

# Volatility Forecasting of Korea Composite Stock Price Index with MRS-GARCH Model

Jinyoung Huh<sup>a</sup> · Byeongchan Seong<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received January 20, 2015; Revised February 26, 2015; Accepted March 18, 2015)

---

## Abstract

Volatility forecasting in financial markets is an important issue because it is directly related to the profit of return. The volatility is generally modeled as time-varying conditional heteroskedasticity. A generalized autoregressive conditional heteroskedastic (GARCH) model is often used for modeling; however, it is not suitable to reflect structural changes (such as a financial crisis or debt crisis) into the volatility. As a remedy, we introduce the Markov regime switching GARCH (MRS-GARCH) model. For the empirical example, we analyze and forecast the volatility of the daily Korea Composite Stock Price Index (KOSPI) data from January 4, 2000 to October 30, 2014. The result shows that the regime of low volatility persists with a leverage effect. We also observe that the performance of MRS-GARCH is superior to other GARCH models for in-sample fitting; in addition, it is also superior to other models for long-term forecasting in out-of-sample fitting. The MRS-GARCH model can be a good alternative to GARCH-type models because it can reflect financial market structural changes into modeling and volatility forecasting.

Keywords: conditional heteroskedasticity, Markov regime switching model, structural change

---

## 1. 서론

Engle (1982) 이후, 30년 이상 변동성의 모형화 및 예측에 대한 연구는 시계열분석 및 계량경제학에서 아주 중요한 분야가 되어 왔다. 이는 변동성이 블랙-숄츠(Black-Scholes) 모형 등을 통한 파생상품 가격 결정이나 VaR(value at risk) 계산에서 필수 불가결한 요소이기 때문일 것이다. 즉, 변동성은 투자위험을 의미하며 자산의 가격결정이나 포트폴리오 관리 및 투자전략에 중요한 역할을 한다. 이러한 변동성은 시간의 흐름에 따라서 변화하는 값으로서 주로 조건부 이분산(conditional heteroskedasticity)을 통하여 계산된다. 조건부 이분산성에 관련된 연구에서 널리 사용되는 모형은 Bollerslev (1986)가 제안한 GARCH(generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형이다. 또한, 변동성의 비대칭성 또는 지렛대 효과(leverage effect)를 반영하기 위한 모형으로서, Nelson (1991)의 EGARCH(exponential GARCH) 모형, Glosten 등 (1993)의 GJR-GARCH 모형을 고려할 수 있다.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (No. 2012R1A1A2008006).

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 221, Heukseok-dong, Dongjak-gu, Seoul 156-756, Korea. E-mail: bseong@cau.ac.kr

그러나, 이러한 전통적 모형들은 경기의 변동이나 재정정책의 변화와 같은 외부적 상황의 반영에 단점이 있다고 알려져 있다. 예를 들면, 서브프라임 모기지 사태로 시작된 2008년 글로벌 금융위기와 그리스 국가 부도위기 이후 발생한 2010년말 남유럽 재정위기 같은 세계경제의 변화와 위기상황은 기존 모형으로 설명하기 어렵다.

국면전환 GARCH(Markov regime switching GARCH, MRS-GARCH) 모형은 변동성의 구조적 변화를 반영할 수 있는 모형으로, 변동성의 여러 국면들을 확률적으로 결정할 수 있으며 각 국면에 따라서 다른 모수를 갖는 GARCH 모형으로 구성된다. 국면전환 GARCH 모형에 대한 연구로서, Gray (1996)는 국면전환 모형과 GARCH 모형의 결합을 시도하였다. Klaassen (2002)은 기존 연구에서 다 기간 예측에서 발생하는 단점을 보완하기 위하여 경로의존성 문제를 해결함과 동시에, 환율 자료에 적용함으로써 국면전환 GARCH 모형이 GARCH 모형보다 좋은 예측성능을 가짐을 보였다. Marcucci (2005)는 S&P500 지수자료를 통하여 GARCH 모형과 국면전환 GARCH 모형을 비교 분석하였으며, 일간 자료 뿐 아니라 일중 5분 간격 자료를 통한 실현변동성(realized volatility)을 이용하여 국면전환 GARCH 모형이 변동성 예측에서 더욱 우수하다는 것을 보였다. 국내 연구로서는, Hwang과 Ryu (2011)은 KOSPI200 지수자료의 변동성 분석을 통하여 국면의 존재가 유의하게 나타나며 각 국면이 서로 다른 특징을 보인다는 것을 확인하였다.

본 연구에서는 GARCH, EGARCH, GJR-GARCH 모형들과 국면전환 GARCH 모형을 KOSPI 일별 지수자료에 적합하여 변동성을 예측하고 비교 분석한다. 논문의 구성은, 총 5장으로 구성되며 2장에서는 기존의 조건부 이분산 모형을 소개하고 3장에서 국면전환 GARCH 모형의 형태 및 추정방법 그리고 예측성능평가를 위한 손실함수에 대하여 설명한다. 4장에서는 실제 자료를 사용하여 모형의 적합과 예측성능을 비교 분석하고, 5장에서 결과를 정리한다.

## 2. 조건부 이분산 모형

### 2.1. GARCH 모형

조건부 이분산 모형으로 가장 기본적인 모형인 Engle (1982)의 ARCH(autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형은 실증분석에서 비교적 긴 시차를 필요로 한다는 것이 알려져 있다. 따라서, 모수절약(parsimony)의 원칙에 따라 GARCH 모형을 사용하는 것이 일반적이다. 정상 시계열 변수  $r_t$ 에 대하여 오차항에 고려되는 GARCH(1,1) 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = \delta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad (2.1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (2.2)$$

여기서, 설명의 단순함을 위하여  $r_t$ 의 조건부 평균은 상수  $\delta$ 로 가정하였다.  $h_t$ 는 오차항  $\varepsilon_t$ 의 조건부 분산  $\text{Var}(\varepsilon_t | r_{t-1}, \dots, r_1)$ 을 나타내며,  $\eta_t$ 은 평균이 0이고 분산이 1인 백색잡음(white noise)이다. 조건부 분산  $h_t$ 가 양수이기 위하여  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ 이어야 하며, 정상성을 만족하기 위하여  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 이어야 한다. GARCH 모형은 충격 또는 오차항의 부호에 관계없이 그 크기가 조건부 분산을 결정한다. 따라서, 오차의 부호에 따른 비대칭적 효과를 반영할 수 없다는 단점이 있으며 이러한 한계점을 보완하기 위해 Nelson (1991)은 EGARCH 모형을 제안하였다.

