The Korean Journal of Applied Statistics (2015) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2015.28.3.443
28(3), 443–455

Course Probability of Yut according to Starting Order

Daehyeon Cho[a,1]

[a]Department of Statistics, Inje University

(Received January 21, 2015; Revised February 24, 2015; Accepted March 10, 2015)

Abstract

The Korean game of yut is a traditional games that everyone can enjoy regardless of gender or ages. Yut consists of four sticks with a Head and Tail. We are interested in the course probabilities in the game of yut that are different according to the starting order of the four pieces of yut. So we consider the probabilities of five results of yut which we toss according to the probability of Head. We calculate probabilities according to 4 courses where one piece of yut can go through in a yutpan according to the starting order of each piece of yut.

Keywords: number of case, product law of probability, the game of yut

1. 서론

윷놀이는 가족이나 친구들이 모여 남녀노소 구별 없이 즐기는 우리나라의 전통 민속놀이 중 하나이다. 추석이나 설과 같은 명절 뿐 만아니라 어느 모임에서나 쉽게 할 수 있는 놀이가 윷놀이이다. 두 편 혹은 세 편으로 갈라서 윷가락을 던져서 나오는 대로 행마해서 먼저 네 개의 윷말(넉동)을 빼는 쪽이 이기는 게임이다. 미리 이긴 팀과 진 팀에 대한 상이나 벌칙을 정해 두고 게임을 시작하는 것이 게임의 박진감을 더해 주기도 한다. 윷판은 '말밭', '말판', '윷판'이라고 한다.

윷놀이는 4개의 윷말이 각각 출발지를 출발하여 다시 출발한 곳을 먼저 빠져 나가는 편이 이기는 놀이이다. 윷놀이 풍속에 4개의 윷말을 빼는 것을 '넉동 뺀다'고도 하는데 이는 윷말을 '동'이라고도 하는 것임을 알 수 있다. 이러한 윷놀이는 윷을 잘 던지기만 해서 이길 수 있는 것은 아니며, 말판을 쓰는 것도 매우 중요한 승리의 관건이다. 남의 윷말에 잡히지 않으면서 가장 가까운 길로 가되, 자기 윷말끼리 덧놓아 '두동산이(두동문이)'나 '석동산이(석동문이)' 많게는 '넉동산이(넉동문이)'를 만들어 한 번에 움직일 수 있게 되면 매우 빨리 날 수도 있다. 윷은 동일한 모양의 4개의 윷가락으로 이루어져있다. 각각의 윷가락은 앞(Head)과 뒤(Tail)로 이루어져 있으며 윷판에 던져진 4개의 윷가락의 앞과 뒤의 구성에 따라 도 개 걸 윷 모라 부른다. 윷놀이에서는 도 개 걸 윷 모가 나옴에 따라 각각 1∼5칸씩 앞으로 나아가게 된다. 도 개 걸 윷 모가 나올 확률은 하나의 윷가락을 윷판에 던졌을 때 앞이나 뒤가 나올 확률에 따라 결정됨을 알 수 있다. 출발지점을 출발하여 던진 윷의 결과에 따라 전진하여 윷판을 돌아 다시 출발 지점으로 돌아오는 게임이 윷놀이라 할 수 있는데 한 번 출발한 윷말이 경유하는 코스는 4가지임을 알 수 있다.

[1]Department of Statistics/Institute of Statistical Information, Inje University, Kimhae, 621-749, Korea. E-mail: statcho@inje.ac.kr

Table 2.1. The probability of results that we throw four yut sticks

p	도	개	걸	윷	모
0.50	0.2500000	0.3750000	0.2500000	0.06250000	0.06250000
0.52	0.2300314	0.3738010	0.2699674	0.07311616	0.05308416
0.54	0.2102458	0.3702154	0.2897338	0.08503056	0.04477456
0.56	0.1908122	0.3642778	0.3090842	0.09834496	0.03748096
0.58	0.1718842	0.3560458	0.3277882	0.11316500	0.03111696
0.60	0.1536000	0.3456000	0.3456000	0.12960000	0.02560000

윷에 관련된 연구로는 윷 단면의 각도에 따른 앞면이 나올 확률을 논리적으로 구한 Kim과 Hur (1995)의 연구와 앞면이 나올 확률을 논리적으로 구할 수 없을 때 최우추정법과 베이즈추정법을 이용하여 구한 Park과 Park (1996)의 연구를 들 수 있다. Oh (2010)는 윷의 뒤가 나올 확률에 따른 표준윷을 제안하였다. 이러한 윷에 관한 연구들은 윷가락의 앞면이나 뒷면이 나올 확률에 대한 과학적인 연구들이다. 본 연구는 실제 윷놀이에서 4개의 윷말이 출발 순서에 따라 지날 수 있는 4가지 코스에 대한 코스경유확률에 관한 연구이다. 게임에 대한 파산 확률이나 파산할 때까지의 총 게임 수에 대하여는 많은 연구가 있다 (Chang, 1995; Cho, 1996; Sandell, 1989). 이러한 연구들은 주로 경우의 수와 조건부 확률의 성질 등, 확률이론 (Ross, 2006; Chung, 1974)에 의해 연구된 결과들이다. 상대를 이기기 위한 전략을 세우거나 게임에 대해 걸리는 시간 등을 알기 위해서는 게임 시 발생하는 각종 사건들에 대한 확률 문제들을 알아보는 것이 필수적이다. Cho (2014)는 윷가락의 앞(Head)이 나올 확률(p)에 따른 도 개 걸 윷 모의 확률의 변화를 알아보고 확률과 경우의 수에 대한 기본적인 확률이론 (Sin, 2004; Jeon과 Kim, 1987; Ross, 2006)을 이용하여 이들 확률에 따른 하나의 윷말이 각 코스를 경유할 확률을 구하였다. 그러나 실재로 윷놀이에서는 4개의 윷말(동이)이 먼저 돌아 나와야 승리하도록 되어 있다. 윷말의 출발 순서에 따라 각각의 코스를 경유할 확률은 윷말의 전략에 따라 달라진다. 윷놀이에서 승리하려면 윷말의 전략이 중요하며 이는 윷놀이를 하는 상대에 따라 달라질 수 있다. 승리를 위한 행마전략의 핵심은 짧은 코스를 경유하는 것이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 일정한 전략 하에 출발한 윷말이 몇 번째 윷말이냐에 따른 윷말의 코스 경유확률을 구하고자 한다. 이러한 코스 경유확률은 게임을 운영하는 행마의 전략으로 이용 가능할 뿐 아니라 게임을 하는데 걸리는 시간을 계산하는데 유용하게 사용되어질 수 있다.

