

# 차륜 모델에 기초한 차량 ABS의 서보 제어기 설계

## Design of a Servo Controller for Antilock Brake Systems Based on the Automotive Tire Model

황이철\*†  
I-Cheol Hwang\*†

(Received 16 March 2015, Revision received 27 April 2015, Accepted 1 May 2015)

**Abstract:** This paper studies on the design of a servo controller for an antilock brake system(ABS) based on the car tire model. First, a nonlinear differential equation of the car tire is constructed and its linearization model is obtained by Taylor's series. Second, a servo controller based on the mathematical model is analytically designed to obtain the maximum brake force, where the tire velocity and the slip ratio of car tire are respectively controlled to the given command values. Third, it is theoretically shown that the proposed control algorithm has good usefulness in ABS.

**Key Words :** Antilock Brake System(ABS), Maximum brake force, Slip ratio, Servo controller, Car tire model

### — 기 호 설 명 —

$J$  : 차량 회전관성 모멘트 [m]  
 $M$  : 차체 질량 [kg]  
 $r$  : 차륜 유효반경 [mm]  
 $V$  : 차체 속도 [m/sec]  
 $c$  : 차륜 점성계수  
 $M$  : 열차체 질량 [kg]  
 $W_0$  : 차륜하중 [kg]  
 $T_b$  : 브레이크 토크 [N-m]  
 $V$  : 차체 속도 [m/sec]  
 $\omega$  : 차륜 각속도 [rad/sec]  
 $\lambda$  : 슬립율

### 1. 서 론

자동차의 ABS(Antilock Brake System)는 제동 시에 차륜의 잠김(lock)을 방지하는 시스템으로서 타이어나 노면과의 슬립현상을 적절히 제어하면서 최대 제동력을 확보함과 동시에 차체의 안정성을 확보하는 데 그 목적을 두고 있다.

일반적으로 차량이 정상적으로 운행하고 있는 경우는 차체의 속도와 차륜의 속도가 동일하지만, 차륜에 제동력이 가해지면 차륜 속도는 차체 속도보다 작아지게 되어 타이어나 지면 간에 슬립(slip)이 발생한다. 이러한 슬립으로 인하여 타이어나 지면 간에는 마찰력이 발생하여 차륜에는 제동력이 걸리게 된다. 그러나 차륜의 갑작스런 잠김 현상은 과도한 슬립을 일으키게 되어 차량의 주행 안정성에 커다란 악영향을 미치게 된다.

\*† 황이철(교신저자) : 동의대학교 메카트로닉스공학과  
E-mail : ichwang@deu.ac.kr, Tel : 051-890-2256

\*† I-Cheol Hwang(corresponding author) : Department of  
Mechatronics Engineering, Dongeui University.  
E-mail : ichwang@deu.ac.kr, Tel : 051-890-2256

일반적으로 슬립 현상은 차체 속도와 차륜 속도와의 비로서 정의되는 슬립율로서 나타내어지며, 일반적으로 최대 제동력은 슬립율이 0.1~0.2 전후에서 발생되며, 슬립율이 증가하여 1이 되면 정지하게 된다<sup>1)</sup>. 반면에 차량 선회 시에 타이어에 작용하는 횡력인 선회력(cornering force)은 제동력과 다르게 슬립율이 0일 때 최대가 되고, 슬립율이 증가할수록 선회력이 감소하는 특성을 가지게 된다. 이와 같은 현상은 어떠한 조건의 도로에서도 동일한 현상을 가지는 것으로 잘 알려져 있다. 따라서 이 논문의 목표는 자동차에 제동력이 가해질 때 적당한 선회력을 가지면서 최대의 제동력이 효과적으로 발생할 수 있도록 슬립율을 효과적으로 제어하는 ABS의 서보 제어기에 대한 새로운 제어 알고리즘 설계를 목표로 하고 있다.

