

최대 반감도 합-삭제 방법에 기반한 결혼문제 알고리즘

Marriage Problem Algorithm based on the Maximum Dispreference Sum-Delete Method

이상운*

Sang-Un Lee*

요약 본 논문은 안정된 결혼문제의 최적해를 쉽고 빠르게 찾는 알고리즘을 제안하였다. 첫 번째로, 남성의 여성 선호도와 여성의 남성 선호도 합 p_{ij} 의 $n \times n$ 정방행렬로 변환시킨다. 두 번째로, 행렬에서 최대 반감도 (최악의 선호도)인 최대값 $\max p_{ij}$ 를 행 또는 열의 개수가 1개 ($|r_i|=1$ or $|c_j|=1$)가 존재할 때까지 삭제한다. 만약, $|r_i|=1$ or $|c_j|=1$ 이면 선택하고, 선택된 p_{ij} 의 행 또는 열 값을 삭제한다. 이 과정을 $\forall (|r_i|=1 \cap |c_j|=1)$ 가 될 때까지 반복 수행한다. 제안된 알고리즘을 7개의 안정된 결혼문제에 적용한 결과 간단하면서도 기존 알고리즘의 해를 개선하는 효과를 얻었다.

Abstract In this paper proposes a stable marriage algorithm. The proposed algorithm firstly constructs an $n \times n$ matrix of men's and women's sum preference over opposite sex p_{ij} . It then repeatedly deletes row or column corresponding to the then maximum dispreference sum $\max p_{ij}$ until $\forall (|r_i|=1 \cap |c_j|=1)$. If $|r_i|=1$ or $|c_j|=1$ then we select the p_{ij} of $|r_i|=1$ or $|c_j|=1$ then the row or column values are deleted repeatedly until $\forall (|r_i|=1 \cap |c_j|=1)$. When tested on 7 stable marriage problems, the proposed algorithm has proved to improve on the existing solutions.

Key Words : Marriage Problem, Minimum Weight Matching, Maximum Matching, Preference

1. 서 론

결혼 문제 (marriage problem, MP)는 간선의 가중치 (edge weight)가 주어지는 경우와 가중치가 없는 (unweighted) 경우로 구분된다. 본 논문은 간선 가중치 (선호도)가 주어진 안정된 결혼 문제 (stable marriage problem, SM)를 대상으로 한다. SM은 n 명의 남성 (m_1, m_2, \dots, m_n)과 n 명의 여성 (w_1, w_2, \dots, w_n)이 있고, 각 자가 선호하는 이성의 순위가 주어졌을 때, n 쌍을 결혼

시키되 결혼 관계가 깨지지 않는 가장 안정적인 매칭을 찾는 문제로 최소 가중치 이분 매칭 (minimum weight bipartite matching) 또는 완전 매칭 (perfect matching)이라 한다.^[1,2]

주어진 그래프 $G=(V, E)$ 에 대해, SM 문제의 해 (solution)는 수행 복잡도 $O(|V|^2|E|)$ 의 Gale-Shapley 알고리즘^[3,4]으로 구한다.

본 논문은 안정된 결혼 문제의 해를 기존 알고리즘보다 간단히 구하는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 SM

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 : 2014년 10월 28일, 수정완료 : 2015년 5월 26일
게재확정일자 : 2015년 6월 12일

Received: 28 October, 2014 / Revised: 26 May, 2015 /
Accepted: 12 June, 2015

*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University,
Korea

문제에 대한 해를 구하는 Gale-Shapley 알고리즘^[3,4]을 고찰한다. 3장에서는 최대 반감도 합 (최악의 선호도 합)을 삭제하는 방법의 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 다양한 문제들에 적용하여 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. 관련연구와 연구 배경

n 명의 남성 (m_1, m_2, \dots, m_n)과 n 명의 여성 (w_1, w_2, \dots, w_n)가 있고, 각각은 선호도를 갖고 있다. 이 경우, 안정된 결혼 문제는 최소 가중치 합 (최우선 선호도 순위)의 이분 매칭 해를 구하는 문제이다. 이는 2개의 $K_{n,n}$ 인 완전 이분 그래프 (complete bipartite graph)로 표현될 수 있다. 이 문제의 해를 구하는 대표적인 방법으로 그림 1의 Gale-Shapley 알고리즘^[3,4]이 있으며, 수행 복잡도 (횟수)는 $O(|V|^2|E|)$ 이다.

```

function stableMatching {
    모든  $m \in M$  &  $w \in W$ 를 자유롭게 초기화시킴.
    while  $\exists$  자유로운 남성  $m$ 이 청혼할 대상인 여성  $w$ 이 있으면 {
         $w = m$ 의 최우선 선호 순위를 가짐
        if  $w$ 는 자유로운 then ( $m, w$ ) 짝을 약혼시킴
        else ( $w, m'$ ) 짝이 이미 존재
            if  $w$ 가  $m'$ 보다  $m$ 을 더 선호함 then ( $m, w$ ) 짝을 약혼시키고,  $m'$ 는 파혼시켜 자유롭게 함
            else ( $m', w$ ) 짝을 유지시킴.
    }
}
    
```