2. 각 코스를 경유할 확률

모양이나 크기가 구별이 되지 않는 윷가락 4개를 던진 결과는 앞면이 나온 것의 개수에 따라 앞면이 나올 확률을 p라 할 경우 모수가 $(4, p)$인 이항분포를 따름을 알 수 있다 (Sin, 2004; Jeon과 Kim, 1987; Ross, 2006). 앞이 나오는 윷가락의 수가 하나인 경우 도, 두 개인 경우 개, 세 개인 경우 걸이라 하며 모두 앞이 나온 경우를 윷이라 하며 앞이 하나도 나오지 않는 경우를 모라고 한다. 윷놀이에서 도 개 걸 윷 모가 나옴에 따라 윷말이 1칸∼5칸씩 목적지를 향해 전진한다. 일반적으로 게임에서 나타나는 결과에 따른 보상은 결과가 나타날 가능성이 낮은 경우의 보상이 나타날 가능성이 높은 경우에 대한 보상보다 높으며 이를 확률게임이라 할 수 있다. 도 개 걸 윷 모에 대한 보상이 각각 1∼5칸씩이므로 확률게임이 되려면 각각이 나타날 확률이 보상의 순서로 순서화 되어야한다. 모의 보상이 윷보다 많으려면 $p > 0.5$임을 알 수 있다. p에 따른 도 개 걸 윷 모의 확률은 다음과 같다 (Cho, 2014).

Table 2.1을 보면 p의 값이 0.5보다 클 경우 개 걸 윷 모가 나타날 확률의 순서가 보상의 순서와 상반됨을 알 수 있다. 그러나 p의 값이 0.5와 같은 경우를 제외하면 도가 나타날 확률은 걸이 나타날 확률보다 작음을 알 수 있다. 결국 윷놀이는 확률 게임이 아님을 알 수 있다. p의 변화에 따른 도 개 걸 윷 모

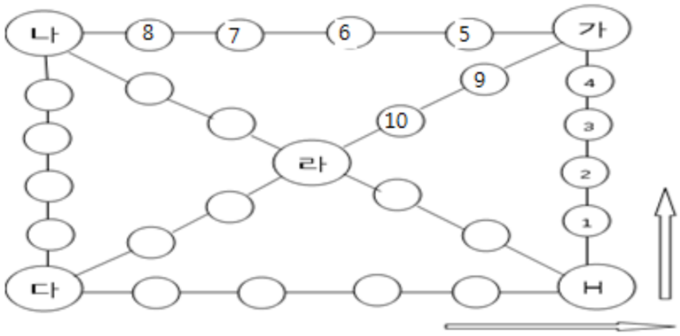

Figure 2.1. The graph of Yutpan.

가 나올 확률의 크기와 순서 등에 관하여는 Oh (2010)에 더 자세히 연구되어 있다. 결국 실제 게임에서 p의 변화를 주는 것만으로는 나타날 확률이 도 개 걸 윷 모의 순서로 하는 것은 불가능함을 알 수 있다 (Cho, 2014).

Cho (2014)는 윷놀이에서 하나의 윷가락이 앞(Head)이 나올 확률에 따라 도 개 걸 윷 모가 나올 확률이 달라지며 이러한 확률의 변화에 따라 하나의 윷말이 각 코스를 경유하게 될 확률이 결정됨을 보였다. 각각의 코스를 경유하게 될 확률을 구하기 위해서는 경유하게 되는 모든 경우의 수를 고려하는 것이 필수적이다. 이러한 전체 경우의 수를 구하는데 유용한 다음의 정리를 소개한다 (Jeon과 Kim, 1987; Ross, 2006).

정리 2.1 $x_1 + \cdots + x_r = n$ (단 $n \geq r$)을 만족하는 양의 정수의 해 집합의 수는 $\binom{n-1}{r-1}$이다.

윷놀이를 위한 말판을 간단히 도식하면 Figure 2.1과 같다. 편의상 시작지점을 H라하고 윷판의 다른 꼭짓점을 (가), (나), (다)로 하고 중앙을 (라)라 하였다. 윷말이 경유하는 길에 따라 서로 다른 4가지 코스가 있으며 각 코스의 길이는 각각 눈의 길이를 1로 했을 때 다음과 같다.

제 1코스(C_1) :	(H)-(가)-(라)-(Home)	: $5+3+3$	11
제 2코스(C_2) :	(H)-(가)-(×라)-(Home)	: $5+3+3+5$	16
제 3코스(C_3) :	(H)-(×가)-(나)-(Home)	: $5+5+3+3$	16
제 4코스(C_4) :	(H)-(×가)-(×나)-(Home)	: $5+5+5+5$	20

실제 윷놀이에서 상대를 이기기 위해서는 4개의 윷말이 출발지를 출발하여 코스를 경유하여 출발지를 상대보다 먼저 나와야한다. 승리하기 위해서는 윷말에 대한 다양한 전략이 있을 수 있다. 이러한 전략은 상대에 따라 실로 다양할 수 있지만 전략을 단순화하여 윷놀이에서 출발순서에 따른 윷말의 각 코스를 경유할 확률을 구하고자 한다. 가장 짧은 코스를 돌아 나오는 것이 유리하므로 다음과 같은 기본적인 전략을 생각해 보기로 한다.