ABS 제어기 설계에 대해서는 국내외적으로 많은 연구가 수행되어오고 있다<sup>2-5)</sup>. 대표적인 연구 결과로서는 토요타 자동차(주), 미쯔비시전기(주) 등의 일본 자동차 또는 부품회사들의 연구를 들 수 있다. 그러나 이들의 제어기는 제어기 설계 이론에 기초한 엄밀한 설계라기보다는 다소 오랫동안의 실험적인 데이터 또는 경험적인 지식에 기초한 설계법으로 잘 알려져 있다. 그래서 이 논문에서는 차륜의 수학적 모델에 기초하여 새로운 ABS의 슬립 또는 차륜 속도에 대한 서보 제어 알고리즘을 이론적으로 제안하고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 차륜의 비선형 모델 및 이를 선형화하는 수학적 모델링을 기술한다. 제 3장에서는 2장에서 주어진 선형모델을 이용하여 차륜속도 서보 제어 알고리즘을 제 4장에서는 슬립율 서보 제어 알고리즘을 각각 이론적으로 도출한다. 끝으로 제 5장에서는 이 논문의 결론과 향후 연구 과제를 간략히 요약한다.

## 2. 차륜 수학적 모델링

### 2.1 차륜 비선형 모델

Fig. 1은 단일 차륜의 개략도로서, 단 차체는

직진하고, 횡방향의 미끄럼은 없으며 그리고 핸들의 각도(steering angle)는 0으로 가정한다. Fig. 1의 차륜에 대한 운동 방정식은 아래와 같이 주어진다.

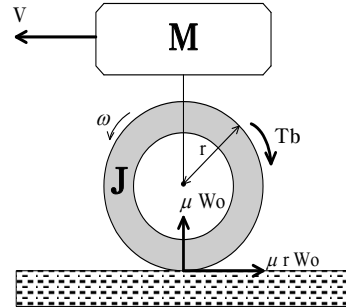


Fig. 1 A schematic diagram of car tire

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mu(\lambda) r W_o - T_b - c\omega \quad (1)$$

$$M \frac{dV}{dt} = -\mu(\lambda) W_o \quad (2)$$

$$\lambda = 1 - \frac{r\omega}{V} \quad (3)$$

위의 식 (1)에서  $c\omega$ 는 베어링이나 차축의 구름 마찰 등으로 인한 차륜 회전속도  $\omega$ 에 선형적으로 비례하는 감쇠력을 나타낸다. 그리고 마찰계수  $\mu$ 는 슬립율  $\lambda$ 의 함수로 주어지는 비선형 함수로서 다양한 불확실성을 포함하는 파라미터이므로 정확한 수학 모델로 표현하는 것은 매우 어렵다.

일반적으로 노면상태를 고려한 차량 슬립율의 최대 마찰계수는 Fig. 2에서와 같이 슬립율  $\lambda = 0.1 \sim 0.2$  사이에서 가지는 것으로 알려져 있다<sup>3)</sup>. 동시에 마찰계수와 동일하게 슬립율( $\lambda$ )도 식 (3)과 같이 차륜의 회전속도( $\omega$ )와 차체의 속도( $V$ )의 비선형 함수임을 알 수 있다. Fig. 2의  $\mu-\lambda$  곡선에서 마찰계수가 최대값을 초과하면 실제 차륜은 잠금상태(lock)가 되어 버리므로 최대 마찰계수에 도달할 때까지를 안정영역과 그 이후를 불안정영역으로 구분한다.