### 2.2. EGARCH 모형

실제 금융시장에서,  $(t-1)$ 시점에서 발생한 음의 수익률은 양의 수익률보다 상대적으로 더 큰  $t$ 시점에서의 변동성을 가져오는 경향이 있다. 이를 지렛대 효과라고 하며 이것을 반영하기 위한 모형으로

Nelson의 EGARCH 모형을 고려할 수 있다. 다음과 같은 EGARCH(1, 1) 모형은 GARCH(1, 1) 모형에서 식 (2.2)를 다음과 같은 식으로 교체하여 사용한다.

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right| + \xi \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + \beta_1 \ln(h_{t-1}). \quad (2.3)$$

EGARCH 모형에서 사용된 로그변환을 통하여 GARCH 모형에서의 양의 제약조건은 필요가 없게 된다. 식 (2.3)에서  $\xi$ 가 유의한 음의 값을 갖는 경우 지렛대 효과가 존재함을 나타낸다. 즉, 음의 충격이 변동성에 더 큰 영향을 준다는 것을 의미한다.

### 2.3. GJR-GARCH 모형

GJR-GARCH 모형은, EGARCH 모형과 달리, 식 (2.1) 및 (2.2)의 GARCH 모형의 틀 안에서 지렛대 효과를 고려하는 모형으로서, 지시변수(indicator variable)를 통하여 음의 충격과 양의 충격이 수익률의 변동성에 다르게 반영되는 원리를 가지고 있다. GJR-GARCH(1, 1) 모형은 조건부 분산을 다음과 같이 정의한다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{[\varepsilon_{t-1} < 0]} + \xi \varepsilon_{t-1}^2 [1 - I_{[\varepsilon_{t-1} < 0]}] + \beta_1 h_{t-1} \quad (2.4)$$

여기서,  $I_{[\varepsilon_{t-1} < 0]}$ 은 지수변수로서  $\varepsilon_{t-1} < 0$ 인 경우에 1의 값을 가지며, 그렇지 않은 경우 0의 값을 가진다. 따라서,  $\alpha_1 > \xi$ 일 경우 지렛대 효과를 반영한다고 할 수 있다.

## 3. 국면전환 GARCH 모형

### 3.1. 기본 모형과 가정

국면전환 GARCH 모형은 Hamilton (1989)의 국면전환 모형을 GARCH 모형과 결합한 형태이다. 즉, 마코프 연쇄를 따르는 상태변수(state)를 이용하여 각 국면을 확률적으로 결정하고, 각 국면에서는 서로 다른 모수를 가지는 GARCH 모형들을 허용한다. 이 때 상태변수에 대한 전이확률(transition probability)은 다음과 같이 정의된다.

$$P(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij}. \quad (3.1)$$

단,  $p_{ij}$ 는  $(t-1)$ 시점에서의 상태가  $i$ 일 때  $t$ 시점의 상태가  $j$ 일 확률을 뜻한다. 본 연구에서는 변동성의 국면이 2개인 경우로 가정하며, 변동성이 낮은 국면은  $s_t = 1$ 로, 변동성이 높은 국면은  $s_t = 2$ 로 표시된다. 또한, 전이행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & (1-p) \\ (1-q) & q \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

또한 전이확률을 이용하여 각 상태에 머물 비조건부 확률은 마코프 연쇄의 극한분포를 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\pi^{(1)} = \frac{(1-p_{22})}{(1-p_{11}) + (1-p_{22})} = \frac{1-q}{2-p-q}, \quad \pi^{(2)} = 1 - \pi^{(1)}. \quad (3.3)$$

위와 같이 2개의 국면전환 특성을 갖는 GARCH(1, 1) 모형은 다음과 같은 모형으로 표시될 수 있으며 흔히 MRS-GARCH(1, 1)로 부른다.

$$r_t = \delta^{(i)} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t^{(i)}}, \quad (3.4)$$

$$h_t^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} h_{t-1} \quad (3.5)$$

여기서, 위 첨자  $i$ 는 상태변수의 값( $i = 1, 2$ )을 나타내며,  $\alpha_0^{(i)}$ ,  $\alpha_1^{(i)}$ 와  $\beta_1^{(i)}$ 는 양의 실수이고, 정상성 조건으로서  $\alpha_1^{(i)} + \beta_1^{(i)}$ 은 1보다 작은 값을 가져야 한다.

그러나, 식 (3.5)의 우변에 있는  $h_{t-1}$ 은 상태변수와 독립(state-independent)인 조건부 분산이지만 국면전환의 맥락에서는 독립이 성립하지 않는다. 이것은 조건부 분산이 상태변수  $s_t$ 뿐만 아니라 이전 시점까지 상태변수들의 경로인  $\tilde{s}_{t-1}$ 에 의존하기 때문이다. 단,  $\tilde{s}_t = (s_t, s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_0)$ 은 상태경로(state path)를 나타낸다. 이와 같은 경로의존성은 GARCH 모수 추정을 복잡하게 만든다.

식 (3.5)를  $h_t^{(i)} = \text{Var}[\varepsilon_t | \tilde{s}_t]$ 를 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$h_t^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} h_{t-1}^{(i)}, \quad (3.6)$$

즉,  $t$ 시점의 조건부 분산은  $(t-1)$ 시점의 상태경로와 조건부 분산에 의해 결정되며,  $(t-1)$ 시점은 또 이전 시점에 의존하게 됨으로써 결국  $t$ 시점의 조건부 분산은 전체 상태경로에 의존하게 되는 것이다. 이것은 상태경로의 경우의 수가 지수적으로 증가하고 이에 따라 GARCH 모수 추정도 지수적으로 복잡하게 됨을 의미하는 것이다 (Gray, 1996).

Klaassen (2002)은 조건부분산이 상태변수와 관측변수에 동시에 의존하는 문제를 해결하기 위하여 식 (3.6)을 다음과 같은 식으로 대체하였다.

$$h_t^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} E_{t-1} [h_{t-1}^{(i)} | s_{t-1}], \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

본 연구에서는 이와 같은 Klaassen의 방법을 이용하여 MRS-GARCH(1, 1) 모형의 모수를 추정하였다.

