ordinary differential equations shows the effects of angular speed, and Young's modulus ratio. It is believed that the results will be a reference with which other researchers and commercial FE analysis program, ANSYS can compare their result.

### 1. 서 론

회전중심방향 자유단 외팔보의 구조물은 터보휀, 믹싱 터보휀 엔진에 활용되고 있다. 원심력을 받는 이러한 구조물의 진동에 관한 연구는 현재까지 활발히 수행 되어왔다<sup>(1-3)</sup>. 구조물의 회전으로 인해 외팔보의 강성이 감소하여 진동특성 또한 변하게 된다. 따라서 회전으로 인한 진동특성 변화를 정확히 예측하기 위한 연구의 중요성은 강조되고 있어 많은 연구가 수행되고 있다.

회전중심방향 자유단 외팔보 구조물의 진동특성에 관한 연구를 설명하기 앞서 일반적인 회전 구조

물의 연구는 1920년대 초부터 시작되었다. 초기의 연구들에서는 현재까지도 그 간편성 때문에 널리 쓰이고 있는 Southwell<sup>(4)</sup> 방정식이라 불리는 고유진동수 예측 식이 소개되고 발전 개선되었다. 1970년도 이후에는 컴퓨터를 이용한 수치해석적 방법을 통하여 고유진동수 및 모드형상을 구하는 연구결과들이 등장하게 되었으며 또한 참고문헌과 같이 진동방정식을 해석적으로 직접 풀이하는 방법도 등장하게 되었다<sup>(5-7)</sup>.

이 논문에서는 일반적인 회전 구조물의 연구와 다르게 회전중심축방향 자유단 외팔보의 진동특성을 주제로 연구를 수행하였으며, 이에 관련된 논문으로 Mostaghel, N. et al<sup>(8)</sup>의 연구가 있다. 그 후 Fox,

† Corresponding Author ; Member, School of Mechanical Engineering, Hanyang University  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

\* Member, School of Mechanical Engineering, Hanyang University

# A part of this paper was presented at the KSNVE 2014 Annual Autumn Conference

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

C. H. J. et al<sup>(9)</sup>는 Mostaghel, N. et al<sup>(8)</sup>의 연구 결과를 발전시켜 초기 장착각을 고려하여 회전중심축 방향 자유단 외팔보의 진동특성 변화에 관한 연구를 수행했다. 그러나 이 연구들에서는 회전중심축방향 자유단 외팔보에서 흔히 나타나는 집중질량과 초기 비틀림을 갖는 구조형태를 고려하지 않았다. 반면 이 논문에서는 초기 비틀림을 갖는 회전 중심축 방향 자유단 외팔보가 임의의 위치에 집중질량을 갖는 경우의 진동특성 연구를 수행하는데 목적을 두었다. 이 연구는 참고문헌<sup>(10)</sup>에서 제시된 일반 회전 구조물에 집중질량과 초기 비틀림을 갖는 회전 외팔보의 모델링에 근거 하였으며 여기에 참고문헌<sup>(9)</sup>에 제시된 회전중심방향 자유단 외팔보의 모델링을 종합하여 외팔보의 길이에 대한 축반경비, 회전각속도, 비틀림각, 집중질량의 크기 및 위치 등에 의한 진동특성 변화를 종합적으로 조사하였다는 점에 고유성을 갖는다. 운동방정식을 얻기 위해 복합 변형 모델링과 Kane의 방법을 이용하여 유도하였고 상용 프로그램인 ANSYS를 통해 얻은 결과와 유도된 방정식을 통해 얻은 결과를 비교하여 제안된 모델의 정확성을 검증하였다.

이 논문의 구성으로는 2장에서 동적 모델링에 의한 운동방정식을 유도하며 3장에서는 유도된 운동방정식에 근거하여 정확성을 검증하기 위해 회전중심 방향 자유단 외팔보의 진동해석결과를 결과를 참고 문헌<sup>(11)</sup>과 비교하였다. 기존의 결과에서 비틀림을 추가하여 얻어낸 해석 결과를 상용 프로그램 ANSYS를 통해 비교하여 검증하였다. 마지막 장에서는 이 논문의 결론을 수록하였다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 운동방정식

Fig. 1은 반경  $r$ 의 디스크에 고정되어 평면에서  $\hat{a}_3$  방향으로  $\omega$ 만큼 회전 운동하는 외팔보를 보여준다. 디스크 축에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이 나타나 있으며,  $L$ 은 빔의 길이를 이고  $d$ 는 집중질량의 위치이다.