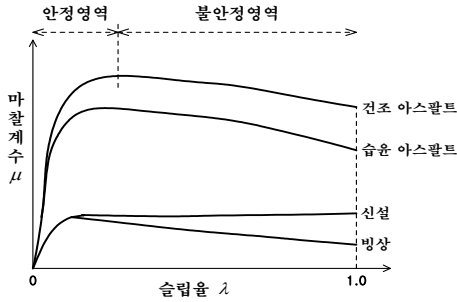


Fig. 2 Relation between a slip ratio and a friction coefficient

### 2.2 차륜의 선형화 모델

이 절에서는 테일러 급수 전개를 통한 선형화법을 이용하여 2.1절의 비선형 모델에 대한 선형화를 간략히 기술한다. 먼저 평형점(아래 첨자 'o'으로 표시) 근방에서의 미소변동을 고려하여 각 변수를 각각  $\omega = \omega_o + \delta\omega$ ,  $V = V_o + \delta V$ ,  $T_b = T_{bo} + \delta T_b$ 로 정의하고,  $\lambda = \lambda_o + \delta\lambda$ ,  $\lambda$ 가  $\omega$ ,  $V$ 의 함수인 것을 고려하여 마찰계수를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \mu_o + \delta\mu(\lambda) \\ &= \mu_o + \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_o \left(-\frac{r}{V_o}\delta\omega + \frac{1-\lambda_o}{V_o}\delta V\right) \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 위의 식 (4)와 식 (1)~(3)의 차륜 비선형 방정식은 동작점 근방의 미소 변위에 대하여 다음 식 (5)와 같은 상태공간방정식으로 선형화 할 수 있다. 여기서 상태변수  $\mathbf{x} = (\delta\omega, \delta V)$ , 입출력 변수는 각각  $\mathbf{u} = \delta T_b$ ,  $\mathbf{y} = \delta\lambda$ 로 정의한다.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}(r^2 + \frac{c}{k}) & \frac{r(1-\lambda_o)}{J} \\ \frac{r}{M} & -\frac{1-\lambda_o}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{V_o} [-r \quad 1-\lambda_o], \quad \text{단, } k = \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)_o \frac{W}{V_o}$$

이때 입출력 간의 전달함수  $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{r}{V_o J} \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6)$$

$$a_1 = k \left\{ \frac{1}{J} \left( r^2 + \frac{c}{k} \right) + \frac{1-\lambda_o}{M} \right\}, \quad a_0 = \frac{kc}{MJ} (1-\lambda_o)$$

위의 식 (6)에서 주어진 전달함수는 2차 시스템이지만, 만약 차륜 비선형 모델식에서 차륜 점성 감쇠력을 고려하지 않는다면, 실제 극, 영점 상쇄가 발생하여 1차 지연 요소를 가지는 시스템이 됨에 주의하자.

선형화 결과에서 특히 주의할 점은 다음과 같다. 일반적으로 평형점에서는 차륜속도가 일정하다고 생각하지만, 실제로는 슬립율이 일정하다고 생각하는 것이 타당하다. 그러나 이 경우 어떤 슬립율에 대해서 차륜속도와 차체속도가 일의적으로 결정되지 않으므로, 위와 같이 선형화 과정에서 상태변수를 차륜속도와 차체속도로 하면 평형점이 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서 이러한 경우에 대해서는 별도의 선형화가 필요하다는 사실에 주의해야 한다. 단, 여기서는 차륜 속도와 차체의 속도가 일정하게 유지되는 동작 상태를 평형점으로 고려하기로 한다.

### 3. 차륜 속도 서보 제어기 설계

이 절에서는 제동력이 가해질 경우 최대 제동력이 발생하도록 하기 위하여 차륜 속도를 제어하기 위한 제어 알고리즘을 도출하기로 한다. 먼저 Fig. 2의  $\mu-\lambda$ 곡선에서 마찰계수가 피크치일 경우의 값을 위 첨자 \*로 즉  $\mu^*$ ,  $\lambda^*$ 로 나타낸다.

만약 식 (3)에서 슬립을  $\lambda$ 가  $\lambda^*$ 의 값을 유지한다면, 식 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M \frac{dV^*}{dt} = -\mu(\lambda^*) W_o \quad (7)$$

따라서 위의 식(7)의 해는 아래와 같으며,

$$V^*(t) = -\frac{\mu(\lambda^*)}{M} W_o t + V(0) \quad (8)$$

이를 식 (3)에 대입하면 차륜 속도는 다음 식 (9)와 같이 주어진다.

$$\omega^*(t) = -\frac{1-\lambda^*}{r} \left\{ \mu(\lambda^*) \frac{W_o}{M} t - V(0) \right\} \quad (9)$$

위의 식 (9)는 마찰계수가 피크치일 경우에 대한 값으로서 차륜과 차체의 속도가 최대 마찰력과 바람직한 슬립율을 유지하기 위한 바람직한 값을 나타내고 있음에 주의하자. 이때 노면의 마찰계수  $\mu(\lambda)$ 가 주어진다고 정할 경우, 식 (1)의 비선형 성분  $\mu(\lambda^*)rW_o$ 을 소거할 수 있는 차륜 속도의 서보 제어입력  $T_b$ 는 아래 식과 같이 주어진다.