### 3.2. 오차항 분포의 가정

GARCH 모형의 백색잡음의 분포로서 정규분포, Student's  $t$ -분포 및 GED(generalized error distribution) 분포를 고려할 수 있다. 특히, 금융시계열 자료의 수익률 분포는 정규분포보다 꼬리가 더 두터운 형태를 보이기 때문에 이러한 특성을 반영하기 위해  $t$ -분포와 GED(generalized error distribution) 분포를 사용할 수 있다.  $\varepsilon_t$ 의 분포가 자유도  $\nu$ 인  $t$ -분포일 경우 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(\varepsilon_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\nu-2)^{-\frac{1}{2}} (h_t)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t(\nu-2)}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (3.8)$$

또한, 오차항의 분포가 GED일 경우 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(\varepsilon_t) = \frac{\nu \exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t}{\lambda h_t^{\frac{1}{\nu}}} \right|^\nu\right]}{h_t^{\frac{1}{2}} \lambda 2^{(1+\frac{1}{\nu})} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \quad \text{with } \lambda = \left[ \frac{2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

GED 분포에서  $\nu$ 는 분포 꼬리의 두터움 정도를 나타내는 모수로서  $\nu = 2$ 인 경우는 정규분포를 의미하며,  $\nu < 2$ 이면 정규분포에 비해 꼬리가 두터운 형태가 되며  $\nu > 2$ 인 경우는 그 반대이다.

### 3.3. 모수 추정 방법

기본적으로 모수를 추정하기 위한 방법으로 최소제곱법(least squares estimation)이 이용될 수 있으나, 이것은 등분산성을 만족한다는 가정 하에서 적합하며 이분산 모형인 GARCH 모형에서는 그 추정의 효율이 떨어진다. 따라서 GARCH 모형 및 국면전환 GARCH 모형의 모수는 최우추정법(maximum likelihood estimation)을 통하여 우도함수를 최대로 하는 모수들을 추정한다.

국면이 2개인 국면전환 GARCH 모형의 로그우도함수 형태는 Gray (1996)에 의하여 유도할 수 있다. 먼저,  $(t-1)$ 시점의 정보인  $\zeta_{t-1}$ 가 주어져 있을 때  $r_t$ 의 조건부 분포는 다음과 같다.

$$f(r_t|\zeta_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 f(r_t|s_t = i, \zeta_{t-1})P(s_t = i|\zeta_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 f(r_t|s_t = i)p_{i,t} \quad (3.10)$$

여기서,  $p_{i,t} = P(s_t = i|\zeta_{t-1})$ 이며  $f(r_t|s_t = i)$ 의 형태는 3.2절의 오차항의 분포 가정에 따라서 달라진다. 예를 들면, 오차항의 분포를 정규분포로 가정할 경우 다음이 성립한다.

$$f(r_t|s_t = i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t^{(i)}}} \exp \left\{ -\frac{(r_t - \delta^{(i)})^2}{2h_t^{(i)}} \right\} \quad (3.11)$$

$p_{i,t}$ 의 계산은 다음과 같은 반복적 비선형 계산 공식(nonlinear recursive scheme)으로 표현된다.

$$p_{i,t} = P(s_t = i|\zeta_{t-1}) = \sum_{j=1}^2 P(s_t = i|s_{t-1} = j)P(s_{t-1} = j|\zeta_{t-1}). \quad (3.12)$$

예를 들면,  $i = 1$ 인 경우에  $p_{1,t} = p \times P(s_{t-1} = 1|\zeta_{t-1}) + (1-q) \times P(s_{t-1} = 2|\zeta_{t-1})$ 이 된다. 우변에 포함된  $P(s_{t-1} = j|\zeta_{t-1})$ 의 계산은 베이즈 공식(Bayes rule)에 의하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(s_{t-1} = j|\zeta_{t-1}) &= P(s_{t-1} = j|r_{t-1}, \zeta_{t-2}) \\ &= \frac{f(r_{t-1}|s_{t-1} = j)P(s_{t-1} = j|\zeta_{t-2})}{\sum_{i=1}^2 f(r_{t-1}|s_{t-1} = i)P(s_{t-1} = i|\zeta_{t-2})} \\ &= \frac{f(r_{t-1}|s_{t-1} = j)p_{j,t-1}}{\sum_{i=1}^2 f(r_{t-1}|s_{t-1} = i)p_{i,t-1}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

즉,  $p_{i,t}$ 는 비선형적인 반복 계산 알고리즘을 통하여 계산된다. 정규분포를 가정할 경우, 국면이 2개인 국면전환 GARCH 모형의 로그우도함수  $l$ 은 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} l &= \sum_{t=1}^T \log [p_{1,t}f(r_t|s_t = 1) + (1 - p_{1,t})f(r_t|s_t = 2)] \\ &= \sum_{t=1}^T \log \left[ \frac{p_{1,t}}{\sqrt{2\pi h_t^{(1)}}} \exp \left\{ -\frac{(r_t - \delta^{(1)})^2}{2h_t^{(1)}} \right\} + \frac{1 - p_{1,t}}{\sqrt{2\pi h_t^{(2)}}} \exp \left\{ -\frac{(r_t - \delta^{(2)})^2}{2h_t^{(2)}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

따라서, MRS-GARCH(1,1) 모형의 로그우도함수의 값은 주어진 모수의 값들( $\delta^{(i)}$ ,  $\alpha_0^{(i)}$ ,  $\alpha_1^{(i)}$ ,  $\beta_1^{(i)}$ ,  $p$ ,  $q$ ) 및 적절한 초기값  $p_{1,0}$ ,  $\varepsilon_0$ 와  $h_0^{(i)}$ 로 표현될 수 있으며, 본 연구에서 모수들에 대한 최우추정량은 MATLAB의 BFGS 준뉴턴(Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno quasi-Newton) 최적화 알고리즘을 이용하여 구하였다 (Marcucci, 2005). 참고로, 우도함수를 EM(expectation and maximization) 알고리즘으로 최대화하는 방법도 사용될 수 있으며 이에 관련된 내용은 Hamilton (1994)을 참조하기 바란다.