Fig. 2는 외팔보의 회전에 의한 변형 시 형상을 나타내며 탄성변위의 의미와 고정단에 고정되어있는 외팔보의 기준 좌표계를 나타낸다.  $x$ 는 외팔보와 디스크가 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의 질점까지 거리를,

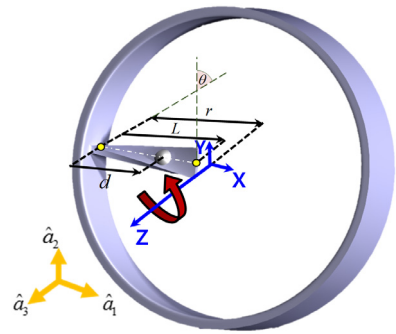


Fig. 1 Configuration of a pre-twisted inward beam with a concentrated mass fixed to a rotating rigid ring

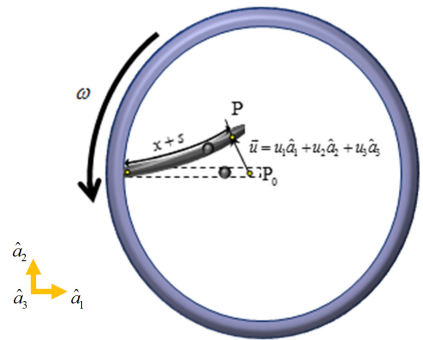


Fig. 2 Inward beam with a concentrated mass attached to a rotating rigid ring

$s$ 는 외팔보 중립축의 임의의 점에서 보가 인장된 길이를 나타낸다.  $P_0$ 는 변형 후  $x+s$ 의 길이를 갖는  $P$ 의 위치로 이동된다. 모드방법을 이용해 상미분 운동방정식으로 구하기 위해  $s, u_2, u_3$ 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \tag{1}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \tag{2}$$

$$u_3(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \tag{3}$$

여기서,  $\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}$ 는  $s, u_2, u_3$ 를 위한 가상모드이다.  $q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}$ 는 일반좌표 그리고  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ 는 각각 사용된 일반좌표의 개수이다. 반경  $r$ 인 강체축  $A$ 의 각속도와 외팔보의 고정점  $O$ 의 속도는

다음과 같이 사용한다.

$$\bar{\omega}^A = \omega \hat{a}_3 \tag{4}$$

$$\bar{v}^0 = -r\omega \hat{a}_2 \tag{5}$$

운동방정식을 유도하기 위해 먼저 P점의 속도  $\bar{v}^p$  는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{v}^A = (\dot{u}_1 + \omega u_2) \hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + (x-r+u_1)\omega] \cdot \hat{a}_2 + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \tag{6}$$

식 (6)에서  $u_1$ 은 근사화를 위해 최종적으로  $s$ 와  $u_2$ 로 나타내야 하며, 이를 위하여 다음의 근사화된 관계식이 유도되어(참고문헌 (12) 참조) 사용된다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma \tag{7}$$

속도  $\bar{v}^p$  를 이용하면 시스템의 운동방정식은 다음 식으로부터 유도될 수 있다

$$\int_0^L \rho \bar{a}^p \cdot \left( \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial q} \right) dx + \frac{\partial U}{\partial q^j} = 0 \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, \dots, \mu_i)$$

여기서,  $L$ 과  $\rho$ 는 블레이드의 길이와 단위길이당 질량을 나타내며,  $U$ 는 탄성에너지로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial s}{\partial x^2} \right)^2 + EI_3 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + EI_2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + 2EI_{23} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right) dx \tag{9}$$