기본 전략:

1. 출발점을 지나 가장 짧은 코스를 경유하는 것을 원칙으로 한다.
2. 출발한 윷말이 (가)에 도달할 때까지는 먼저 출발한 윷말이 먼저 전진한다.
3. 먼저 출발한 윷말이 (가)를 지나가게 되면 남아있는 윷말을 출발시킨다.
4. (가)에서 (라)를 지나는 경우 남은 윷말이 있는 경우 다음 윷말을 출발시킨다.

2.1. (가)를 경유할 확률

2.1.1. 첫 번째 출발한 윷말이 (가)를 경유할 확률 H를 출발하여 (가)에 도착할 확률(P_1(가))을 구하기 위해 첫 번째 출발한 윷말이 H를 출발하여 (가)에 도착하는 경우를 다음과 같이 서로 배반인 사건들로 나누어 생각해 볼 수 있다. H를 출발하여 ①∼④를 마지막으로 경유하고 바로 (가)에 도착하는 경우와 나머지 윷말들(2∼4)을 출발시킨 후에 도착하는 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

먼저 ①을 마지막으로 출발하는 경우 바로 (가)에 도착하는 경우와 나머지 윷말들(2∼4)을 출발시킨 후에 도착하는 경우로 나누어 생각할 수 있다. 이 경우의 확률은 모가 (0∼3)회 나온 후에 윷이 나오는 경우의 확률로 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$p_1\left(1+p_5+p_5^2+p_5^3\right)p_4.$$

다음으로 ②에서 출발하는 경우는 바로 도착하는 경우와 나머지 윷말들(2∼4)을 출발시킨 후에 도착하는 경우의 배반 사건으로 나눌 수 있다. ②에서 전진하지 못하는 경우는 (모 혹은 윷)이 (0∼3)회 나온 후에 걸이 나오는 경우에 해당한다. 그러므로 ②를 마지막으로 출발하여 (가)에 도착하는 경우의 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$\left(p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_4+p_5)+(p_4+p_5)^2p_3+(p_4+p_5)^3\right\}p_3.$$

같은 방법으로 ③에서 출발하는 경우 전진하지 못하는 경우는 (모 혹은 윷 혹은 걸)이 (0∼3)회 나온 후에 걸이 나오는 경우에 해당한다. 그러므로 ③에서 출발하여 (가)에 도착하는 경우에 대한 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_3+p_4+p_5)+(p_3+p_4+p_5)^2+(p_3+p_4+p_5)^3\right\}p_2.$$

마지막으로 ④에서 출발하는 경우 전진하지 못하는 경우는 도가 아닌 경우가 (0∼3)회 나온 후에 도가 나오는 경우에 해당한다. 그러므로 ④에서 출발하여 (가)에 도착하는 경우에 대한 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left\{1+(1-p_1)+(1-p_1)^2+(1-p_1)^3\right\}p_1$$

그러므로 첫 번째 윷말이 (가)에 도착할 확률(P_1(가))은 모(5)가 나올 확률과 ①∼④에 도착한 후 남은 윷말을 0∼3개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착할 이들 확률들의 합으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&p_1\left(1+p_5+p_5^2+p_5^3\right)p_4\\
&+\left(p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_4+p_5)+(p_4+p_5)^2p_3+(p_4+p_5)^3\right\}p_3\\
&+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_3+p_4+p_5)+(p_3+p_4+p_5)^2+(p_3+p_4+p_5)^3\right\}p_2\\
&+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left\{1+(1-p_1)+(1-p_1)^2+(1-p_1)^3\right\}p_1+p_5.
\end{aligned}$$

2.1.2. 두 번째 이상의 순서에서 출발한 윷말이 (가)를 경유할 확률 두 번째∼네 번째 윷말이 (가)를 경유할 확률은 첫 번째 윷말이 (가)를 경유할 확률을 구하는 것에서 나머지 윷말이 각각 2, 1, 0인 경우의 확률을 구하는 것과 같다. 그러므로 두 번째∼네 번째 윷말이 (가)를 경유할 확률은 다음과 같이 주어진다.

두 번째 출발한 윷말이 (가)를 경유할 확률(P_2(가)):

$$\begin{aligned}
&p_1\left(1+p_5+p_5^2\right)p_4\\
&+\left(p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_4+p_5)+(p_4+p_5)^2\right\}p_3
\end{aligned}$$

$$+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left\{1+(p_3+p_4+p_5)+(p_3+p_4+p_5)^2\right\}p_2$$
$$+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left\{1+(1-p_1)+(1-p_1)^2\right\}p_1+p_5.$$

세 번째 출발한 윷말이 (가)를 경유할 확률(P_3(가)):

$$\begin{aligned}&p_1\,(1+p_5)\,p_4\\&+\left(p_2+p_1^2\right)\{1+(p_4+p_5)\}\,p_3\\&+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^3\right)\{1+(p_3+p_4+p_5)\}\,p_2\\&+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\{1+(1-p_1)\}\,p_1+p_5.\end{aligned}$$

네 번째 출발한 윷말이 (가)를 경유할 확률(P_4(가)):

$$p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5.$$

2.2. 제 1 코스(C_1)를 경유할 확률

2.2.1. 첫 번째 출발한 윷말이 제 1 코스(C_1)를 경유할 확률 (가)를 출발한 윷말이 (라)를 경유할 확률은 다음과 같이 서로 배반인 사건들로 나누어 생각할 수 있다. 이 경우는 (가)를 출발하여 바로 (라)에 도착하는 경우와 ⑨ 또는 ⑩에 도착하여 나머지 윷말들(1∼3)을 출발 시킨 후 (라)에 도착하는 경우로 나누어 생각할 수 있다. (가)를 출발하여 ⑨에 도착하여 바로 (라)에 도착하는 경우의 확률은 p_1p_2이다. (가)를 출발하여 ⑨에 도착하여 나머지 윷말 1∼3개를 출발시킨 후 (라)에 도착하는 경우는 도가 나온 후 도 혹은 개가 아닌 것이 1∼3회 나온 후에 개(2)가 나오는 경우에 해당한다. 이에 해당하는 확률은 각각 $p_1(1-p_1-p_2)p_2$, $p_1(1-p_1-p_2)^2p_2$, $p_1(1-p_1-p_2)^3p_2$이다.