### 3.4. 모형의 성능평가 방법

국면전환 GARCH 모형 및 기존의 GARCH 모형들의 예측성능을 비교하기 위해서는 손실함수(loss-function)가 필요하다. 본 연구에서는 비교의 일반성을 유지하기 위하여 다음과 같은 3가지 손실함수를

이용한다.

$$\text{MSE} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left( \hat{\sigma}_{t+k} - \hat{h}_{t+k|t}^{\frac{1}{2}} \right)^2, \quad (3.15)$$

$$\text{R2LOG} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left[ \log \left( \hat{\sigma}_{t+k}^2 \hat{h}_{t+k|t}^{-1} \right) \right]^2, \quad (3.16)$$

$$\text{MAD} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \hat{\sigma}_{t+k} - \hat{h}_{t+k|t}^{\frac{1}{2}} \right|. \quad (3.17)$$

단,  $n$ 은 예측의 총 횟수를,  $k$ 는 예측시차를,  $\hat{\sigma}_{t+k}^2$ 은  $(t+k)$ 시점에서의 실제 변동성을 나타내며,  $\hat{h}_{t+k|t}$ 은  $t$ 시점에서 예측된  $(t+k)$ 시점의 변동성 추정값이다. MSE는 평균제곱오차(mean squared error)를 나타내며 R2LOG는 예측값과 실현변동성간 비율로서 로그변환된 예측값과 실현 변동성의 차이를 표현한다. R2LOG라는 표현은, 이 값이 로그변환된 변수 사이의 회귀결정계수( $R^2$ )와 동일하기 때문에 사용된 것이다 (Pagan과 Schwert, 1990). MAD은 평균절대편차(mean absolute deviation)를 의미하며 일반적으로 MSE보다 이상치의 존재를 확인하는 데 있어서 더 좋은 척도로 알려져 있다 (Marcucci, 2005).

표본 내(in-sample) 검정에 있어  $\hat{\sigma}_t^2$ 은  $t$ 시점일 때 변동성으로 예측성능 비교의 기준이 되며  $(r_t - \bar{r})^2$ 과 같이 일별 수익률( $r_t$ )에서 일별 수익률의 평균( $\bar{r}$ )을 뺀 값의 제곱으로 추정한다. 표본 외(out-sample) 예측성능 평가를 위해서는 예측 시점에서 관찰되는 실현 변동성(realized volatility)의 추정값이 필요하다. 일반적으로는  $(r_t - \bar{r})^2$ 을 실현 변동성의 대체값(proxy)으로 사용한다. 그러나 표본 내 검정에서는 좋은 기준이 되지만 표본 외 예측성능 평가에 있어서 이 값은 다소 불안정한 값으로 나타날 수 있다. 따라서 이런 문제를 보완하기 위해 예측하는 기간인  $k$ 시차를 반영하여  $\hat{\sigma}_{t+k}^2 = \sum_{i=t+1}^{t+k} (r_i - \bar{r})^2$ 를 실현 변동성의 대체값으로 사용하여 예측성능을 평가하였다.

한편,  $\hat{h}_{t+k|t}$ 은  $\hat{h}_{t+k|t} = \sum_{\tau=t+1}^{t+k} \sum_{i=1}^2 P(s_\tau = i | \zeta_t) \hat{h}_\tau^{(i)}$ 와 같이 계산된다. 여기서,  $\hat{h}_t^{(i)}$ 은 식 (3.7)을 이용하여 반복적으로 계산될 수 있으며 이에 대한 자세한 설명은 Klaassen (2002)을 참조하기 바란다.

#### 4. 실증분석

본 장에서는 일별 KOSPI 주가지수를 이용하여 GARCH, EGARCH, GJR-GARCH 모형 및 국면전환 GARCH 모형에 적합하고 각 모형들의 변동성 예측력에 대하여 비교 분석한다.

##### 4.1. 분석자료

분석에 사용된 자료는 2000년 1월 4일부터 2014년 10월 30일까지의 총 3,663개의 일별 KOSPI 주가지수이며, 이 중에서 모형의 적합을 위하여 2000년 1월 4일부터 2012년 12월 28일까지 3,214개 자료를 표본 내 자료로 이용하였고, 모형의 예측성능을 평가하기 위하여 2013년 1월 2일부터 2014년 10월 30일까지의 자료를 표본 외의 자료로 사용하였다. 모든 자료는 한국거래소(<http://www.krx.co.kr>)에서 내려받기 할 수 있다.

각 모형의 적합을 위하여 KOSPI 지수는 로그차분한 수익률로 변환하였다. 즉,  $t$ 시점의 일별 KOSPI 주가지수를  $P_t$ 라고 하면 일별 수익률  $r_t$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = 100 \times \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right). \quad (4.1)$$

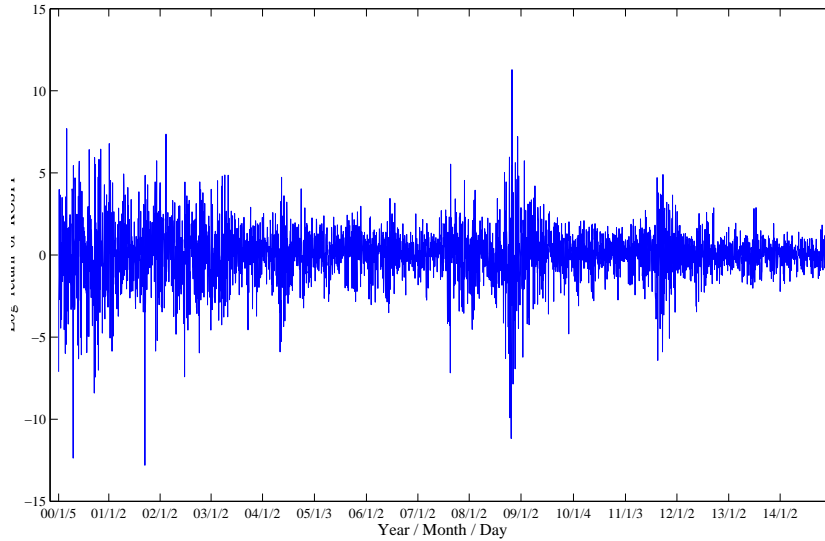


Figure 4.1. Time series plot of the log-return ( $r_t$ ) for daily KOSPI.