그림 1. Gale-Shapley 알고리즘
Fig. 1. Gale-Shapley algorithm

Hunt^[5]에서 인용된 그림 2의 SM_1 은 $n=4$ 인 안정된 결혼문제에 Gale-Shapley 알고리즘을 적용하여 보자.

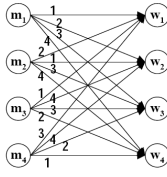
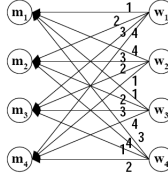
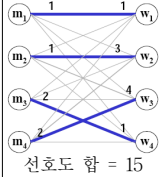
남성 선호도	여성 선호도	해
$m_1 : w_1, w_2, w_3, w_4$ $m_2 : w_2, w_1, w_3, w_4$ $m_3 : w_1, w_4, w_3, w_2$ $m_4 : w_4, w_3, w_1, w_2$	$w_1 : m_1, m_2, m_3, m_4$ $w_2 : m_4, m_3, m_2, m_1$ $w_3 : m_1, m_2, m_3, m_4$ $w_4 : m_3, m_4, m_1, m_2$	$(m_1, w_1) : 1+1=2$ $(m_2, w_2) : 1+3=4$ $(m_3, w_4) : 2+1=3$ $(m_4, w_3) : 2+4=6$
		 선호도 합 = 15

그림 2. SM_1 문제
Fig. 2. SM_1 problem

첫 번째로, m_1 을 w_1, w_3 가 가장 선호하며, m_2 는 가장

선호하는 여성이 없다. 또한 m_3 는 w_4 가, m_4 는 w_2 가 가장 선호한다. 여기서, m_1 을 w_1, w_3 의 2명이 가장 선호하기 때문에 1명을 선택해야 한다. m_1 이 w_1 을 1순위로, w_3 를 3순위로 선호한다. 따라서 (m_1, w_1) 을 짝을 선택하고 w_3 는 자유롭게 한다. 결국, $(m_1, w_1), (m_3, w_4), (m_4, w_2)$ 의 짝을 결정한다. 두 번째로, 짝을 결정하지 못한 m_2 가 가장 선호하는 여성은 w_2 이며, 이미 (m_4, w_2) 짝이 존재하지만, m_1 의 w_2 선호도 4는 m_2 의 w_2 선호도 1보다 우선 순위가 낮기 때문에 (m_2, w_2) 짝을 결정하고 m_4 를 자유롭게 한다. 세 번째로, 짝을 이루지 못한 m_3 에 대해 m_3 가 가장 선호하는 w_4 는 m_3 와 이미 짝을 이루고 있다. $(m_3, w_4) = 1+2=3$ 이고 $(m_3, w_1) = 2+1=3$ 으로 w_4 와 짝을 이루지 못한다. m_3 는 두 번째로 선호하는 w_3 (현재 자유로움)와 짝을 이룰 수 있다. 결국, (m_3, w_3) 짝을 결정한다. 이 결과 선호도 합 $z=2+4+3+6=15$ 를 얻는다.

III. 최대 반감도 합 삭제 결혼 문제 알고리즘

본 장에서는 안정된 결혼문제의 해를 간단하게 구하는 알고리즘을 제안한다. 제안 알고리즘은 사전에 남성의 여성 선호도와 상대방 여성의 남성 선호도 합을 구한다. 그림 2의 SM_1 문제를 선호도 합으로 변환시키면 그림 3과 같다.

셀의 값: (남성의 여성 선호도, 여성의 남성 선호도)

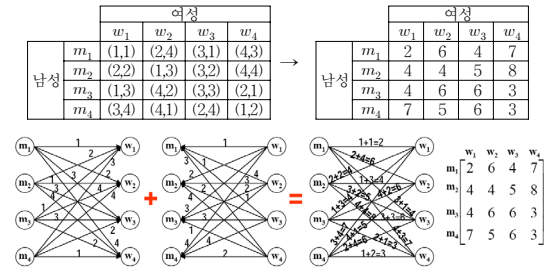


그림 3. 결혼문제의 선호도 합
Fig. 3. Sum of preference for marriage problem

제안된 알고리즘은 $n \times n$ 행렬의 선호도 합 데이터를 적용한다. 여기서, 선호도 값 1이 가장 선호하는 값이며, 값이 증가하면 선호도가 떨어진다. 따라서 최대 선호도 합은 2가 된다. 선호도 합이 최대인 값은 최악의 선호도로 최대 반감도가 된다.