다음으로 (가)를 출발하여 ⑩에 도착하여 (라)에 도착하는 경우 나머지 윷말이 남아 있는 경우 이들을 출발 시킨 후에 (라)에 도착하는 경우에 해당한다. 즉, 나머지 윷말 1∼3개를 출발시킨 후 (라)에 도착하는 경우로 개가 나온 후 도가 아닌 것이 0∼3회 연이어 나온 후 도가 나오는 경우에 해당한다. 각각의 경우에 해당하는 확률은 각각 $(p_1^2+p_2)p_1$, $(p_1^2+p_2)(1-p_1)p_1$, $(p_1^2+p_2)(1-p_1)^2p_1$, $(p_1^2+p_2)(1-p_1)^3p_1$이다.

그러므로 처음 출발한 윷말이 (가)에 바로 도착한 후 나머지 3개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 경우의 확률과 남은 1개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하고 나머지 2개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 확률과 남은 2개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하고 나머지 1개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 확률과 남은 3개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하고 (라)에 바로 도착하는 경우의 확률을 다 더하면 처음 출발한 윷말이 (가)와 (라)를 경유하여 Home에 도달하는 경우의 확률이 된다. 즉 첫 번째 윷말이 (가)와 (라)를 경유하는 코스인 제 1 코스를 경유할 확률($P_1(C_1)$)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}&\left(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5\right)\\&\quad\times\Big[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+\left(p_2+p_1^2\right)(1-p_1)p_1\right\}\\&\qquad+\left\{p_1(1-p_1-p_2)^2p_2+p_2(1-p_1)^2p_1\right\}+\left\{p_1(1-p_1-p_2)^3p_2+\left(p_2+p_1^2\right)(1-p_1)^3p_1\right\}\Big]\\&+\Big\{p_1p_5p_4+\left(p_2+p_1^2\right)(p_4+p_5)p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)(p_3+p_4+p_5)p_2\\&\quad+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)(1-p_1)p_1\Big\}\\&\quad\times\Big[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+\left(p_2+p_1^2\right)(1-p_1)p_1\right\}\\&\qquad+\left\{p_1(1-p_1-p_2)^2p_2+\left(p_2+p_1^2\right)(1-p_1)^2p_1\right\}\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{p_1p_5^2p_4+\left(p_2+p_1^2\right)\left(p_4+p_5\right)^2p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^2p_2+\right.\\
&\quad\left.+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^2p_1\right\}\\
&\quad\times\left[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+\left(p_2+p_1^2\right)\left(1-p_1\right)p_1\right\}\right]\\
&+\left\{p_1p_5^3p_4+\left(p_2+p_1^2\right)\left(p_4+p_5\right)^3p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^3p_2+\right.\\
&\quad\left.+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^3p_1\right\}\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right).
\end{aligned}
$$

2.2.2. 두 번째 이상의 순서에서 출발한 윷말이 제 1 코스(C_1)를 경유할 확률 두 번째 출발한 윷말이 (가)와 (라)를 경유하여 Home에 도달하는 경우의 확률은 두 번째 출발한 윷말이 (가)에 바로 도착한 후 나머지 2개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 경우의 확률과 남은 1개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하고 나머지 1개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 확률과 남은 2개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하는 경우의 확률을 모두 더하면 된다. 즉 두 번째 윷말이 (가)와 (라)를 경유하는 가장 짧은 제 1 코스를 경유할 확률($P_2(C_1)$)은 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&\left(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5\right)\\
&\quad\times\left[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+\left(p_2+p_1^2\right)\left(1-p_1\right)p_1\right\}\right.\\
&\quad\quad\left.+\left\{p_1(1-p_1-p_2)^2p_2+\left(p_2+p_1^2\right)\left(1-p_1\right)^2p_1\right\}\right]\\
&+\left\{p_1p_5p_4+\left(p_2+p_1^2\right)\left(p_4+p_5\right)p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)p_2\right.\\
&\quad\left.+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)p_1\right\}\\
&\quad\times\left[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+\left(p_2+p_1^2\right)\left(1-p_1\right)p_1\right\}\right]\\
&+\left\{p_1p_5^2p_4+\left(p_2+p_1^2\right)\left(p_4+p_5\right)^2p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^2p_2\right.\\
&\quad\left.+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^2p_1\right\}\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right).
\end{aligned}
$$

또한 세 번째 출발한 윷말이 (가)와 (라)를 경유하여 Home에 도달하는 경우의 확률은 세 번째 출발한 윷말이 (가)에 바로 도착한 후 나머지 1개 이하의 윷말을 출발시키고 (라)에 도착하는 경우의 확률과 남은 1개의 윷말을 출발시키고 (가)에 도착하여 바로 (라)에 도착하는 확률 더하면 된다. 즉 세 번째 출발한 윷말이 (가)와 (라)를 경유하는 가장 짧은 제 1 코스를 경유할 확률($P_3(C_1)$)은 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&\left(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5\right)\\
&\quad\times\left[\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+\left\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+p_2(1-p_1)p_1\right\}\right]\\
&+\left\{p_1p_5p_4+\left(p_2+p_1^2\right)\left(p_4+p_5\right)p_3+\left(p_3+2p_1p_2+p_1^2\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)p_2\right.\\
&\quad\left.+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)p_1\right\}\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right).
\end{aligned}
$$

마지막으로 출발한 윷말이 (가)와 (라)를 경유하는 가장 짧은 제 1 코스를 경유할 확률($P_4(C_1)$)은 (가)에 도착할 확률과 (가)에서 (라)에 도착할 확률의 곱으로 다음과 같이 주어진다.

$$\left(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5\right)\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right).$$

2.3. 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률

2.3.1. 처음 출발한 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률 (가)를 경유하지 않고 (나)로 가는 경우는 다음과 같이 Home에서 (가) 사이에 ①~④ 중 어디를 마지막으로 경유하느냐에 따라 4가지의 배반

인 사건으로 나누어 생각해 볼 수 있다.