Table 4.1. Estimation results for GARCH(1, 1), EGARCH(1, 1), and GJR-GARCH(1, 1) models with three types of error distribution

Model	$\hat{\delta}$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\xi}$	$\hat{\nu}$
GARCH-N	0.0681 (0.0191)	0.0242 (0.0043)	0.0807 (0.0081)	0.9038 (0.0084)		
GARCH-t	0.0856 (0.0186)	0.0250 (0.0050)	0.0792 (0.0091)	0.9047 (0.0095)		8.5013 (1.1264)
GARCH-GED	0.0839 (0.0180)	0.0248 (0.0050)	0.0793 (0.0093)	0.9044 (0.0098)		1.4424 (0.0517)
EGARCH-N	0.0378 (0.0005)	-0.1192 (0.0068)	0.1635 (0.0091)	0.9846 (0.0093)	-0.0694 (0.0032)	
EGARCH-t	0.0607 (0.0185)	-0.1184 (0.0126)	0.1611 (0.0171)	0.9851 (0.0125)	-0.0786 (0.0038)	8.6366 (1.2681)
EGARCH-GED	0.0608 (0.0183)	-0.1194 (0.0127)	0.1619 (0.0172)	0.9850 (0.0125)	-0.0736 (0.0039)	1.4705 (0.0533)
GJR-N	0.0416 (0.0189)	0.0308 (0.0049)	0.1334 (0.0139)	0.9041 (0.0084)	0.0156 (0.0079)	
GJR-t	0.0639 (0.0185)	0.0302 (0.0057)	0.1355 (0.0163)	0.9044 (0.0099)	0.0117 (0.0094)	9.1691 (1.0644)
GJR-GED	0.0638 (0.0178)	0.0303 (0.0057)	0.1338 (0.0162)	0.9041 (0.0099)	0.0131 (0.0092)	1.4808 (0.0536)

Note: Values in parenthesis denote asymptotic standard errors.

Figure 4.1은 표본 내와 표본 외의 모든 기간 동안 로그수익률  $r_t$ 에 대한 시계열 도표(time series plot)로서, 이분산 모형의 전형적인 특징인 변동성 집중(volatility clustering) 현상을 보여주고 있다. 서브 프라임 모기지 사태로 시작되는 글로벌 금융위기 기간인 2008년과 2009년에서 변동성이 높아지고 있으며, 그 이후 변동성을 이전 상태로 점차로 회복하고 있으며 그리스 국가 부도위기 이후 발생하는 남

**Table 4.2.** Estimation results for MRS-GARCH(1, 1) model with three types of error distribution

Model	MRS-GARCH-N	MRS-GARCH-t	MRS-GARCH-GED
$\hat{\delta}^{(1)}$	0.1050 (0.0409)	0.1156 (0.0218)	0.1086 (0.0201)
$\hat{\delta}^{(2)}$	-1.3630 (0.0237)	-0.4617 (0.1783)	-0.5388 (0.0193)
$\hat{\alpha}_0^{(1)}$	$1.92 \times 10^{-9}$ ( $1.17 \times 10^{-8}$ )	0.0082 (0.0064)	0.0073 (0.0059)
$\hat{\alpha}_0^{(2)}$	$5.07 \times 10^{-9}$ ( $8.34 \times 10^{-8}$ )	0.2213 (0.0725)	0.2534 (0.0717)
$\hat{\alpha}_1^{(1)}$	0.0372 (0.0168)	0.0116 (0.0130)	0.0141 (0.0108)
$\hat{\alpha}_1^{(2)}$	0.1423 (0.0472)	0.0727 (0.0331)	0.0713 (0.0339)
$\hat{\beta}_1^{(1)}$	0.9091 (0.0122)	0.9454 (0.0106)	0.9459 (0.0102)
$\hat{\beta}_1^{(2)}$	0.8553 (0.0461)	0.9250 (0.0338)	0.9260 (0.0349)
$\hat{p}$	0.9663 (0.0048)	0.9741 (0.0094)	0.9764 (0.0065)
$\hat{q}$	0.4886 (0.0163)	0.8649 (0.0394)	0.8435 (0.0411)
$\hat{\nu}$		10.4915 (1.8360)	1.5280 (0.0588)
$\hat{\pi}^{(1)}$	0.9382	0.8391	0.8690
$\hat{\pi}^{(2)}$	0.0618	0.1609	0.1310

Note: Values in parenthesis denote asymptotic standard errors.

유럽 재정위기 기간인 2010년 이후부터 변동성이 다시 높아지는 것을 확인할 수 있다.

#### 4.2. 모형의 추정 및 분석

2장에서 설명된 GARCH(1, 1), EGARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1) 모형들 및 MRS-GARCH(1, 1) 모형은 식 (3.10)의 로그우도함수를 이용하여 최우추정법으로 추정된다. 오차항의 분포는 3가지 오차항 분포(정규분포,  $t$ -분포, GED 분포)를 사용하였다. 모형의 성능평가는 각 모형에 의해서 추정된 변동성의 예측값  $\hat{h}_{t+1|t}$ 을 실제 변동성  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ 와 비교하였다. Table 4.1은 GARCH(1, 1), EGARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1) 모형에 대한 추정 결과이고, Table 4.2는 MRS-GARCH(1, 1) 모형의 추정 결과이다. 각 모형의 표시와 함께 오차항의 분포는 정규분포이면 N,  $t$ -분포이면 t, GED 분포이면 GED를 붙여서 구분하였다.

Table 4.1에서와 같이 3가지 이분산성 모형 및 오차항의 분포에 관계없이 모든 모수가 유의하다는 점을 통하여 KOSPI 자료에 이분산성의 존재를 확인할 수 있다. 또한 EGARCH 모형의 경우  $\hat{\xi}$ 가 유의한 음수값을 갖는다는 것과, GJR-GARCH 모형의 경우  $\hat{\alpha}_1$ 이  $\hat{\xi}$ 보다 크다는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해서 KOSPI 자료는 음의 충격이 변동성에 더 큰 영향을 준다는 것을 알 수 있으며 비대칭성 효과가 존재한다는 것을 확인할 수 있다. Table 4.2는 MRS-GARCH(1, 1) 모형의 모수 추정 결과이다. Table 4.1과 유사하게 모수 추정 결과에서 모든 모수들이 유의하다는 것을 확인할 수 있다. 특히, 비조건부 확



**Table 4.3.** Forecasting performances of the models in the in-sample

Model	MSE	Rank(MSE)	R2LOG	Rank(R2LOG)	MAD	Rank(MAD)
GARCH-N	1.562	12	8.125	12	0.944	12
GARCH-t	1.544	10	8.111	11	0.940	10
GARCH-GED	1.546	11	8.110	10	0.940	10
EGARCH-N	1.447	5	8.027	5	0.921	4
EGARCH-t	1.447	5	8.037	8	0.922	6
EGARCH-GED	1.444	4	8.023	4	0.921	4
GJR-N	1.531	9	8.038	9	0.935	9
GJR-t	1.518	7	8.035	7	0.932	7
GJR-GED	1.519	8	8.030	6	0.932	7
MRS-GARCH-N	1.387	1	7.753	1	0.891	1
MRS-GARCH-t	1.435	3	7.955	3	0.912	3
MRS-GARCH-GED	1.423	2	7.863	2	0.904	2