여기서,  $E$ 는 블레이드의 영의계수,  $A$ 는 단면적이다. 임의 단면에서 블레이드의 2차면적 모멘트와 프로덕트를 나타내는  $I_2, I_3, I_{23}$ 를 주면적 모멘트  $I_2^*$ 와  $I_3^*$ 로 나타내면

$$I_2(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*(x)}{2} + \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta)$$

$$I_3(x) = \frac{I_2^*(x) + I_3^*}{2} - \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \cos(2\theta)$$

$$I_{23}(x) = \frac{I_2^*(x) - I_3^*(x)}{2} \sin(2\theta) \tag{10}$$

$$\theta \equiv \theta_0 \frac{x}{L}$$

여기서,  $\theta$ 는 블레이드의 임의의 단면에서 비틀림각을 나타내며, 따라서 블레이드의 고정단에서  $\theta=0$ , 블레이드의 자유단에서  $\theta=\theta_0$ 이다. 이상의 식들을 이용하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} (K_{ij}^s - \omega^2 M_{ij}^{11}) q_{1j} - 2\omega \sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} = P_{i1} \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + 2\omega \sum_{j=1}^{\mu_1} M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{B23} q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (K_{ij}^{G2} + K_{ij}^{B2} + \omega^2 M_{ij}^{22}) q_{2j} = 0 \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{B32} q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (K_{ij}^{G3} + K_{ij}^{B3}) q_{3j} = 0 \tag{13}$$

여기서,

$$M_{ij}^{ab} = \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx$$

$$K_{ij}^{Ga} = -r\omega^2 \left[ \int_0^L \rho(L-x) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \right] + \omega^2 \left[ \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \right]$$

$$K_{ij}^s = \int_0^L EA \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \tag{14}$$

$$K_{ij}^{B2} = \int_0^L EI_3 \phi_{2i}'' \phi_{2j}'' dx$$

$$K_{ij}^{B3} = \int_0^L EI_2 \phi_{3i}'' \phi_{3j}'' dx$$

$$K_{ij}^{Bab} = \int_0^L EI_{23} \phi_{ai}'' \phi_{bj}'' dx$$

$$P_{i1} = -r\omega^2 \int_0^L \rho \phi_{i1} dx + \omega^2 \int_0^L \rho x \phi_{i1} dx$$

블레이드의 임의 지점에 집중질량이 추가로 붙어 있는 것을 모델링하기 위해 블레이드의 단위길이당 질량을 나타내며 집중질량의 임의의 지점  $x=d$ 에서 충격함수(Dirac's delta function)로 가정하고, 방정식에서  $\rho$ 와 관련된 항들을 다시 구하면 다음과 같다.

$$\hat{M}_{ij}^{ab} \equiv M_{ij}^{ab} + m \phi_{ai}(d) \phi_{bj}(d)$$

$$\hat{K}_{ij}^{Ga} = K_{ij}^{Ga} + m(d-r)\omega^2 \int_0^d \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \tag{15}$$

$$\hat{P}_{i1} = P_{i1} + m(d-r)\omega^2 \phi_{i1}(d)$$

여기서,  $m$ 은 임의의 지점에 위치한 집중질량의 크기를 나타낸다. 블레이드의 인장방향 고유진동수와 굽힘방향 고유진동수는 그 차이가 크므로 이들의 연성에 의한 효과는 무시될 수 있으므로 이 논문에서는 그 효과를 무시하고 수치해석을 하였다. 연성 효과를 무시할 때 집중질량을 고려한 항들의 식 (11~13)에 대입하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \hat{M}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} (\hat{K}_{ij}^{G2} + K_{ij}^{B2} - \omega^2 \hat{M}_{ij}^{22}) q_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} K_{ij}^{B23} q_{3j} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \hat{M}_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3} (\hat{K}_{ij}^{G3} + K_{ij}^{B3}) q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{B23} q_{2j} = 0 \quad (17)$$

### 2.2 무차원 운동방정식 유도

유도된 운동방정식, 식 (16)과 (17)을 무차원화 하기 위해 다음과 같이 시간과 공간 그리고 일반좌표 변수들을 무차원화 한다.