①~④ 중에서 ①을 최종으로 경유하고 (가)를 넘어 (라)로 가기 위해서는 2~4번째 시행에서 반드시 모가 나와야한다. 그런 다음 ⑤에서 출발하여 나머지 시행에서 (나)에 최종으로 도달하면 된다. 즉, 도(1)가 나온 후 모(5)가 4번 나온 후 나머지 시행에서 (나)에 최종으로 도달하는 경우의 수는 다음과 같음을 알 수 있다.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$을 만족하는 양의 해집합의 수 : 1

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$을 만족하는 양의 해집합의 수 : 3

$x_1 + x_2 = 4$을 만족하는 양의 해집합의 수 : 3

$x_1 = 4$을 만족하는 양의 해집합의 수 : 1

위의 각 경우에 해당하는 해집합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(1,1,1,1)\\&(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\\&(1,3),(3,1),(2,2)\\&(4)\end{aligned}$$

그러므로 이들에 대한 확률은 다음과 같다.

$$p_1 p_5^4 \left(p_1^4 + 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + p_4\right).$$

다음으로 ①~④ 중에서 ②를 최종으로 경유하고 (가)를 넘어 (라)로 가기 위해서는 ②를 최종으로 경유하고 난 다음 시행에서 반드시 모(5)나 윷(4)이 3회 나온 후 모나 윷이 나와야한다. 그런 다음 나머지 시행에서 (나)에 최종으로 도달하면 된다. 그러므로 구하고자 하는 확률은 ②를 경유할 확률과 모나 윷이 나온 후 (나)에 도달할 확률을 구하여 곱하면 된다. 먼저 ②를 경유하고 모(5)나 윷(4)이 3회 나온 후 모가 나온 후 (나)에 도달할 확률은 다음과 같다.

$$\left(p_1^2 + p_2\right)\left(p_4 + p_5\right)^3 p_5 \left(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3\right).$$

마찬가지 방법으로 ②를 경유한 다음 모(5)나 윷(4)이 3회 나온 후 마지막으로 윷이 나온 후 경유지 (나)에 도달하는 경우에 대한 확률은 다음과 같다.

$$\left(p_1^2 + p_2\right)\left(p_4 + p_5\right)^3 p_4 \left(p_1^4 + 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + p_4\right).$$

그러므로 ①~④ 중에서 ②를 최종으로 경유하고 (가)를 넘어 (나)에 도달하는 경우에 대한 확률은 다음과 같다.

$$\left(p_1^2 + p_2\right)\left(p_4 + p_5\right)^3 \left\{p_5 \left(p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3\right) + p_4 \left(p_1^4 + 3p_1^2 p_2 + 2p_1 p_3 + p_2^2 + p_4\right)\right\}.$$

①~④ 중에서 ③을 최종으로 경유하고 (가)를 넘어 (라)로 가기 위해서는 ③을 최종으로 경유한 다음 시행에서 반드시 모(5)나 윷(4), 혹은 걸(3)이 3회 나온 후 모(5)나 윷(4), 혹은 걸(3)이 나와야한다. 그런 다음 나머지 시행에서 (나)에 최종으로 도달하면 된다. 먼저 ③을 경유할 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3 = 3$, $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 = 3$을 만족하는 양의 해집합의 수와 같다. 이 경우에 해당하는 해집합은 $(1,1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, (3)이다

①~④ 중에서 ③을 최종으로 경유하고 (나)에 도달하기 위해서는 ③에서 모(5)나 윷(4), 혹은 걸(3)이 3회 나온 후 다음에 모(5)나 윷(4) 혹은 걸(3)이 나온 후 경유지 (나)에 도달해야한다. 각각의 경우의 확률을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^3\\&\times\left\{p_5\left(p_1^2+p_2\right)+p_4\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}.\end{aligned}$$

①~④ 중에서 ④를 최종으로 경유하고 (가)를 넘어 (라)로 가기 위해서는 ④를 최종으로 경유하고 난 다음 시행에서 반드시 도(1)가 아닌 것들이 3회 나온 후 다음에도 도(1)가 아닌 것이 나와야한다. 그런 다음 나머지 시행에서 (나)에 최종으로 도달하면 된다. 이들에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^3\\&\times\left\{p_5p_1+p_4\left(p_1^2+p_2\right)+p_3\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}.\end{aligned}$$

그러므로 처음 출발한 윷말이 제 3 코스를 경유할 확률인 $P_1(C_3)$은 (가)를 경유하지 않고 (나)에 도착하는 확률은 위의 4가지 경우의 확률을 더한 것으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&p_1p_5^4\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\\&+\left(p_1^2+p_2\right)\left(p_4+p_5\right)^3\left\{p_5(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_4\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\&+\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^3\\&\quad\times\left\{p_5(p_1^2+p_2)+p_4\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\&+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^3\\&\quad\times\left\{p_5p_1+p_4\left(p_1^2+p_2\right)+p_3\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}.\end{aligned}$$

2.3.2. 두 번째 이상의 순서에서 출발한 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률 2~4번째 출발한 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률은 첫 번째 출발한 윷말이 제 3 코스를 경유할 확률을 계산할 때 (가)를 넘을 경우 남아 있는 윷말이 2~0인 경우에 해당한다. 그러므로 2~4번째 출발한 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률은 다음과 같이 주어진다.