$$T_b = \mu(\lambda^*)rW_o - c\omega^* - J \frac{d\omega^*}{dt} \quad (10)$$

따라서 슬립율과 차륜 속도의 목표값이 주어지면, 차륜 속도를 일정하게 하는 제어입력 즉 제동력은 식 (10)과 같이 주어지고, 이때 항상 다음 관계가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\frac{d\omega^*}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

#### 4. 슬립율 서보 제어기 설계

이 장에서는 차륜 모델의 상태변수들 즉 차체 속도  $V$ 와 차륜 속도  $\omega$ 를 독립적으로 간주하여 제어하지 않고, 슬립율  $\lambda$ 를 최대 제동력이 발생하도록 하는 즉 0.1 ~ 0.2의 범위 내로 추종하는 새로운 서보 제어 알고리즘을 제안한다. 여기서는 차체와 차륜 속도는 각각 관측 또는 측정 가능한 것으로 가정한다.

##### 4.1 슬립율 제어기 설계법(I)

제 2장의 슬립율에 관한 식 (3)을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{r}{V^2} \left( V \frac{d\omega}{dt} - \omega \frac{dV}{dt} \right) \quad (11)$$

그리고 식 (1), (2)를 위의 식 (11)에 대입하여 정

리하면,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{r}{JV} \{ \mu(\lambda)rW_o - c\omega - T_b \} + \frac{r\omega}{V} \frac{d}{dt} \log V \quad (12)$$

와 같으며, 여기서 슬립율  $\lambda(t)$ 가 최대 마찰계수가 일 때의 목표 슬립율  $\lambda^*$ 에 수렴하도록 즉 다음 식을 만족하는 0이 아닌 양의 상수  $\alpha$ 가 존재한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \alpha(\lambda - \lambda^*), \quad \alpha > 0 \\ \lambda(t) &= \lambda^* - e^{-\alpha t} \{ \lambda(t) - \lambda(0) \} \end{aligned} \quad (13)$$

이때 식 (12)와 (13)을 동시에 만족하도록 하는 즉 슬립율이 목표값에 추종하도록 하는 제어입력  $T_b$ 는 다음 식과 같이 주어지게 된다.

$$T_b = \bar{\mu}(\lambda)rW_o - c\omega - J\omega \frac{d}{dt} \log V + \frac{JV}{r} \alpha (\lambda^* - \lambda) \quad (14)$$

위의 식에서  $\bar{\mu}(\lambda)$ 는  $\lambda^*$ 에서의 공칭값을 나타낸다. 실제 이 값을 식 (1)에 대입하여 슬립율에 대해 정리하면 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{V} \{ \bar{\mu}(\lambda) - \mu(\lambda) \} \frac{r^2 W_o}{J} + \alpha (\lambda^* - \lambda) \quad (15)$$

따라서 위의 식 (15)로부터 슬립율은 실제 마찰계수와 공칭 마찰계수와의 차, 그리고 실제 슬립율과 공칭 슬립율과의 차에 매우 민감함을 알 수 있다. 그리고 식 (14)의 제어입력은 최종적으로 슬립율의 변화율을 0으로 즉 최대 마찰력을 가지는 슬립율의 목표값에 추종가능하게 함을 알 수 있다.

##### 4.2 슬립율 제어기 설계법(II)

이 절에서는 새로운 슬립율 서보 제어기 설계 알고리즘을 제안하기로 한다.