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \frac{t}{T} \\ \xi &\equiv \frac{x}{L} \\ g_{ai} &\equiv \frac{q_{ai}}{L} \\ \delta &\equiv \frac{r}{L} \\ \alpha &\equiv \frac{m}{\rho L} \\ \beta &\equiv \frac{d}{L} \\ \gamma &\equiv \omega T \\ \kappa &\equiv \frac{I_2^*}{I_3^*} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서  $T$ 는 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho_0 I^*}{EI_3^*}} \quad (19)$$

무차원 변수로 정의된 식 (18)를 이용하여 식 (10)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{I_2^*(x)}{I_3^*} &= \frac{1}{2}(\kappa+1) + \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \\ \frac{I_2^*(x)}{I_3^*} &= \frac{1}{2}(\kappa+1) - \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \\ \frac{I_{23}^*(x)}{I_3^*} &= \frac{1}{2}(\kappa-1)\sin(2\theta_0\xi) \end{aligned} \quad (20)$$

이상의 관계식들을 이용하여 식 (16)과 (17)을 무차원화된 방정식들로 만들면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[ \bar{M}_{ij}^{22} \ddot{g}_{2j} + \left\{ \bar{K}_{ij}^{B2} + \gamma^2 \left( \bar{K}_{ij}^{GA2} + \alpha(\beta-\delta)\bar{K}_{ij}^{GB2} - \bar{M}_{ij}^{22} \right) \right\} g_{3j} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_3} \bar{K}_{ij}^{B23} g_{3j} = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \left[ \bar{M}_{ij}^{33} \ddot{g}_{3j} + \left\{ \bar{K}_{ij}^{B3} + \gamma^2 \left( \bar{K}_{ij}^{GA3} + \alpha(\beta-\delta)\bar{K}_{ij}^{GB3} \right) \right\} g_{3j} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_2} \bar{K}_{ij}^{B32} g_{2j} = 0 \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}^{ab} &= \int_0^1 \varphi_{ai} \varphi_{bj} d\xi + \alpha \varphi_{bi}(\beta) \varphi_{aj}(\beta) \\ \bar{K}_{ij}^{B2} &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa+1) - \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{2i}'' \varphi_{2j}'' d\xi \\ \bar{K}_{ij}^{B3} &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa+1) - \frac{1}{2}(\kappa-1)\cos(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{3i}'' \varphi_{3j}'' d\xi \\ \bar{K}_{ij}^{GAa} &= \int_0^1 \left[ -\delta(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right] \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi \\ \bar{K}_{ij}^{GBa} &= \int_0^\beta \varphi_{ai}' \varphi_{aj}' d\xi \\ \bar{K}_{ij}^{Bab} &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(\kappa-1)\sin(2\theta_0\xi) \right\} \varphi_{ai}'' \varphi_{bj}'' d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

$\varphi_{aj}$ 는  $\phi_{aj}$ 와 같은 함수값을 가지나  $\xi$ 의 함수이며  $\ddot{g}_{aj}$ 는  $g_{aj}$ 의  $\tau$ 에 관한 2차 미분을 나타낸다. 식 (21)와 (22)에서  $\ddot{g}_{2j}$ 와  $\ddot{g}_{3j}$ 로 구성되어 있는 column 벡터를  $g$ 라 한다. 이 벡터를 시간에 대한 조화함수로 가정하면 다음과 같다.

$$g = e^{j\omega\tau} \eta \quad (24)$$

여기서  $\omega$ 는 고유진동수이며  $\eta$ 는 모드형상을 나타

내는 모드벡터이다. 식 (24)를 이용하여 식 (21)와 (22)은 다음과 같이 표현한다.

$$\omega^2 M \underline{\eta} = K \underline{\eta} \tag{25}$$

여기서  $M$ 과  $K$ 는 대칭 정방행렬들로 그 요소들은 다음과 같이 표시된다.

$$M = \begin{bmatrix} \bar{M}^{22} & 0 \\ 0 & \bar{M}^{33} \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$K = \begin{bmatrix} \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \bar{K}^{32} & \bar{K}^{33} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\bar{M}^{22} = [\bar{M}_{ij}^{22}]$$

$$\bar{M}^{33} = [\bar{M}_{ij}^{33}]$$

$$\bar{K}^{22} = [\bar{K}_{ij}^{B2} - \gamma^2 (K_{ij}^{G42} + \alpha(\beta - \delta)\bar{K}_{ij}^{GB2} - \bar{M}_{ij}^{22})] \tag{27}$$

$$\bar{K}^{33} = [\bar{K}_{ij}^{B3} - \gamma^2 (K_{ij}^{G43} + \alpha(\beta - \delta)\bar{K}_{ij}^{GB3})]$$

$$\bar{K}^{23} = \bar{K}^{B32}$$

$$\bar{K}^{33} = \bar{K}^{B32}$$

### 3. 수치해석

이 장에서는 앞에서 유도된 무차원 진동방정식을 사용하여 수치 해석을 수행하였다. 수치 해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드(assumed modes)들로는 회전중심방향 자유단 외팔보의 굽힘 진동모드들을 사용하였으며 10개의 모드를 이용하였다.