**Table 4.4.** 1-step-ahead volatility forecasting performances of the models in the out-sample

Model	MSE	Rank(MSE)	R2LOG	Rank(R2LOG)	MAD	Rank(MAD)
GARCH-N	0.2924	4	7.7099	5	0.6310	3
GARCH-t	0.2981	8	7.8119	8	0.6401	8
GARCH-GED	0.2963	7	7.7802	7	0.6373	5
EGARCH-N	0.2807	1	7.5797	2	0.6193	1
EGARCH-t	0.2905	3	7.7028	4	0.6345	4
EGARCH-GED	0.2867	2	7.6572	3	0.6285	2
GJR-N	0.294	5	7.9201	11	0.6390	7
GJR-t	0.3066	10	8.0749	13	0.6579	10
GJR-GED	0.3014	9	8.0102	12	0.6501	9
MRS-GARCH-N	0.2953	6	7.5001	1	0.6376	6
MRS-GARCH-t	0.3132	12	7.7752	6	0.6655	13
MRS-GARCH-GED	0.3088	11	7.9070	10	0.6596	11

를인  $\hat{\sigma}^{(1)}$ 이  $\hat{\sigma}^{(2)}$ 보다 더 큰 것을 알 수 있다. 이는 변동성이 높은 기간보다 낮은 기간이 오래 지속되는 현상이 KOSPI 수익률에서 나타난다는 것을 의미한다. 전이확률의 값이 유의하다는 것은 KOSPI 수익률에서 두 가지 국면이 유의하게 존재한다는 것을 의미한다. 변동성이 낮은 국면과 높은 국면 모두에서 GARCH 모형의 모수가 유의하다는 것은 각 국면마다 이분산성이 존재한다는 것을 의미한다.

Table 4.3은 표본 내 자료에서 오차항의 분포에 따른 변동성 추정의 적합도를 3가지 손실함수로 평가한 결과이다. 모형별 비교를 위해 각 손실함수의 값과 내림차순의 순위(Rank)를 나타내었고 이 결과는 모형의 우수성의 순위로 고려될 수 있을 것이다. 따라서, 오차항의 분포에 관계없이 MRS-GARCH 모형이 다른 GARCH 모형들보다 더 우수함을 확인할 수 있으며, MRS-GARCH 모형 내에서는 오차항의 분포가 정규분포일 때 변동성의 예측력이 가장 우수한 것으로 확인되었다. 기존의 GARCH 모형들에서는 오차항의 분포가 정규분포일 때보다  $t$ -분포 및 GED 분포일 때 더욱 적합한 것으로 나타났다는 점은 흥미로운 결과이다. 결론적으로, 표본 내 자료에서는 정규분포를 오차항의 분포로 가지는 MRS-GARCH 모형이 가장 우수한 것으로 나타났으며, 최근의 세계 경제 상황뿐만 아니라 한국 경제에 큰 영향을 미쳤을 금융위기와 재정위기와 같은 구조적 변화를 변동성 예측에 반영할 수 있다는 점에서 바람직한 모형으로 사료된다.

Table 4.4~Table 4.7은 각각 1일, 5일, 10일, 22일 후의 표본 외 변동성 예측에 대한 각 모형의 손실함수

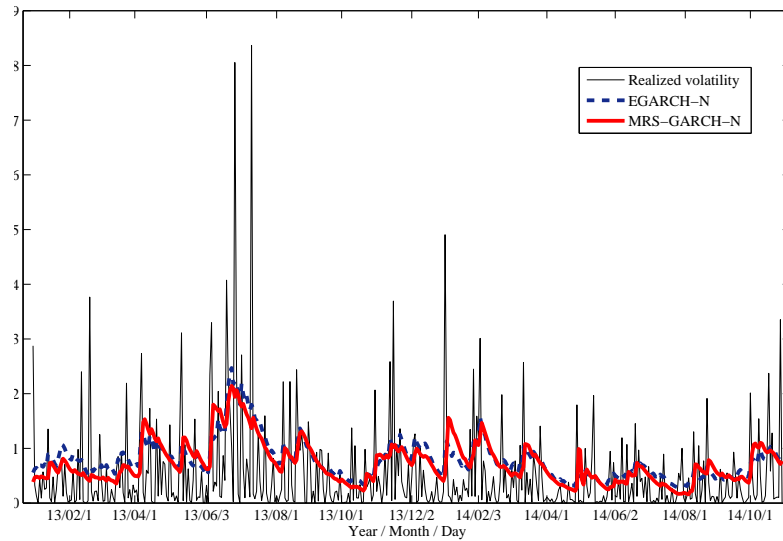


Figure 4.2. 1-step-ahead volatility forecasting of EGARCH-N and MRS-GARCH-N

Table 4.5. 5-step-ahead volatility forecasting performances of the models in the out-sample

Model	MSE	Rank(MSE)	R2LOG	Rank(R2LOG)	MAD	Rank(MAD)
GARCH-N	0.4854	5	1.0088	6	1.9091	5
GARCH-t	0.5056	8	1.0465	9	1.9630	8
GARCH-GED	0.4987	6	1.0341	7	1.9452	6
EGARCH-N	0.3151	1	0.7153	1	1.4683	1
EGARCH-t	0.3316	3	0.7446	3	1.5120	3
EGARCH-GED	0.3236	2	0.7302	2	1.4912	2
GJR-N	0.5455	10	1.1108	10	2.0807	10
GJR-t	0.5818	12	1.1655	12	2.1737	12
GJR-GED	0.5646	11	1.1399	11	2.1296	11
MRS-GARCH-N	0.3969	4	0.8147	4	1.6900	4
MRS-GARCH-t	0.5048	7	0.9859	5	1.9487	7
MRS-GARCH-GED	0.5302	9	1.0405	8	2.0106	9

값 및 순위를 나타낸다. 또한 Figure 4.2~Figure 4.5는 4가지 미래시점 예측에 대한 실현변동성의 값과 예측값을 그린 것으로서, 편의상 기존 GARCH 모형 중에서 가장 좋은 성능을 보여주는 EGARCH-N 모형과 국면전환 GARCH 모형 중에서 가장 좋은 성능을 보여주는 MRS-GARCH-N 모형의 두가지 예측값만 나타내었다.