먼저 Fig. 2의  $\mu - \lambda$  곡선에서  $\lambda$ 를 목표치인  $\lambda^*$ 를 조금 초과하도록 증가시킨 후, 피크 마찰계수의 위치를 알 수 있는 정보를 획득한다. 이를 위하여 Fig. 2의  $\mu - \lambda$  곡선을 Fig. 3과 같이 수정하

기로 한다. 그리고 위의 Fig. 3에서 실제 노면의 곡선은 (i) 반드시 피크가 되는 부분을 가지고, (ii) 그것은 그림에서 점선

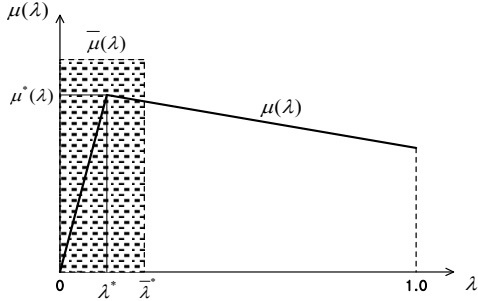


Fig. 3  $\bar{\mu}-\lambda$  curve

부분 내에 존재하는 것으로 간주한다.

이때 가정 (i) 하에서 (ii)를 만족하는  $\bar{\mu}(\lambda)$ 를 설정하는 문제를 고려한다. 제동력  $T_b$ 는 Fig. 3과 4.1절에서 구한 식 (14)를 이용하면 다음 식과 같이 주어진다.

$$T_b = \bar{\mu}(\lambda)rW_o - c\omega - J\omega \frac{d}{dt} \log V + \frac{JV}{r} \alpha (\bar{\lambda}^* - \lambda) \quad (16)$$

이것을 입력으로 하여 얻은  $d\lambda/dt$ 의 식 (15)는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{V} \{ \bar{\mu}(\lambda) - \mu(\lambda) \} \frac{r^2 W_o}{J} + \alpha (\bar{\lambda}^* - \lambda) \quad (17)$$

Fig. 3에서 알 수 있는 바와 같이 위의 식 (17)은  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}^*$ 로 될 때까지는 양의 값이 되고  $\bar{\lambda}^*$ 를 초과하면 음이 되어, 결과적으로 슬립율  $\lambda$ 는  $\bar{\lambda}^*$ 에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

그런데 슬립율  $\lambda$ 가  $\bar{\lambda}^*$ 에 도달하기 도중에 마찰계수의 피크값을 초과하게 되면, 식 (2)의  $dV(t)/dt$ 에도  $\mu(\lambda)$ 의 피크값의 영향을 받게 된다. 이때의 시간을  $t=t_0$ 라고 하면,  $\omega(t_0)$ ,  $V(t_0)$ ,  $dV(t_0)/dt$ 로부터 실제 노면의 슬립율과 마찰계수의 피크값은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda^* = 1 - \frac{r\omega(t_0)}{V(t_0)}, \quad \mu^*(t) = -\frac{M}{W_o} \frac{dV}{dt}(t_0) \quad (18)$$

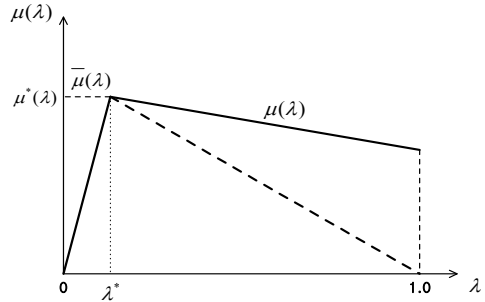


Fig. 4 Revised  $\bar{\mu}-\lambda$  curve(1)

여기서  $\bar{\lambda}^*$ 를  $\lambda^*$ 로 변환해서  $\mu-\lambda$ 곡선을 Fig. 4와 같이 변환해서 생각하면 된다. 즉,  $\bar{\mu}(\lambda)$ 는  $\lambda \leq \lambda^*$ 에서는  $\mu^*(\lambda)$ 로,  $\lambda > \lambda^*$ 에서는  $\{ \bar{\mu}(\lambda) - \mu(\lambda) \} > 0$ 을 만족하도록 설정하면 된다. 그리고 앞에서 언급하였듯이  $\lambda \leq \lambda^*$ 일 경우는 식 (17)이 양이 되고,  $\lambda > \lambda^*$ 일 경우는 음이 된다는 것을 알 수 있다.