Fig. 3은 회전중심방향 자유단 외팔보의 유도된 운동방정식의 정확성과 검증하기 위해 회전경우에 대해서 기존결과 참고문헌(11)과 비교하였다. 최대 오차율 0.3% 오차 결과 비교는 이 연구에서 제시된 모델링 방법을 검증하고 신뢰성을 보여준다고 판단된다.

Fig. 4는 집중질량과 초기 비틀림을 갖는 회전중심방향 자유단 외팔보가 집중질량 비의 변화에 따른 고유진동수를 나타냈다. 수치해석 결과는 ANSYS와 비교하여 검증하였다. ANSYS의 유한요소 모델은 beam 188 요소를 사용하였고 집중질량은 mass 21

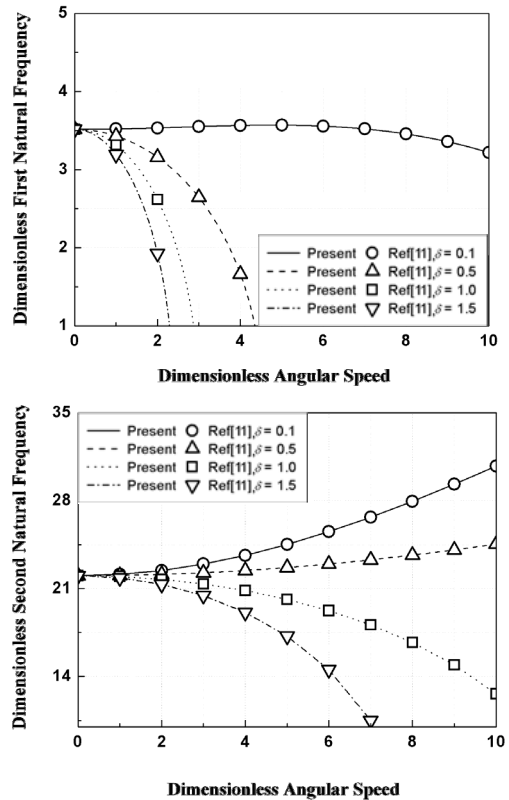


Fig. 3 Comparison of natural frequencies obtained by proposed EOM and reference

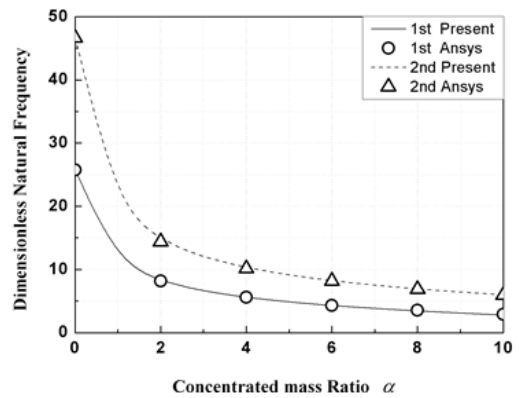
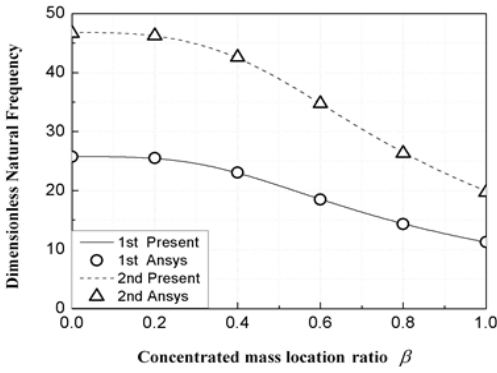


Fig. 4 Concentrated mass ratio effect on the natural frequencies ( $\beta = 1, \gamma = 6, \kappa = 0.25, \theta_0 = 90, \delta = 1$ )

요소를 사용하였다. 집중질량 비는 고유진동수를 0에서 2사이에 급격히 변화시키며 그 이후는 완만한 변화를 보여주고 있다.