두 번째 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률($P_2(C_3)$)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&p_1p_5^3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\\&+\left(p_1^2+p_2\right)\left(p_4+p_5\right)^2\left\{p_5\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_4\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\&+\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)^2\\&\quad\times\left\{p_5\left(p_1^2+p_2\right)+p_4\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\&+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\left(1-p_1\right)^2\\&\quad\times\left\{p_5p_1+p_4\left(p_1^2+p_2\right)+p_3\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\end{aligned}$$

세 번째 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률($P_3(C_3)$)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&p_1p_5^2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\\&+(p_1^2+p_2)(p_4+p_5)\left\{p_5\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_4\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\&+\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)\left(p_3+p_4+p_5\right)\\&\quad\times\left\{p_5\left(p_1^2+p_2\right)+p_4\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\end{aligned}$$

Table 2.2. The via probability of 1st Yut according to the four courses

순서	코스	확률
1 P_1	C_1	$(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5)$ $\times[(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+(p_2+p_1^2)(1-p_1)p_1\}$ $+\{p_1(1-p_1-p_2)^2p_2+p_2(1-p_1)^2p_1\}+\{p_1(1-p_1-p_2)^3p_2+(p_2+p_1^2)(1-p_1)^3p_1\}]$ $+\{p_1p_5p_4+(p_2+p_1^2)(p_4+p_5)p_3+(p_3+2p_1p_2+p_1^3)(p_3+p_4+p_5)p_2$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)(1-p_1)p_1\}$ $\times[(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+(p_2+p_1^2)(1-p_1)p_1\}$ $+\{p_1(1-p_1-p_2)^2p_2+(p_2+p_1^2)(1-p_1)^2p_1\}]$ $+\{p_1p_5^2p_4+(p_2+p_1^2)(p_4+p_5)^2p_3+(p_3+2p_1p_2+p_1^3)(p_3+p_4+p_5)^2p_2$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)(1-p_1)^2p_1\}$ $\times\{(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+\{p_1(1-p_1-p_2)p_2+(p_2+p_1^2)(1-p_1)p_1\}$ $+\{p_1p_5^3p_4+(p_2+p_1^2)(p_4+p_5)^3p_3+(p_3+2p_1p_2+p_1^3)(p_3+p_4+p_5)^3p_2$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)(1-p_1)^3p_1\}(p_1^3+2p_1p_2+p_3)$
	C_2	$p_5+p_1(1+p_5+p_5^2+p_5^3)p_4$ $+(p_2+p_1^2)\{1+(p_4+p_5)+(p_4+p_5)^2+(p_4+p_5)^3\}p_3$ $+(p_3+2p_1p_2+p_1^2)\{1+(p_3+p_4+p_5)+(p_3+p_4+p_5)^2+(p_3+p_4+p_5)^3\}p_2$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)\{1+(1-p_1)+(1-p_1)^2+(1-p_1)^3\}p_1-P_1(C_1)$ $=P_1(\text{가})-P_1(C_1)$
	C_3	$p_1p_5^4(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)$ $+(p_1^2+p_2)(p_4+p_5)^3\{p_5(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_4(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$ $+(p_1^3+2p_1p_2+p_3)(p_3+p_4+p_5)^3$ $\times\{p_5(p_1^2+p_2)+p_4(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_3(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)(1-p_1)^3$ $\times\{p_5p_1+p_4(p_1^2+p_2)+p_3(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_2(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$
	C_4	$(1-P_1(\text{가}))-P_1(C_3)$

$$
\begin{aligned}
&\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)(1-p_1)\\
&\quad\times\left\{p_5p_1+p_4\left(p_1^2+p_2\right)+p_3\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}
\end{aligned}
$$

이마지막으로 출발한 윷말이 제 3 코스(C_3)를 경유할 확률($P_4(C_3)$)은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&p_1p_5\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\\
&+\left(p_1^2+p_2\right)\left\{p_5\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_4\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\
&+\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)\\
&\quad\times\left\{p_5\left(p_1^2+p_2\right)+p_4\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_3\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}\\
&+\left(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4\right)\\
&\quad\times\left\{p_5p_1+p_4\left(p_1^2+p_2\right)+p_3\left(p_1^3+2p_1p_2+p_3\right)+p_2\left(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4\right)\right\}
\end{aligned}
$$

2.4. 제 2 코스(C_2)를 경유할 확률

1~4번째 출발한 윷말이 (가)를 경유하는 사건에 대해 (라)를 경유하는 사건과 경유하지 않는 사건은 서로 배반임을 알 수 있다. 그러므로 1~4번째 출발한 윷말이 (가)를 경유하고 (라)를 경유하지 않고 결승점에 도착하는 경우인 제 2 코스를 경유할 확률($P_i(C_2)$)는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$P_i(\text{가})-P_i(C_1),\quad i=1,2,3,4.$$

Table 2.3. The via probability of 2nd Yut according to the four courses

순서	코스	확률
2 P_2	C_1	$(p_1^5 + 4p_1^3p_2 + 3p_1^2p_3 + 3p_1p_2^2 + 2p_1p_4 + 2p_2p_3 + p_5)$ $\times[(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + \{p_1(1 - p_1 - p_2)p_2 + (p_2 + p_1^2)(1 - p_1)p_1\}$ $+\{p_1(1 - p_1 - p_2)^2p_2 + (p_2 + p_1^2)(1 - p_1)^2p_1\}]$ $+\{p_1p_5p_4 + (p_2 + p_1^2)(p_4 + p_5)p_3 + (p_3 + 2p_1p_2 + p_1^3)(p_3 + p_4 + p_5)p_2$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)p_1\}$ $\times[(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + \{p_1(1 - p_1 - p_2)p_2 + (p_2 + p_1^2)(1 - p_1)p_1\}]$ $+\{p_1p_5^2p_4 + (p_2 + p_1^2)(p_4 + p_5)^2p_3 + (p_3 + 2p_1p_2 + p_1^3)(p_3 + p_4 + p_5)^2p_2$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)^2p_1\}(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3)$
	C_2	$p_5 + p_1(1 + p_5 + p_5^2)p_4$ $+(p_2 + p_1^2)\{1 + (p_4 + p_5) + (p_4 + p_5)^2\}p_3$ $+(p_3 + 2p_1p_2 + p_1^2)\{1 + (p_3 + p_4 + p_5) + (p_3 + p_4 + p_5)^2\}p_2$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)\{1 + (1 - p_1) + (1 - p_1)^2\}p_1 - P_2(C_1)$ $= P_2(\text{가}) - P_2(C_1)$
	C_3	$p_1p_5^3(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)$ $+(p_1^2 + p_2)(p_4 + p_5)^2\{p_5(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_4(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$ $+(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3)(p_3 + p_4 + p_5)^2$ $\times\{p_5(p_1^2 + p_2) + p_4(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_3(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)^2$ $\times\{p_5p_1 + p_4(p_1^2 + p_2) + p_3(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_2(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$
	C_4	$(1 - P_2(\text{가})) - P_2(C_3)$