본 장에서는 행 또는 열에서 1개의 값이 존재할 때까지 최대 반감도 (최악의 선호도 합)인 최대값을 삭제하는 방법을 적용한다. 만약, 행 또는 열에서 1개가 선택되면 해당 값의 나머지 행 또는 열의 값을 삭제한다. 이 과정을 모든 행과 열의 값이 1개가 존재할 때까지 수행한다. 제안된 알고리즘은 그림 4에 제시되어 있다.

Step 1. $n \times n$ 정방행렬 작성.
 셀 값 p_{ij} = 남성의 여성 선호도 + 여성의 남성 선호도.

Step 2. 최대 반감도 (최대값) 삭제
 $\max p_{ij}$ 삭제 /* $\max p_{ij}$: $n \times n$ 행렬의 최대값
 while $\forall (|r_i|=1 \cap |c_j|=1)$
 if $|r_i|=1$ then p_{ij} 선택, c_j 값 삭제
 else if $|c_j|=1$ then p_{ij} 선택, r_i 값 삭제
 else if $\forall (|r_i|>1 \cap |c_j|>1)$ then $\max p_{ij}$ 삭제
 end

최적해 $z = \sum_{i=1}^n p_{ij}$

Step 3. 해 개선
 /* $\min p_{ij}$: $n \times n$ 행렬의 최소값
 $\min p_{ij}$ 를 동일 행 또는 열은 1개로 독립적인 개수 계산
 if $\exists, \min p_{ij} \notin z$ then $\min p_{ij} \leftarrow p_{ij}$ 로 이동, z' 계산
 if $z' \leq z$ then 이동
 else if $z' > z$ then z 로 확정
 else if $\forall, \min p_{ij} \in z$ then z 확정.

그림 4. 최대 반감도 합 삭제 알고리즘
 Fig. 4. Maximum dispreference sum delete algorithm

SM_1 문제에 대해 최대 반감도 합 삭제 알고리즘을 적용한 결과는 그림 5와 같다.

Step 1은 그림 3과 같이 얻었다. Step 2에서는 최대값인 8,7,6,5를 차례로 삭제하면 $|r_4|=1, (4,4)=3, |c_2|=1, (2,2)=4$ 와 $|c_3|=1, (1,3)=4$ 를 얻는다. 따라서 c_4 인 $(3,4)=3, r_2$ 인 $(2,1)=4$ 와 r_1 인 $(1,1)=2$ 가 삭제된다. 이로 인해 마지막으로 남은 $|r_3|=1 \cap |c_1|=1$ 인 $(3,1)=4$ 가 선택되어 해는 $z=4+4+4+3=15$ 를 얻는다. Step 3에서는 $\min p_{ij}$ 인 $(1,1)=2$ 이 선택되지 않아 $(1,3)=4$ 를 $(1,1)=2$ 로 이동시키면, 기존에 선택된 $(3,1)=4$ 는 $(3,4)=3$ 으로 이동되었다. 이로 인해 $(4,4)=3$ 이 $(4,3)=6$ 으로 이동되었다. 결국, $z'=2+4+3+6=15$ 로 $z' \leq z$ 를 얻어 안정된 결혼의 최적 해를 얻는다. 제안된 알고리즘은 Gale-Shapley 알고리즘^[3,4]과 동일한 해를 보다 쉽게 구하였다.

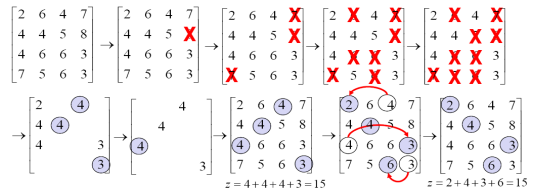


그림 5. SM_1 문제의 제안된 알고리즘 해
 Fig. 5. Solution of proposed algorithm for SM_1 problem

IV. 알고리즘 적용 및 결과 분석

본 장에서는 그림 6의 7개 안정된 결혼 문제에 제안된 알고리즘을 적용하여 본다. SM_2, SM_3, SM_4 는 Irving^[6,7]에서, SM_5, SM_6 은 Iwama^[8]에서, SM_7 은 Kim^[9]에서, SM_8 은 Wikipedia^[4]에서 인용되었다.