Table 4.4의 1일 후 변동성 예측에 있어서는, MRS-GARCH 모형이 GARCH 모형들보다 예측력이 좋지 않았고, 특히  $t$ -분포와 GED 분포를 오차항 분포로 사용하였을 때 모든 경우에 있어서 예측력이 나빠졌다. 또한, Figure 4.2를 통해서 볼 때, EGARCH와 MRS-GARCH 모형은 비슷한 형태로 변동성을 예측하고 있으나, 두 모형 모두 실현변동성에서 나타나는 두터운 꼬리를 설명하기에는 부족함을 나타내었다.

Table 4.5의 5일 후 예측에서부터 MSR-GARCH 모형의 예측력은 1일 후 예측에 비하여 상대적으로 좋

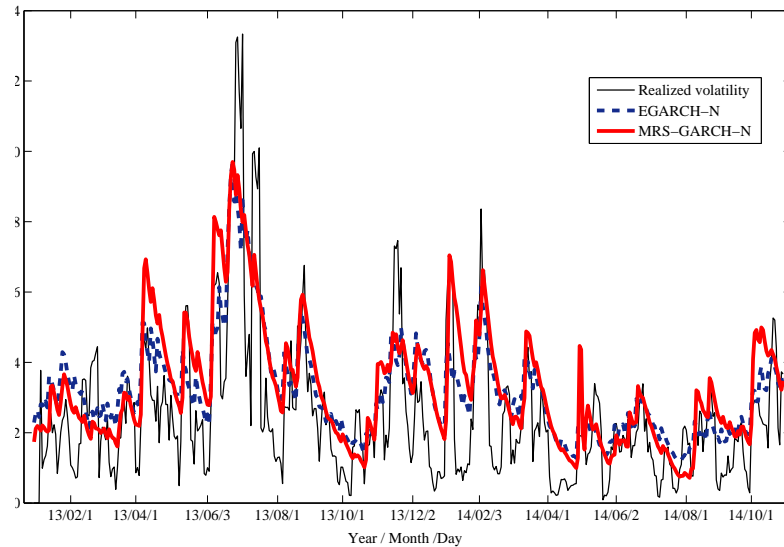


Figure 4.3. 5-step-ahead volatility forecasting of EGARCH-N and MRS-GARCH-N

Table 4.6. 10-step-ahead volatility forecasting performances of the models in the out-sample

Model	MSE	Rank(MSE)	R2LOG	Rank(R2LOG)	MAD	Rank(MAD)
GARCH-N	0.7852	6	0.6666	6	3.5450	6
GARCH-t	0.8303	8	0.702	9	3.6850	8
GARCH-GED	0.8151	7	0.6904	8	3.6381	7
EGARCH-N	0.3121	1	0.2976	1	1.9751	2
EGARCH-t	0.3155	3	0.3024	3	1.9838	3
EGARCH-GED	0.3121	1	0.2982	2	1.9737	1
GJR-N	0.9515	10	0.7743	10	4.1253	10
GJR-t	1.0136	12	0.8161	12	4.3145	12
GJR-GED	0.9784	11	0.7935	11	4.2051	11
MRS-GARCH-N	0.4387	4	0.4114	4	2.4013	4
MRS-GARCH-t	0.7579	5	0.6176	5	3.4213	5
MRS-GARCH-GED	0.8478	9	0.6775	7	3.8014	9

아지고 있다. EGARCH 모형은 여전히 좋은 성능을 보여주고 있다. Figure 4.3을 볼 때, 두 모형 모두 1일 후 예측에서보다 실현변동성을 상대적으로 잘 설명하고 있다. Table 4.6 및 Figure 4.4의 10일 후 예측은 5일 후 예측과 거의 유사한 성능 평가 결과를 보여주고 있다. 전반적으로 EGARCH 모형은 아주 좋은 예측력을 보여주는 반면, 이와 동일하게 비대칭적 효과 측정에 초점을 맞추고 있는 GJR-GARCH 모형은 가장 나쁜 예측력을 보여준다는 점은 흥미로운 결과로 보여진다.

Table 4.7의 22일 후 예측에 있어서는, MRS-GARCH-N 모형이 가장 좋은 성능을 보여주고 있다. 또한, EGARCH 모형들은 여전히 좋은 예측력을 보여주고 있다. Figure 4.5에서 볼 때, EGARCH 모형은 MRS-GARCH 모형에 비해서 실현변동성을 잘 설명하지 못함을 쉽게 확인할 수 있다. 즉, EGARCH 모형은 실제변동성을 과소평가하고 있는 것이다.

이상에서 볼 때, EGARCH 모형은 전반적으로 미래 예측 시점에 관계없이 로버스트한 예측성능을 보여

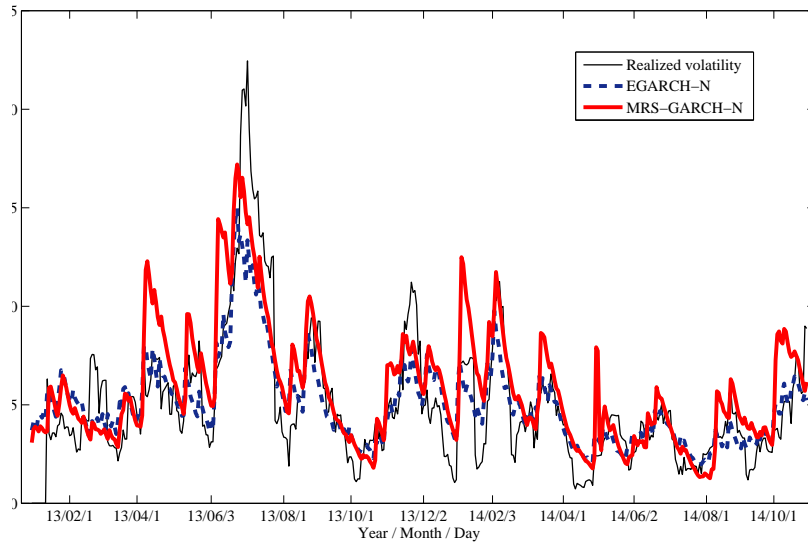


Figure 4.4. 10-step-ahead volatility forecasting of EGARCH-N and MRS-GARCH-N.