Table 2.4. The via probability of 3rd Yut according to the four courses

순서	코스	확률
3 P_3	C_1	$(p_1^5 + 4p_1^3p_2 + 3p_1^2p_3 + 3p_1p_2^2 + 2p_1p_4 + 2p_2p_3 + p_5)$ $\times[(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + \{p_1(1 - p_1 - p_2)p_2 + p_2(1 - p_1)p_1\}]$ $+\{p_1p_5p_4 + (p_2 + p_1^2)(p_4 + p_5)p_3 + (p_3 + 2p_1p_2 + p_1^3)(p_3 + p_4 + p_5)p_2$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)p_1\}(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3)$
	C_2	$\{(p_1^5 + 4p_1^3p_2 + 3p_1^2p_3 + 3p_1p_2^2 + 2p_1p_4 + 2p_2p_3 + p_5) + p_1p_5p_4$ $+(p_2 + p_1^2)(p_4 + p_5)p_3 + (p_3 + 2p_1p_2 + p_1^3)(p_3 + p_4 + p_5)p_2$ $(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)p_1\} - P_3(C_1) = P_3(\text{가}) - P_3(C_1)$
	C_3	$p_1p_5^2(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)$ $+(p_1^2 + p_2)(p_4 + p_5)\{p_5(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_4(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$ $+(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3)(p_3 + p_4 + p_5)$ $\times\{p_5(p_1^2 + p_2) + p_4(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_3(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$ $+(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3 + p_4)(1 - p_1)$ $\times\{p_5p_1 + p_4(p_1^2 + p_2) + p_3(p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3) + p_2(p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4)\}$
	C_4	$(1 - P_3(\text{가})) - P_3(C_3))$

2.5. 제 4 코스(C_4)를 경유할 확률

i번째 출발한 윷말이 (가)를 경유하는 경우와 경유하지 않는 경우는 서로 배반인 사건이므로 (가)를 경유하지 않을 확률은 $(1 - P_i(\text{가}))$이다. (나)를 경유하는 사건과 경유하지 않는 사건 또한 서로 배반이므로 1∼4번째 출발한 윷말이 (가)와 (나)를 경유하지 않고 결승점에 도착하는 제 4 코스를 경유할 경우에 대한 확률 $P_i(C_4)$는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$(1 - P_i(\text{가})) - P_i(C_3), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Table 2.5. The via probability of 4th Yut according to the four courses

순서	코스	확률
	C_1	$(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5)(p_1^3+2p_1p_2+p_3)$
	C_2	$(p_1^5+4p_1^3p_2+3p_1^2p_3+3p_1p_2^2+2p_1p_4+2p_2p_3+p_5)-P_4(C_1)$ $=P_4(\text{가})-P_4(C_1)$
4 P_4	C_3	$p_1p_5(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)$ $+(p_1^2+p_2)\{p_5(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_4(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$ $+(p_1^3+2p_1p_2+p_3)$ $\times\{p_5(p_1^2+p_2)+p_4(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_3(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$ $+(p_1^4+3p_1^2p_2+p_2^2+2p_1p_3+p_4)$ $\times\{p_5p_1+p_4(p_1^2+p_2)+p_3(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_2(p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2+p_4)\}$
	C_4	$(1-P_4(\text{가}))-P_4(C_3))$

Table 2.6. The course probability according to p and starting order

출발순서	p	코스			
		1	2	3	4
1	0.50	0.4883239	0.2573503	0.0559115	0.1984143
	0.52	0.4744076	0.2613150	0.0621050	0.2021724
	0.54	0.4581462	0.2656265	0.0685789	0.2076485
	0.56	0.4400262	0.2699926	0.0753520	0.2146291
	0.58	0.4204792	0.2741061	0.0824753	0.2229393
	0.60	0.3998621	0.2776406	0.0900353	0.2324621
2	0.50	0.4204102	0.2736511	0.0798401	0.2260985
	0.52	0.4079797	0.2750383	0.0866282	0.2303536
	0.54	0.3937953	0.2763784	0.0935932	0.2362330
	0.56	0.3782438	0.2774246	0.1007760	0.2435555
	0.58	0.3616459	0.2779210	0.1082537	0.2521794
	0.60	0.3442435	0.2776016	0.1161386	0.2620163
3	0.50	0.3309021	0.2809143	0.1223035	0.2658801
	0.52	0.3214670	0.2785889	0.1292910	0.2706531
	0.54	0.3108153	0.2758767	0.1363452	0.2769629
	0.56	0.2991989	0.2726052	0.1435263	0.2846695
	0.58	0.2868054	0.2686017	0.1509329	0.2936600
	0.60	0.2737534	0.2636942	0.1586951	0.3038574
4	0.50	0.2075348	0.2504730	0.2240505	0.3179417
	0.52	0.2028398	0.2438345	0.2277487	0.3255770
	0.54	0.1973853	0.2367150	0.2315482	0.3343515
	0.56	0.1912546	0.2290401	0.2355332	0.3441721
	0.58	0.1844902	0.2207480	0.2398109	0.3549510
	0.60	0.1770956	0.2117903	0.2445070	0.3666072