남성 선호도 $m_1 : w_1, w_4, w_2, w_3$ $m_2 : w_3, w_2, w_4, w_1$ $m_3 : w_2, w_3, w_4, w_1$ $m_4 : w_3, w_2, w_4, w_1$	여성 선호도 $w_1 : m_4, m_1, m_2, m_3$ $w_2 : m_1, m_2, m_4, m_3$ $w_3 : m_3, m_2, m_1, m_4$ $w_4 : m_2, m_4, m_3, m_1$	해=13 $(m_1, w_1) : 1+2=3$ $(m_2, w_2) : 2+2=4$ $(m_3, w_3) : 2+1=3$ $(m_4, w_4) : 1+2=3$																																																																																																			
<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th></tr><tr><th>m_1</th><td>(1,2)</td><td>(3,1)</td><td>(4,3)</td><td>(2,4)</td></tr><tr><th>m_2</th><td>(4,3)</td><td>(2,2)</td><td>(1,2)</td><td>(3,1)</td></tr><tr><th>m_3</th><td>(4,4)</td><td>(1,4)</td><td>(2,1)</td><td>(3,3)</td></tr><tr><th>m_4</th><td>(3,1)</td><td>(4,3)</td><td>(2,4)</td><td>(1,2)</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	m_1	(1,2)	(3,1)	(4,3)	(2,4)	m_2	(4,3)	(2,2)	(1,2)	(3,1)	m_3	(4,4)	(1,4)	(2,1)	(3,3)	m_4	(3,1)	(4,3)	(2,4)	(1,2)	→	<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th></tr><tr><th>m_1</th><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><th>m_2</th><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><th>m_3</th><td>8</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><th>m_4</th><td>4</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	m_1	3	4	7	6	m_2	7	4	3	4	m_3	8	5	3	6	m_4	4	7	6	3	(a) SM_2																																																
	w_1	w_2	w_3	w_4																																																																																																	
m_1	(1,2)	(3,1)	(4,3)	(2,4)																																																																																																	
m_2	(4,3)	(2,2)	(1,2)	(3,1)																																																																																																	
m_3	(4,4)	(1,4)	(2,1)	(3,3)																																																																																																	
m_4	(3,1)	(4,3)	(2,4)	(1,2)																																																																																																	
	w_1	w_2	w_3	w_4																																																																																																	
m_1	3	4	7	6																																																																																																	
m_2	7	4	3	4																																																																																																	
m_3	8	5	3	6																																																																																																	
m_4	4	7	6	3																																																																																																	
남성 선호도 $m_1 : w_1, w_4, w_3, w_2$ $m_2 : w_4, w_2, w_1, w_3$ $m_3 : w_2, w_1, w_4, w_3$ $m_4 : w_2, w_3, w_4, w_1$	여성 선호도 $w_1 : m_2, m_3, m_1, m_4$ $w_2 : m_2, m_4, m_1, m_3$ $w_3 : m_1, m_4, m_3, m_2$ $w_4 : m_1, m_4, m_2, m_3$	해=14 $(m_1, w_1) : 2+1=3$ $(m_2, w_2) : 2+1=3$ $(m_3, w_1) : 2+2=4$ $(m_4, w_3) : 2+2=4$																																																																																																			
<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th></tr><tr><th>m_1</th><td>(1,3)</td><td>(4,3)</td><td>(3,1)</td><td>(2,1)</td></tr><tr><th>m_2</th><td>(3,1)</td><td>(2,1)</td><td>(4,4)</td><td>(1,3)</td></tr><tr><th>m_3</th><td>(2,2)</td><td>(1,4)</td><td>(4,3)</td><td>(3,4)</td></tr><tr><th>m_4</th><td>(4,4)</td><td>(1,2)</td><td>(2,2)</td><td>(3,2)</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	m_1	(1,3)	(4,3)	(3,1)	(2,1)	m_2	(3,1)	(2,1)	(4,4)	(1,3)	m_3	(2,2)	(1,4)	(4,3)	(3,4)	m_4	(4,4)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	→	<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th></tr><tr><th>m_1</th><td>4</td><td>7</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><th>m_2</th><td>4</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><th>m_3</th><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><th>m_4</th><td>8</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	m_1	4	7	4	3	m_2	4	3	8	4	m_3	4	5	7	7	m_4	8	3	4	5	(b) SM_3																																																
	w_1	w_2	w_3	w_4																																																																																																	
m_1	(1,3)	(4,3)	(3,1)	(2,1)																																																																																																	
m_2	(3,1)	(2,1)	(4,4)	(1,3)																																																																																																	