Table 4.7. 22-step-ahead volatility forecasting performances of the models in the out-sample

Model	MSE	Rank(MSE)	R2LOG	Rank(R2LOG)	MAD	Rank(MAD)
GARCH-N	1.9276	6	0.6054	7	9.3980	6
GARCH-t	2.0492	9	0.6435	9	9.7883	9
GARCH-GED	2.0081	8	0.6311	8	9.6547	7
EGARCH-N	0.8755	4	0.3609	4	4.5795	4
EGARCH-t	0.7863	2	0.3161	2	4.3299	2
EGARCH-GED	0.8307	3	0.3382	3	4.4508	3
GJR-N	2.4538	10	0.7344	10	11.2495	11
GJR-t	2.5439	12	0.7619	12	11.5133	12
GJR-GED	2.4547	11	0.7389	11	11.2384	10
MRS-GARCH-N	0.6979	1	0.3054	1	4.3272	1
MRS-GARCH-t	1.7309	5	0.5396	5	8.6793	5
MRS-GARCH-GED	1.9746	7	0.5956	6	9.6574	8

주었고, MRS-GARCH 모형은 장기적 예측에서 더 유리한 모형을 파악할 수 있다. GJR-GARCH 모형은 예상 밖으로 좋지 않은 예측력을 보여주었다.

## 5. 결론

본 논문에서는 시계열 자료에서 흔히 나타나는 구조적 변화를 변동성 예측에 반영하기 위한 국면전환 GARCH 모형을 소개하였다. 실제 자료에서 금융위기 및 재정위기와 같은 구조적 변화가 모형 적합에서 어떻게 반영되는 지 살펴보기 위하여 일별 KOSPI 수익률을 이용하였다. 기존의 GARCH 모형과 비교를 통하여 모형 성능을 평가하였으며, 변동성의 추정 및 예측을 세 가지 손실함수를 이용하여 평가하였다. 기존의 GARCH 모형들을 통하여 KOSPI 주가지수의 이분산성을 확인할 수 있었으며 EGARCH 및 GJR-GARCH 모형을 통하여 비대칭적 효과를 추정할 수 있었다. 특히, MRS-GARCH

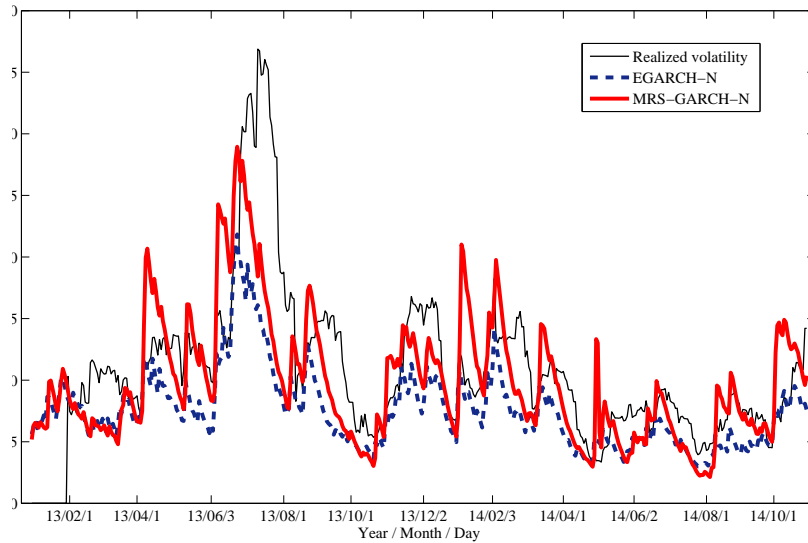


Figure 4.5. 22-step-ahead volatility forecasting of EGARCH-N and MRS-GARCH-N.

모형은, 구조적 변화를 잘 반영함으로써 표본 내 적합에서 우수한 성능을 보여주었다. 그러나, 구조적 변화가 뚜렷하지 않은 표본 외 단기 예측에서는 특별한 성능을 보여주지 못하였다. 장기 예측으로 갈수록 구조적 변화의 존재 가능성과 더불어 MRS-GARCH 모형은 우수한 예측력을 보여 주었다.

## References

- Hwang, S. and Ryu, H.-S. (2011). An empirical study on the volatility forecasts with regime-switching GARCH model in the Korean stock market, *Korean Journal of Financial Studies*, **40**, 171–194.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process, *Journal of Financial Economics*, **42**, 27–62.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica*, **57**, 357–384.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Klaassen, F. (2002). Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH, *Empirical Economics*, **27**, 363–394.
- Marcucci, J. (2005). Forecasting stock market volatility with regime-switching GARCH models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **9**, 1–53.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Pagan, A. R. and Schwert, G. W. (1990). Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*, **45**, 267–290.

# 국면전환 GARCH 모형을 이용한 코스피 변동성 분석

허진영<sup>a</sup> · 성병찬<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>중앙대학교 응용통계학과

(2015년 1월 20일 접수, 2015년 2월 26일 수정, 2015년 3월 18일 채택)

---

## 요약

변동성(volatility)은 투자위험을 의미하며 자산의 가격결정이나 포트폴리오 관리 및 투자전략에서 아주 중요한 역할을 한다. 이러한 변동성을 모형화하기 위한 조건부 이분산 모형으로서 전통적인 GARCH(generalized autoregressive conditional heteroskedastic) 모형 및 확장된 형태들이 널리 사용되어지고 있으나, 금융위기와 재정위기와 같은 구조적 변화를 변동성 예측에 반영할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 본 논문에서는 이를 극복하기 위한 모형으로서 국면전환 GARCH(Markov regime switching GARCH) 모형을 소개하고, 한국의 일별 KOSPI 수익률에 적용하여 변동성 분석 및 예측을 실시하고, 기존의 GARCH 모형들과 비교하여 그 성능을 평가한다. 그 결과 표본 내(in-sample)의 변동성 적합도 측면에서 국면전환 GARCH 모형이 가장 우수한 성능을 보였으며, 표본 외(out-of-sample) 예측력 측면에서는 국면전환 GARCH 모형이 단기적 예측에서 좋지 않은 성능을 보였으나 장기적 예측에서 우수함을 보였다.

주요용어: 조건부 이분산, 마코프 전환 모형, 구조적 변화

---

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2012R1A1A2008006).

<sup>1</sup>교신저자: (156-756) 서울시 동작구 흑석동 221번지, 중앙대학교 경영경제대학 응용통계학과.

E-mail: bcseong@cau.ac.kr