만약  $\bar{\mu}-\lambda$  곡선을 Fig. 5와 같이 재설정할 경우는  $\lambda$ 가  $\lambda^*$ 를 초과하여 다시  $\lambda^*$ 에 복귀할 때까지는 식(16)의 제동토크  $T_b$ 의 첫 번째 항은 0이 되고,  $\lambda^*$ 에 복귀하면 급격히 큰 값으로 증가하여 제동토크  $T_b$ 가 채터링하게 되는 현상이 초래한다.

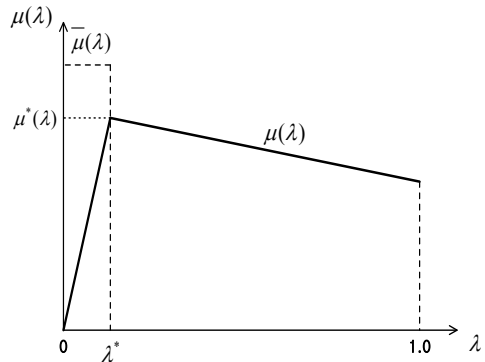


Fig. 5 Revised  $\bar{\mu}-\lambda$  curve(2)

따라서 슬립율이  $\lambda^*$ 를 초과하는 즉시 다음의 값, 즉  $(\bar{\mu}(\lambda) - \mu(\lambda))$ 가 지나치게 크지 않도록  $\bar{\mu}(\lambda)$  곡선을 조정하면 된다.

지금까지 설명한 방법은  $\alpha=0$  즉 식(17)의 두 번째 항을 고려하지 않아도 동일한 결과를 얻을 수 있다. 이러한 경우는  $\lambda$ 가  $\lambda^*$ 로 수렴해가는 동안에 공칭값  $\bar{\mu}(\lambda)$ 와 실제의  $\mu(\lambda)$ 와의 차이만을 이용하여 실현할 수 있다.

참고로 위에서 설명한 제어기의 안정성에 대하여 간략히 고찰하기로 한다. 왜냐하면 차륜 모델의 제어대상에는 마찰계수  $\mu(\lambda)$ 라는 매우 불확실한 요소가 포함되어 있기 때문에 안정성을 확보하는 것이 무엇보다 중요하다. 만약 식 (17)에서 마찰계수  $\mu(\lambda)$ 를 이미 알고 있는 값으로 한다면, 그것을  $\bar{\mu}(\lambda)$ 로 설정하면 식 (17)으로부터 슬립율  $\lambda$ 는  $t \rightarrow \infty$ 에서  $\lambda^*$ 로 수렴하게 됨을 알 수 있다. 만약  $\alpha$ 를 크게 하면 식 (17)의 첫 번째항에 대한 영향이 작아지고 결과적으로 슬립율은 거의 식 (13)을 만족하게 되는 것과 같아 항상 슬립율이 안정하게 제어됨을 알 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 자동차의 차륜 수학기모델에 기초하여 ABS의 슬립율 서보 제어 알고리즘을 이론적으로 설계하는 방법을 제안하였다. 먼저 자동차의 차륜 비선형 모델을 선형화하여 제어기 설계용 상태공간방정식을 도출하였다. 그리고 최대

제동력을 발생시킬 수 있도록 차륜 속도와 슬립율에 대한 서보 제어를 각각 해석적으로 도출하여 이에 대한 안정성을 간략히 고찰하였다. 향후 이 논문에서 제안된 설계법에 대한 모의 또는 실험적 검증에 대한 연구가 필요할 것으로 사료된다.

## 후 기

이 논문은 2013학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(과제번호 2013AA134).

## References

1. "Introduction of Modeling for ABS", Mitsubishi Electric Co. System Laboratory.
2. Sugitani, "Control of Antilock Brake System", Technical Report, Toyota Automotive Co.(Japan).
3. Sano and Yamada, 1992, "The Present State and Development of ABS", Automotive Technology (Japan), Vol. 46, No. 2.
4. T. Tabe et. al, 1985, "Automotive Antiskid System Using Modern Control Theory", Nippondenso Co, IEEE IECON'85, pp. 390-395.
5. R. McLellan et. al, 1992, "Increasing the Safe Driving Envelope-ABS", Transaction Control and Beyond, 92C014, pp. 103-124.