위의 결과들을 출발 순서에 따른 윷말들의 코스 경유확률을 정리하면 Table 2.2∼Table 2.5와 같다. 표의 결과를 이용하여 앞이 나올 확률이 0.5∼0.6까지 0.02 간격으로 변함에 따라 윷말이 각 코스를 경유할 확률은 Table 2.6과 같다. 첫 번째 윷말인 경우 가장 짧은 코스인 C_1을 경유할 확률이 가장 높으며 그 다음은 C_2, C_4, C_3 순이다. 즉, 각 코스를 경유할 확률의 크기순서는 $P_1(C_3) < P_1(C_4) < P_1(C_2) < P_1(C_1)$임을 알 수 있다. 그러나 마지막 네 번째 윷말인 경우 가장 긴 코스인 C_4를 경유할 확률이 가장 높으며 각 코스를 경유할 확률의 크기순서는 $p = 0.5$일 때 $P_4(C_1) < P_4(C_3) < P_4(C_2) < P_4(C_4)$임을

알 수 있다.

3. 결론

우리는 살아가면서 행복을 추구한다. 함께 즐기는 간단한 놀이나 게임에서도 확률에 대한 지식을 통하여 재미를 더할 수 있으며 박진감 넘치는 놀이문화를 이루어 갈 수 있다. 윷놀이는 우리나라의 전통놀이 중에서 남녀노소가 즐기는 건전한 놀이 중 하나이다. 일반적인 상식과는 달리 윷놀이는 확률게임이 아님을 알 수 있다. 일반적으로 사건이 일어날 확률이 작을수록 보상이 커야하지만 윷놀이에서 도의 확률에 비해 개의 확률이 큼을 알 수 있다. 또한 4가지 코스에 대한 확률도 코스에 대해 경유하는 길이는 제 1 코스 < 제 2 코스 = 제 3 코스 < 제 4 코스이지만 이들 코스를 경유할 확률의 크기는 출발한 순서에 따라 달라짐을 알 수 있다. 첫 번째 윷말인 경우 가장 짧은 코스인 C_1을 경유할 확률이 가장 높으며 각 코스를 경유할 확률의 크기순서는 $P_1(C_3) < P_1(C_4) < P_1(C_2) < P_1(C_1)$임을 알 수 있다. 그러나 마지막 네 번째 윷말인 경우 가장 긴 코스를 경유할 확률이 가장 높으며 가장 짧은 코스를 경유할 확률이 가장 낮다. 그러나 길이가 같은 두 번째와 세 번째 코스를 경유할 확률은 윷의 앞면이 나올 확률이 0.5에 가까울수록 제 2코스를 경유할 확률이 높으며 앞면이 나올 확률이 0.5인 경우 각 코스를 경유할 확률의 크기순서는 $P_4(C_1) < P_4(C_3) < P_4(C_2) < P_4(C_4)$임을 알 수 있다. 이러한 확률은 상대의 윷말을 잡을 수도 있으며 업고 갈 수도 있는 윷놀이에서 다양한 전략을 통하여 좀 더 재미있고 생각하는 놀이를 즐길 수 있으리라 확신한다. 본 논문에서 사용한 경우의 수를 이용한 방법을 응용하면 다양한 전략하에서 코스 경유확률을 계산 할 수 있다. 또한 각 코스를 경유할 확률을 구하는 방법을 응용하면 윷놀이 한판을 하는데 걸리는 평균게임시간을 계산할 수 있다.

References

Chang, D. K. (1995). A game with four players, *Statistics and Probability Letters*, **23**, 111–115.

Cho, D. H. (1996). A game with n players, *Journal of Korean Statistical Society*, **25**, 185–193.

Cho, D. H. (2014). Course probability in the game of Yut, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **27**, 407–417.

Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*, Academic press, New York.

Jeon, J. W. and Kim, W. C. (1987). *Introduction to Probability Theory*, Youngji publishers.

Kim, M. K. and Hur, M. H. (1995). The probability of Yut, *Proceedings of Spring conference, Korean Statistical Society*, 91–97.

Oh, C. H. (2010). A study on probability of the Korean board game Yut, *Journal of the Korean Data and Information Science Society*, **21**, 719–727.

Park, J. K. and Park, H. S. (1996). On estimation of the probability of Yut, *The Journal of Applied Statistics*, **9**, 83–94.

Ross, S. (2006). *A First Course in Probability*, Fourth ed., Prentice Hall, New Jersey.

Sandell, D. (1989). A game with three players, *Statistical Probability Letters*, **7**, 61–63.

Sin, Y. W. (2004). *Basic Theory of Probability*, Kyungmoon Publishers.

출발순서에 따른 윷말의 코스 경유 확률

조대현[a,1]

[a]인제대학교 통계학과

(2015년 1월 21일 접수, 2015년 2월 24일 수정, 2015년 3월 10일 채택)

요 약

우리나라의 전통적인 명절놀이 중 윷놀이는 가족이나 친구들이 모여 남녀노소 구별 없이 즐기는 놀이다. 윷놀이는 윷가락을 던져 나오는 대로 4개의 윷말을 행마하여 출발지로 돌아 나오는 게임이다. 윷놀이에서 상대를 이기기 위해서는 상대에 따라 다양한 행마 전략이 있을 수 있다. 행마전략의 핵심은 가능하면 짧은 코스를 돌아 나오는 것이다. 하나의 윷가락의 앞면이 나올 확률 p에 따른 도 개 걸 윷 혹은 모가 나올 확률을 이용하여 실제 윷놀이에서 4개의 윷말이 출발한 순서에 따라 각각의 코스를 경유할 확률을 계산하였다. 이러한 코스경유확률은 윷놀이에서 행마의 전략에 이용할 수 있을 뿐 아니라 게임을 하는데 걸리는 시간을 계산하는데 유용하게 사용되어질 수 있다.

주요용어: 경우의 수, 윷놀이, 확률의 곱의법칙

[1](621-749) 경남 김해시 어방동 607, 인제대학교 통계학과, 통계정보연구소 교수. E-mail: statcho@inje.ac.kr