m_3	(2,2)	(1,4)	(4,3)	(3,4)																																																																																																	
m_4	(4,4)	(1,2)	(2,2)	(3,2)																																																																																																	
	w_1	w_2	w_3	w_4																																																																																																	
m_1	4	7	4	3																																																																																																	
m_2	4	3	8	4																																																																																																	
m_3	4	5	7	7																																																																																																	
m_4	8	3	4	5																																																																																																	
남성 선호도 $m_1 : w_5, w_1, w_3, w_4, w_6, w_5$ $m_2 : w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ $m_3 : w_3, w_4, w_2, w_5, w_1, w_6$ $m_4 : w_4, w_1, w_3, w_5, w_6, w_2$ $m_5 : w_5, w_1, w_4, w_6, w_3, w_2$ $m_6 : w_1, w_6, w_2, w_3, w_5, w_4$	여성 선호도 $w_1 : m_5, m_1, m_6, m_3, m_4$ $w_2 : m_6, m_2, m_1, m_4, m_3, m_5$ $w_3 : m_1, m_4, m_3, m_6, m_2, m_5$ $w_4 : m_3, m_3, m_4, m_5, m_1, m_6$ $w_5 : m_3, m_5, m_6, m_4, m_2, m_1$ $w_6 : m_1, m_6, m_3, m_1, m_5, m_2$	해=23 $(m_1, w_1) : 2+2=4$ $(m_2, w_2) : 2+2=4$ $(m_3, w_3) : 1+3=4$ $(m_4, w_1) : 1+3=4$ $(m_5, w_5) : 1+2=3$ $(m_6, w_6) : 2+2=4$																																																																																																			
<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th><th>w_5</th><th>w_6</th></tr><tr><th>m_1</th><td>(2,2)</td><td>(1,3)</td><td>(3,1)</td><td>(4,5)</td><td>(6,6)</td><td>(5,4)</td></tr><tr><th>m_2</th><td>(1,4)</td><td>(2,2)</td><td>(3,5)</td><td>(4,1)</td><td>(5,5)</td><td>(6,6)</td></tr><tr><th>m_3</th><td>(5,5)</td><td>(3,5)</td><td>(1,3)</td><td>(2,2)</td><td>(4,1)</td><td>(6,3)</td></tr><tr><th>m_4</th><td>(2,6)</td><td>(6,4)</td><td>(3,2)</td><td>(1,3)</td><td>(4,4)</td><td>(5,1)</td></tr><tr><th>m_5</th><td>(2,1)</td><td>(6,6)</td><td>(5,6)</td><td>(3,4)</td><td>(1,2)</td><td>(4,5)</td></tr><tr><th>m_6</th><td>(1,3)</td><td>(3,1)</td><td>(4,4)</td><td>(6,6)</td><td>(5,3)</td><td>(2,2)</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	m_1	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(4,5)	(6,6)	(5,4)	m_2	(1,4)	(2,2)	(3,5)	(4,1)	(5,5)	(6,6)	m_3	(5,5)	(3,5)	(1,3)	(2,2)	(4,1)	(6,3)	m_4	(2,6)	(6,4)	(3,2)	(1,3)	(4,4)	(5,1)	m_5	(2,1)	(6,6)	(5,6)	(3,4)	(1,2)	(4,5)	m_6	(1,3)	(3,1)	(4,4)	(6,6)	(5,3)	(2,2)	→	<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th><th>w_5</th><th>w_6</th></tr><tr><th>m_1</th><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>9</td><td>12</td><td>9</td></tr><tr><th>m_2</th><td>5</td><td>4</td><td>8</td><td>5</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><th>m_3</th><td>10</td><td>8</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td></tr><tr><th>m_4</th><td>8</td><td>10</td><td>5</td><td>4</td><td>8</td><td>6</td></tr><tr><th>m_5</th><td>3</td><td>12</td><td>11</td><td>7</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><th>m_6</th><td>4</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>8</td><td>4</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	m_1	4	4	4	9	12	9	m_2	5	4	8	5	10	12	m_3	10	8	4	4	5	9	m_4	8	10	5	4	8	6	m_5	3	12	11	7	3	9	m_6	4	4	8	12	8	4	(c) SM_4
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6																																																																																															
m_1	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(4,5)	(6,6)	(5,4)																																																																																															
m_2	(1,4)	(2,2)	(3,5)	(4,1)	(5,5)	(6,6)																																																																																															
m_3	(5,5)	(3,5)	(1,3)	(2,2)	(4,1)	(6,3)																																																																																															
m_4	(2,6)	(6,4)	(3,2)	(1,3)	(4,4)	(5,1)																																																																																															
m_5	(2,1)	(6,6)	(5,6)	(3,4)	(1,2)	(4,5)																																																																																															
m_6	(1,3)	(3,1)	(4,4)	(6,6)	(5,3)	(2,2)																																																																																															