Fig. 5에서는 집중질량의 임의의 위치가 변할 때의



**Fig. 5** Concentrated mass location effect on the natural frequencies( $\alpha=1, \gamma=6, \kappa=0.25, \theta_0=90, \delta=1$ )

고유진동수를 나타낸다. 수치해석 결과는 ANSYS와 비교하여 검증하였다. 무차원 변수  $\delta$ 가 1로 가까워 질수록 자유단으로 가까워지며 1이었을 때는 자유단 끝에서의 집중질량의 위치를 나타낸다. 무차원 집중 질량의 위치가 0.3정도까지는 고유진동수의 작은 변화만 초래하나 그 이후는 급격한 변화를 보여주고 있다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 임의의 지점에 집중질량과 초기 비틀림을 갖는 회전중심방향 자유단 외팔보의 진동특성을 예측하기 위한 모델링 방법을 제시하였으며 보다 일반적인 결과를 얻기 위해 무차원 운동 방정식의 형태로 전환하였고 이에 근거한 수치 해석을 수행하였다. 그 해석결과와 정확성은 수치 해석 결과를 참고문헌과 ANSYS의 무차원 고유진동수를 비교하여 규명하였다. 수치해석 결과는 회전 각속도, 집중질량의 위치 비, 집중질량의 무게, 초기 비틀림, 빔의 길이와 단면적의 비의 변화를 예측하였다. 그리고 이 연구에서 사용된 모델링 방법은 터보팬 또는 가정용 풍력 발전기의 회전익 분야에 사용되고 있으므로 논문에서 제시된 방법이 위의 조건들을 고려한 외팔보의 구조설계 시에 유용하게 사용될 수 있으리라 판단된다.

#### 후 기

이 연구는 2011년도 산업통상자원부 재원으로 한

국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다(No. 20111510100050).

#### References

- (1) Fox, C. H. J., 1985, The Free Vibration of Compact Rotating Radial Cantilevers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 98, No. 3, pp. 325~336.
- (2) Naguleswaran, S., 1994, Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Uniform Euler-Bernoulli Beam, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 176, No. 5, pp. 613~624.
- (3) Turhan, O. and Bulut, G., 2005, On Nonlinear Vibrations of a Rotating Beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, No. 1-2, pp. 314~335.
- (4) Southwell, R. and Gough, F., 1921, The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades, *British A.R.C Reports and Memoranda No. 766*.
- (5) Schihansl, M., 1958, Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28~30.
- (6) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (7) Lee, J. H. and Yoo, H. H., 2010, Vibration Analysis of Rotating Blades with the Cross Section Taper Considering the Pre-twist Angle and the Setting Angle, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 20, No. 1, pp. 10~21.
- (8) Mostaghel, N. and Tadjbakhsh, I., 1973, Buckling of Rotating Rods and Plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 15, No. 6, pp. 429~434.
- (9) Fox, C. H. J., 1979, The Natural Frequencies of a Thin Rotating Cantilever with Offset Root, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 65, No. 2, pp. 151~158.
- (10) Yoo, H. and Shin, S., 1998, Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.
- (11) Naguleswaran, S., 1997, Out-of-plane Vibration of a Uniform Euler-Bernoulli Beam Attached to the Inside of a Rotating Rim, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 200, No. 1, pp. 63~81.
- (12) Kane, T. R. and Levinson, D. A., 1985,

Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York.



**Hong Hee Yoo** received his B.S. and M.S. degrees in the Department of Mechanical Design in Seoul National University in 1980 and 1982. He received his Ph.D. degree in the Department of Mechanical

Engineering and Applied Mechanics in the University of Michigan at Ann Arbor in 1989. He is a professor in the Department of Mechanical Engineering

at Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include multi-body dynamics, structural vibration, and statistical uncertainty analysis in mechanics.



**Gun Ho Lee** received his B.S. degrees in the Department of Mechanical Engineering in Kyungpook National University, Daegu, Korea in 2013. He is working as a M.S. candidate in the Department of Mechanical

Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include structural vibration.