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6																																																																																															
m_1	4	4	4	9	12	9																																																																																															
m_2	5	4	8	5	10	12																																																																																															
m_3	10	8	4	4	5	9																																																																																															
m_4	8	10	5	4	8	6																																																																																															
m_5	3	12	11	7	3	9																																																																																															
m_6	4	4	8	12	8	4																																																																																															
남성 선호도 $m_1 : w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ $m_2 : w_3, w_1, w_5, w_2, w_4$ $m_3 : w_2, w_1, w_5, w_4, w_3$ $m_4 : w_3, w_2, w_4, w_5, w_1$ $m_5 : w_3, w_4, w_2, w_5, w_1$	여성 선호도 $w_1 : m_2, m_1, m_3, m_4, m_5$ $w_2 : m_2, m_1, m_4, m_5, m_3$ $w_3 : m_1, m_2, m_3, m_5, m_4$ $w_4 : m_3, m_1, m_4, m_2, m_5$ $w_5 : m_1, m_3, m_1, m_2, m_5$	해=23 $(m_1, w_1) : 1+2=3$ $(m_2, w_3) : 1+2=3$ $(m_3, w_2) : 3+2=5$ $(m_4, w_2) : 2+3=5$ $(m_5, w_4) : 2+5=7$																																																																																																			
<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th><th>w_5</th></tr><tr><th>m_1</th><td>(1,2)</td><td>(3,2)</td><td>(2,1)</td><td>(4,2)</td><td>(5,3)</td></tr><tr><th>m_2</th><td>(2,1)</td><td>(4,1)</td><td>(1,2)</td><td>(5,4)</td><td>(3,4)</td></tr><tr><th>m_3</th><td>(2,3)</td><td>(1,5)</td><td>(5,3)</td><td>(4,1)</td><td>(3,2)</td></tr><tr><th>m_4</th><td>(5,4)</td><td>(2,3)</td><td>(1,5)</td><td>(3,3)</td><td>(4,1)</td></tr><tr><th>m_5</th><td>(5,5)</td><td>(3,4)</td><td>(1,4)</td><td>(2,5)</td><td>(4,5)</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	m_1	(1,2)	(3,2)	(2,1)	(4,2)	(5,3)	m_2	(2,1)	(4,1)	(1,2)	(5,4)	(3,4)	m_3	(2,3)	(1,5)	(5,3)	(4,1)	(3,2)	m_4	(5,4)	(2,3)	(1,5)	(3,3)	(4,1)	m_5	(5,5)	(3,4)	(1,4)	(2,5)	(4,5)	→	<table border="1"><tr><th></th><th>w_1</th><th>w_2</th><th>w_3</th><th>w_4</th><th>w_5</th></tr><tr><th>m_1</th><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><th>m_2</th><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><th>m_3</th><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><th>m_4</th><td>9</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><th>m_5</th><td>10</td><td>7</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr></table>		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	m_1	3	5	3	6	8	m_2	3	5	3	9	7	m_3	5	6	8	5	5	m_4	9	5	6	6	5	m_5	10	7	5	7	9	(d) SM_5																										
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5																																																																																																
m_1	(1,2)	(3,2)	(2,1)	(4,2)	(5,3)																																																																																																
m_2	(2,1)	(4,1)	(1,2)	(5,4)	(3,4)																																																																																																
m_3	(2,3)	(1,5)	(5,3)	(4,1)	(3,2)																																																																																																
m_4	(5,4)	(2,3)	(1,5)	(3,3)	(4,1)																																																																																																
m_5	(5,5)	(3,4)	(1,4)	(2,5)	(4,5)																																																																																																
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5																																																																																																
m_1	3	5	3	6	8																																																																																																
m_2	3	5	3	9	7																																																																																																
m_3	5	6	8	5	5																																																																																																
m_4	9	5	6	6	5																																																																																																
m_5	10	7	5	7	9																																																																																																

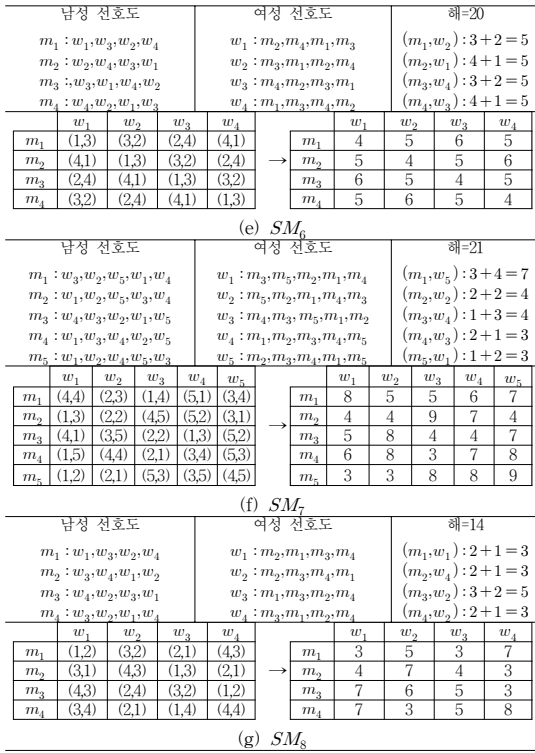


그림 6. 결혼문제 실험 데이터
Fig. 6. Experimental data for marriage problem

7개 결혼문제에 대해 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 그림 7에 제시되어 있다.

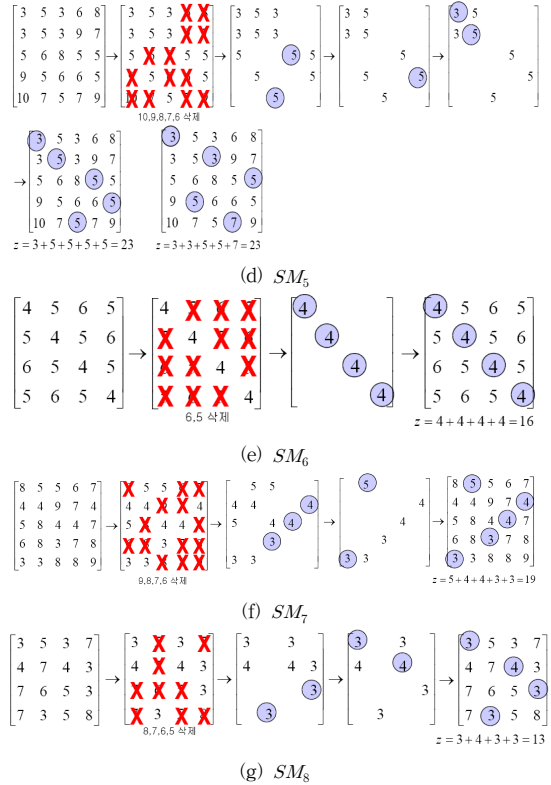
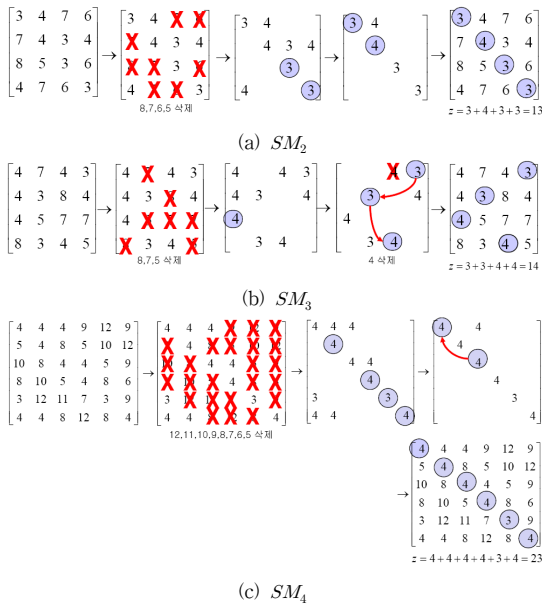


그림 7. 제안 알고리즘 적용 결혼문제의 해
Fig. 7. Solution of proposed algorithm for marriage problems

SM_2 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $(1,1) = 3, (2,3) = 3, (3,3) = 3, (4,4) = 3$ 으로 4개가 존재하나 동일 열에는 하나만이 선택되어야 하므로 독립적으로 생각하면 3개가 된다. 즉, $(1,1) = 3, [(2,3) = 3], (3,3) = 3, (4,4) = 3$ 중 에서 $z = 3+4+3+3 = 13$ 에 $(1,1) = 3, (3,3) = 3, (4,4) = 3$ 모두 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_3 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $(1,4) = 3, (2,2) = 3, (4,2) = 3$ 으로 독립적으로 $(1,4) = 3, [(2,2) = 3, (4,2) = 3]$ 의 2개가 존재하며, $z = 3+3+4+4 = 14$ 에서 $(1,4) = 3, (2,2) = 3$ 가 모두 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_4 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $[(5,1) = 3], (5,5) = 3]$ 의 1개가 존재하며, $z = 4+4+4+4+3+4 = 23$ 에서 $(5,5) = 3$ 이 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_5 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $[(1,1) = 3], (1,3) = 3], [(2,1) = 3, (2,3) = 3]$ 의 2개가 존재하며, $z = 3+3+5+5+7 = 23$ 에서 $(1,1) = 3, (2,3) = 3$ 이 선택되어 해를 개선하는 과정은

생략되고 z 가 확정된다.

SM_6 의 $\min p_{ij} = 4$ 로 $(1,1) = 4, (2,2) = 4, (3,3) = 4, (4,4) = 4$ 의 4개가 존재하며, $z = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$ 에서 모두 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_7 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $(4,3) = 3, [(5,1) = 3, (5,2) = 3]$ 의 2개가 존재하며, $z = 5 + 4 + 4 + 3 + 3 = 19$ 에서 모두 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_8 의 $\min p_{ij} = 3$ 으로 $[(1,1) = 3, (1,3) = 3], [(2,4) = 3, (3,4) = 3], (4,2) = 3$ 의 3개가 존재하며, $z = 3 + 4 + 3 + 3 = 13$ 에서 모두 선택되어 해를 개선하는 과정은 생략되고 z 가 확정된다.

SM_2, SM_3, SM_4 와 SM_5 에 대해서는 Irving^[6,7]과 Iwama^[8]와 동일한 결과를 얻었다. 그러나 SM_6 은 최적해를 20에서 16으로, SM_7 은 21에서 19로, SM_8 은 14에서 13으로 개선시켰다.

결론적으로, 실험 데이터에서는 Step 3의 해 개선 과정이 수행된 사례가 없이 최적 해를 쉽고 빠르게 구할 수 있음을 알 수 있었다.

V. 결 론

본 논문은 최악의 선호도 합 (최대 반감도 합)을 삭제하는 방법으로 결혼 문제의 최적 해를 찾는 알고리즘을 제안하였다. 이를 위해 남성의 여성 선호도와 상대 여성의 남성 선호도 합을 계산한 $n \times n$ 정방행렬 데이터를 활용하였다. 최대 반감도 합 $\max p_{ij}$ 을 삭제하면서 행 또는 열에 1개의 값이 존재하면 이를 선택하고, 선택된 행렬의 값 p_{ij} 의 나머지 행 또는 열의 값을 삭제하는 단순한 방법이다. 제안된 알고리즘을 8개의 데이터에 적용한 결과, SM_4 에 대해서만 해 z 가 행렬의 최소 값 $\min p_{ij}$ 를 선택하지 못해 해를 개선하는 과정을 추가로 수행하였으며, 나머지 7개 데이터는 해 개선 과정을 수행하지 않았다. 제안된 알고리즘은 8개의 문제 중에서 3개 문제는 기존 논문에서 제시한 최적 해를 개선하는 효과도 얻을 수 있었다.

제안된 알고리즘은 쉽고 빠르게 해를 구할 수 있기 때문에 결혼문제의 최적 해를 구하는 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

References

- [1] T. Szabó, "Graph Theory," Institute of Technical Computer Science, Department of Computer Science, ETH, <http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/courses/GT03/Lectures/PDF/>, 2004.
- [2] M. X. Goemans, "18.433 Combinatorial Operation: Lecture Notes on Bipartite Matching," Massachusetts Institute of Technology, <http://math.mit.edu/~goemans/1843307/matching-notes.pdf>, 2007.
- [3] J. T. Eyck, "Algorithm Analysis and Design," <http://www.academic.marist.edu/~jzbv/algorithms/TheStableMarriageProblem.htm>, 2008.
- [4] Wikipedia, "Stable Marriage Problem,," http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem, Wikimedia Foundation Inc., 2014.
- [5] W. Hunt, "The Stable Marriage Problem," Lane Department of Computer Science and Electrical Engineering, West Virginia University, <http://www.csee.wvu.edu/~ksmani/courses/fa01/random/lecturenotes/lecture5.pdf>, 2004.
- [6] R. W. Irving, "Stable Matching Problems with Exchange Restrictions," Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 16, pp. 344-360, 2008.
- [7] R. W. Irving, "The Man-Exchange Stable Marriage Problem," Department of Computing Science, Research Report, TR-2004-177, University of Glasgow, UK., http://www.dcs.gla.ac.uk/~rwi/me_stable.pdf, 2004.
- [8] K. Iwama, "Stable Matching Problems," <http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~iwama/papers/isaac2006-3.ppt>, 2006.
- [9] J. H. Kim, "MAT 2106-02 Discrete Mathematics: Combination Theory within the framework of Marriage Problem," Department of Mathematics, Yousei University, Korea, 2001.

저자 소개

이 상 운(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
 - 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
 - 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
 - 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
 - 2004년 ~ 2007년 2월 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
 - 2007년 3월 ~ 2015년 3월 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
 - 2015년 4월 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- <주관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘>