# 시간 전진법을 이용한 난류 경계층 유동의 해석

공 효 준, 이 승 수*
인하대학교 항공우주공학과

# ANALYSIS OF TURBULENT BOUNDARY LAYER FLOWS USING A TIME MARCHING METHOD

H. Gong and S. Lee*
Dept. of Aerospace Engineering, Inha Univ.

*A 3-dimensional compressible turbulent boundary layer solver has been developed. A time marching method is used to integrate the turbulent boundary layer equations. While the direct integration of the boundary layer equations is performed for unseparated flow regions, the inverse integration is performed for separated flow regions. The program is verified for flows that have analytical solutions or other numerical results. The solver will be merged with an Euler solver for viscous-inviscid interaction.*

**Key Words :** 경계층 유동(Boundary Layer Flows), 시간 전진법(Time Marching Method), 평판 유동(Flat Plate Flows), 이차유동(Secondary Flows)

## 1. 서 론

경계층 이론은 Ludwig Prandtl이 유동을 점성의 영향이 지배적인 영역인 경계층과 점성의 영향이 적은 외부영역으로 구분한 것에서부터 출발한다. 이와 같이 정의된 경계층 영역에서는 Navier-Stokes 방정식을 경계층 방정식으로 간략화할 수 있다[1]. 경계층 이론을 통해 처음으로 실제적인 점성 유동 해석이 가능하게 되었다. 최근에는 전산유체역학의 발전으로 Navier-Stokes 방정식을 이용해 유동장 전체의 직접적인 해석이 주로 이루어지고 있다. 그러나 Navier-Stokes 방정식을 통한 해석에는 경계층 방정식의 해석에 비해 상대적으로 많은 시간과 노력이 필요하다. 경계층 이론을 이용한 유동해석은 Navier-Stokes 방정식을 통한 점성 해석에 비해 빠른 시간에 해석이 가능하다.

경계층 이론을 이용한 해석 방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. Von Karman에 의해 제안된 momentum integral 방정식을 해석하는 방법[2]과 경계층 방정식에 수치기법을 적용하여 직접 적분하는 방법이다. 경계층 방정식을 벽면에 수직한 방향으로 적분하여 얻은 Momentum integral 방정식은 상미분 방정식으로 수치적분이 매우 용이하다. 그러나 적분이 이루어지는 경계층 내부의 유동 정보가 소실되며 해석을 위해 경계층 내부 속도분포의 가정이 필요하다. 경계층 방정식을 직접 적분하는 방법은 그 적분방법에 따라 공간 전진법(space marching method)과 시간 전진법(time marching method)으로 나눌 수 있다. 공간 전진법을 이용한 연구는 Smith and Clutter[3], Keller and Cebecci[4], Cebecci et al.[5]의 연구를 들 수 있다. 이 방법은 경계층방정식이 유동방향으로 포물형 편미분 방정식이라는 특성에 기초한다. 시간 전진법을 이용한 연구는 Van Dalsam and Steger[6]의 연구가 있다.

경계층 방정식은 경계층 내부에 박리가 존재하여도 경계층이 매우 두껍지 않은 유동일 경우 적용이 가능하다. 그러나 경계층 방정식은 박리점에서 saddle point 특이점이 존재하여 순차적인 적분 과정에서 수치적 불안정성이 발생하게 된다. 경계층 방정식의 순차적분에서는 경계층 외부의 압력구배와 속도분포를 이용하여 방정식을 적분한다. 하지만 saddle point 특이점에 의한 수치적 불안정성이 나타나는 부분에서는 역적분을 이용하여 벽면의 표면마찰계수 또는 wake 중앙 속도분포를 이용하여 경계층 방정식을 적분하는 방법으로 수치적 불안정성을 해결할 수 있다[7].

본 연구에서는 Van Dalsam and Steger[6]가 제안한 직접 적분법의 시간 전진법을 이용하여 3차원 압축성 경계층 방정식

Received: December 8, 2014, Revised: January 13, 2015, Accepted: January 13, 2015.
* Corresponding author, E-mail: slee@inha.ac.kr
DOI http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2015.20.1.032
ⓒ KSCFE 2015

의 정상해를 얻는 프로그램을 개발하였다. 이를 해석해 혹은 선행 연구자의 수치해가 존재하는 경우의 경계층 유동을 이용하여 검증하였다. 검증된 경계층 해석 프로그램을 비점성 해석 프로그램과 결합하여 점성-비점성 결합 해석 프로그램을 개발할 예정이다.

## 2. 수치기법

### 2.1 3차원 경계층 방정식

3차원 압축성 난류 경계층 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\\&=-\frac{\partial p_e}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho wu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho wv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho ww)}{\partial z}\\&=-\frac{\partial p_e}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\mu+\mu_t)\frac{\partial w}{\partial y}\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho H)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uH)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vH)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho wH)}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\frac{\partial H}{\partial y}\right\}\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}\mu+\frac{\mathrm{Pr}_t-1}{\mathrm{Pr}_t}\mu_t\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+w^2}{2}\right)\right\}+\frac{\partial p}{\partial t}\end{aligned} \tag{4}$$

이때 엔탈피는 $H=C_PT+(u^2+w^2)/2$ 이고, $x$방향은 물체 표면을 따라 정의되며, $y$방향은 물체 표면에 수직한 방향, $z$방향은 $x$축과 $y$축에 각각 수직한 방향을 의미한다. 난류 유동을 모사하기 위해 Baldwin과 Lomax의 대수 난류 모델[8]을 사용하였다. 상태방정식으로는 이상기체의 것을 사용하였다.

구성된 경계층 방정식을 computational domain의 $\xi$, $\eta$, $\zeta$로 전환하고 각 방향으로 2차의 공간 정확도를 갖도록 이산화를 수행했다. 유동의 방향성이 나타나는 $\xi$방향과 $\zeta$방향으로 풍상차분, 물체 표면에 수직한 $\eta$방향으로 중앙차분을 적용하였다. 이때 격자 경계에서도 모든 방향으로 2차의 공간 정확도를 유지할 수 있도록 하였다. $U$, $V$, $W$를 식 (5)와 같이 정의하여 $U$와 $W$에 따라 $\xi$, $\zeta$방향의 유동 방향을 판별하였다.

$$\begin{bmatrix}U\\V\\W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_x u+\xi_z w\\ \eta_x u+\eta_y v+\eta_z w\\ \zeta_x u+\zeta_z w\end{bmatrix} \tag{5}$$

차분이 적용된 경계층 방정식을 정리하기 위해 다음과 같은 차분 연산자를 적용하였다.

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{\delta}_\xi u=&\left(\frac{U+|U|}{2}\right)\left(\frac{3u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{2\Delta\xi}\right)\\&+\left(\frac{U-|U|}{2}\right)\left(\frac{-3u_i+4u_{i+1}-u_{i+2}}{2\Delta\xi}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\delta_\xi u=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta\xi} \tag{7}$$

$$\overline{\delta}_\xi u=\frac{u_{i+1/2}-u_{i-1/2}}{\Delta\xi} \tag{8}$$

$$\nabla_\xi u=\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta\xi} \tag{9}$$

이와 같은 차분 연산자가 적용된 경계층 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\rho_t+(\rho u)_\xi\xi_x+(\rho u)_\eta\eta_x+(\rho u)_\zeta\zeta_x+(\rho v)_\eta\eta_y\\&+(\rho w)_\zeta\zeta_x+(\rho w)_\zeta\zeta_z=0\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\rho\nabla_t u^{n+1}+\rho\left(\hat{U}\hat{\delta}_\xi u^{n+1}+V\delta_\eta u^{n+1}+\hat{W}\hat{\delta}_\zeta u^{n+1}\right)\\&=-\left(\xi_x\delta_\xi p_\xi+\zeta_x\delta_\zeta p_\zeta\right)+\eta_y\overline{\delta}_\eta\left\{(\mu+\mu_t)\eta_y\overline{\delta}_\eta u^{n+1}\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\rho\nabla_t w^{n+1}+\rho\left(\hat{U}\hat{\delta}_\xi w^{n+1}+V\delta_\eta w^{n+1}+\hat{W}\hat{\delta}_\zeta w^{n+1}\right)\\&=-\left(\xi_z\delta_\xi p_\xi+\zeta_z\delta_\zeta p_\zeta\right)+\eta_y\overline{\delta}_\eta\left\{(\mu+\mu_t)\eta_y\overline{\delta}_\eta w^{n+1}\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\rho\nabla_t H^{n+1}+\rho\left(\hat{U}\hat{\delta}_\xi H^{n+1}+V\delta_\eta H^{n+1}+\hat{W}\hat{\delta}_\zeta H^{n+1}\right)\\&=\overline{\delta}\left[\left\{\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\overline{\delta}H_\eta+\left(\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}\mu+\frac{\mathrm{Pr}_t-1}{\mathrm{Pr}_t}\mu_t\right)\overline{\delta}\left(\frac{u^2+w^2}{2}\right)_\eta\right\}\eta_y\right]_\eta\eta_y\\&+\nabla_t p^{n+1}\end{aligned} \tag{13}$$

식 (10)-(13)에 정리된 경계층 방정식은 약한 결합에 의해 연결된 방정식이므로 순차적으로 각각의 방정식을 해석하여 해를 얻는 것이 가능하다.

### 2.2 경계층 방정식의 역적분

경계층 방정식의 특성상 발생되는 박리 영역에서 수치적 불

안정성을 피하기 위해 역적분을 적용하였다. 일반적인 순차적분을 통해 경계층 방정식을 해석할 경우 경계층 외부의 압력을 적용하여 해석을 수행한다. 하지만 역적분일 경우 경계층 외부의 압력 대신 경계층 표면 마찰 계수와 wake 중앙 속도 분포를 사용한다. 이는 경계층 방정식에 물체 표면과 wake 중심의 경계조건을 적용하여 얻는다. 물체 표면일 경우 식 (14)-(15)로 정리되며 wake 영역일 경우 식 (16)-(17)로 표현된다.

$$p_\xi \xi_x + p_\zeta \zeta_x = \left(\mu u_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y \tag{14}$$

$$p_\xi \xi_z + p_\zeta \zeta_z = \left(\mu w_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y \tag{15}$$

$$p_\xi \xi_x + p_\zeta \zeta_x = \left(\mu u_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y - \left(\rho \hat{U} \hat{\delta}_\xi u + \rho \hat{W} \hat{\delta}_\zeta u\right)_{wake} \tag{16}$$

$$p_\xi \xi_z + p_\zeta \zeta_z = \left(\mu w_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y - \left(\rho \hat{U} \hat{\delta}_\xi w + \rho \hat{W} \hat{\delta}_\zeta w\right)_{wake} \tag{17}$$

이때 $\left(\mu u_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y$와 $\left(\mu w_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y$는 다음과 같다.

$$\left(\mu u_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y = \left(\mu_1 + \mu_2\right)\left(\frac{u_2 - u_1}{\left(y_2 - y_1\right)^2}\right) - \frac{2\tau_w}{y_2 - y_1} \tag{18}$$

$$\left(\mu w_\eta \eta_y\right)_\eta \eta_y = \left(\mu_1 + \mu_2\right)\left(\frac{w_2 - w_1}{\left(y_2 - y_1\right)^2}\right) - \frac{2\tau_w}{y_2 - y_1} \tag{19}$$

### 2.3 경계층 방정식의 시간적분

앞서 정리된 경계층 방정식을 $\eta$방향의 변수에 대해 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$A^X X_{j-1}^{n+1} + B^X X_j^{n+1} + C^X X_{j+1}^{n+1} = D^X \tag{20}$$

이때 $j$는 표면 격자점과 외곽 격자점을 제외한 동일한 $\xi$, $\zeta$의 $\eta$방향 모든 지점에 해당하며, $X$는 모멘텀, 에너지 방정식의 변수인 $u$, $w$, $H$를 의미한다. 식 (20)을 $x$방향 모멘텀 방정식에 대해 정리하면 아래와 같다.

$$A^u u_{j-1}^{n+1} + B^u u_j^{n+1} + C^u u_{j+1}^{n+1} = D^u \tag{21}$$

이때 $A^u$, $B^u$, $C^u$, $D^u$는 다음과 같다.

$$A^u = -\frac{\rho V}{2\Delta\eta} - \frac{\eta_y}{\Delta\eta^2}\left(\mu\eta_y\right)_{j-1/2} \tag{22}$$

$$B^u = \rho\left\{\frac{1}{\Delta t} + \frac{3}{2}\left(\frac{|U|}{\Delta\xi} + \frac{|W|}{\Delta\zeta}\right)\right\} + \frac{\eta_y}{\Delta\eta^2}\left\{\left(\mu\eta_y\right)_{j+1/2} + \left(\mu\eta_y\right)_{j-1/2}\right\} \tag{23}$$

$$C^u = \frac{\rho V}{2\Delta\eta} - \frac{\eta_y}{\Delta\eta^2}\left(\mu\eta_y\right)_{j+1/2} \tag{24}$$

$$D^u = E^u - \xi_x \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta\xi} - \zeta_x \frac{p_{k+1} - p_{k-1}}{2\Delta\zeta} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} E^u = {} & \frac{\rho u}{\Delta t} + \frac{\rho}{\Delta\xi}\left(\frac{U + |U|}{4}\right)\left(4u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}\right) \\ & - \frac{\rho}{\Delta\xi}\left(\frac{U - |U|}{4}\right)\left(4u_{i+1} - u_{i+2}\right) \\ & + \frac{\rho}{\Delta\xi}\left(\frac{U + |U|}{4}\right)\left(4u_{k-1}^{n+1} - u_{k-2}^{n+1}\right) \\ & - \frac{\rho}{\Delta\xi}\left(\frac{U - |U|}{4}\right)\left(4u_{k+1} - u_{k+2}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

또한 역적분을 적용하여 압력항을 물체 표면 마찰 계수나 wake 중앙 속도 분포로 변환하여 표현할 경우 식 (20)은 다음과 같이 변한다.

$$F^X X_2^{n+1} + A^X X_{j-1}^{n+1} + B^X X_j^{n+1} + C^X X_{j-1}^{n+1} = D'^X \tag{27}$$

이를 식 (21)-(26)과 같이 물체 표면에서의 $x$방향 모멘텀 방정식에 대해 정리하면 위와 동일한 $A^u$, $B^u$, $C^u$와 함께 $F^u$와 $D'^u$는 아래와 같다.

$$F^u = \frac{\mu_2 + \mu_1}{\left(y_2 - y_1\right)^2} \tag{28}$$

$$D'^u = E^u + \frac{2\tau_w}{y_2 - y_1} \tag{29}$$

따라서 식 (20)과 식 (27)을 $\eta$방향 전체에 대해 살펴보면 tri-diagonal 행렬의 형태, 혹은 1개의 열이 추가된 tri-diagonal 행렬의 형태로 표현할 수 있다. 이러한 행렬을 해석하여 $u$, $w$, $H$를 얻을 수 있다.

해석된 $u$, $w$, $H$와 상태방정식을 이용하여 $\rho$를 계산할 수 있다. 연속방정식은 식 (30)과 같이 나타낼 수 있고 이를 통해 $v$를 물체 표면에서 수직 방향으로 전진시키며 계산할 수 있다.

$$\frac{(\rho v)-(\rho v)_{j-1}}{\Delta\eta}=-\frac{E_j+E_{j-1}}{2(\eta_y)_{j-1/2}} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}E_j=&\xi_x\frac{(\rho u)_{i+1}-(\rho u)_{i-1}}{2\Delta\xi}+\eta_x\frac{(\rho u)_{j+1}-(\rho u)_{j-1}}{2\Delta\eta}\\&+\zeta_x\frac{(\rho u)_{k+1}-(\rho u)_{k-1}}{2\Delta\zeta}+\xi_z\frac{(\rho w)_{i+1}-(\rho w)_{i-1}}{2\Delta\xi}\\&+\eta_z\frac{(\rho w)_{j+1}-(\rho w)_{j-1}}{2\Delta\eta}+\zeta_z\frac{(\rho w)_{k+1}-(\rho w)_{k-1}}{2\Delta\zeta}\\&+\frac{\rho^{n+1}-\rho}{\Delta t}\end{aligned}$$

$\xi$방향과 $\zeta$방향으로 유동의 방향성이 존재하므로 이를 고려하기 위해 전진방향과 후진방향으로 번갈아 해석을 수행한다.

### 2.4 난류 모델

경계층 방정식에 적용된 eddy viscosity를 통해 난류 유동의 모사가 가능하다. Eddy viscosity를 계산하기 위하여 Baldwin-Lomax의 모델을 적용하였다. 이는 대수 방정식을 이용한 난류 모델로 다음의 식을 따른다.

$$\mu_t=\begin{cases}\mu_{t_{inner}} & if \quad y\leqq y_{crossover}\\ \mu_{t_{outer}} & if \quad y\geqq y_{crossover}\end{cases} \tag{31}$$

$$\mu_{t_{inner}}=\rho l^2\left|\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}\right| \tag{32}$$

$$\mu_{t_{outer}}=\rho KC_{CP}F_{wake}F_{KLEB}(y) \tag{33}$$

## 3. 해석 결과

### 3.1 2차원 경계층 해석

#### 3.1.1 2차원 평판 층류 유동

2차원 평판 위의 경계층 유동은 Blasius 유동과 Falkner-Skan 유동이 대표적이며 이는 해석해를 갖는다. 평판 위 압력 구배가 없는 경우 Blasius 유동, 압력 구배가 있는 경우 Falkner-Skan 유동이라 한다. 이 경우 경계층 외곽의 속도 분포와 압력 분포는 다음과 같다.

$$U=U_\infty x^m \tag{34}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho U\frac{dU}{dx} \tag{35}$$

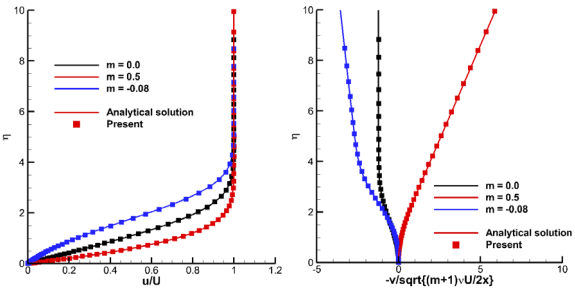



Fig. 1 Velocity profile with various values of $m$

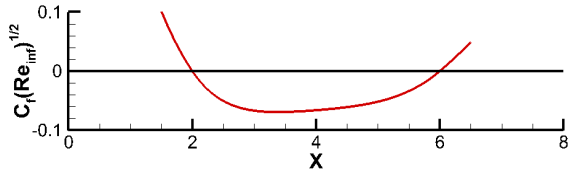



Fig. 2 Wall shear stress for Klineberg's problem[9]

이때 $m$이 양의 값일 경우 순압력구배, $m$이 음의 값일 경우 역압력구배가 존재하게 되며 $m$이 0일 경우 Blasius 유동이 된다. 그러나 $m>-0.09$에서는 유동의 박리는 발생하지 않는다. 본 연구에서는 $m=0,\ 0.5,\ -0.08$의 경우에 대해 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 유동 조건은 다음과 같다.

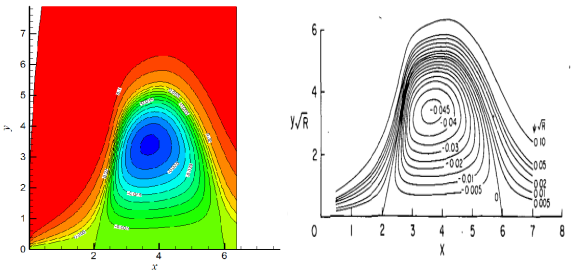
$$M=0.005,\ Re=116{,}500 \tag{36}$$

위의 해석 조건에 따라 개발된 경계층 해석 프로그램을 통해 예측된 결과와 상사 변수를 이용해 얻은 해석해를 Fig. 1에 같이 도시하였다. $x$방향과 $y$방향의 속도 분포를 $m$에 따라 각각 도시하였다. Fig. 1에서 볼 수 있듯이 모든 압력구배에 경계층 해석 프로그램의 결과가 해석해와 일치함을 알 수 있다.

#### 3.1.2 2차원 평판 박리 유동

2차원 층류 유동과 달리 박리 유동의 경우 박리 영역에서 역적분을 이용한 해석이 요구된다. 2차원 평판 위의 박리 유동은 Klineberg에 의해 해석된 수치해[9]가 존재한다. 이를 참조하여 2차원 평판 박리 유동을 해석하였다. 평판 위 표면 마찰 계수는 Fig. 2와 같이 Klineberg가 제시한 분포를 사용하였다. 해석에 사용된 유동 조건은 평판 층류 유동에 사용된 조건을 그대로 사용하였다.

경계층 해석 프로그램을 통해 해석된 평판 박리 유동을 Klineberg의 결과와 함께 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3를 통해



(a) Present result (b) Klineberg's result[9]

Fig. 3 Comparison of velocity distributions for Klineberg's problem

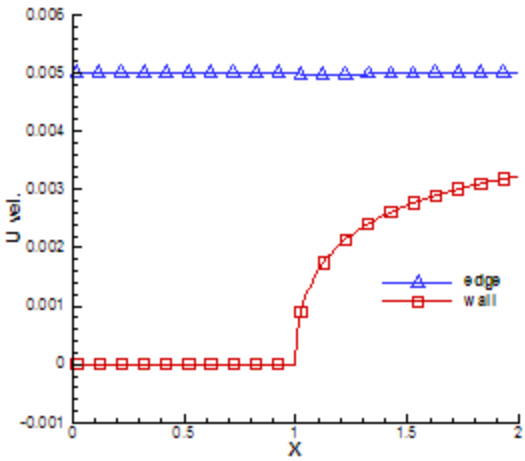



Fig. 4 Velocity distributions along wall, wake center and boundary layer edge

두 해석 결과가 동일함을 확인할 수 있다.

### 3.1.3 2차원 평판 후류 유동

2차원 평판 박리 유동과 같이 후류 유동에서도 역적분을 통한 해석이 필요하다. 따라서 wake 중앙 속도 분포가 요구되는데 이는 본 연구진이 보유한 RANS 해석 프로그램[10,11]을 이용하여 해석한 결과에서 추출하였다. $x \leq 1$ 구간에서 벽면이 존재하고 이후 후류가 존재하는 유동에 대해 해석을 수행하였다. 수행된 해석 조건은 이전 문제와 동일한 조건을 사용하였다. Fig. 4를 보면 아래에 벽면과 wake 중앙 속도 분포를 표시하고, 위에 경계층 외곽의 속도 분포를 도시하였다. 이때 후류 영역에서의 경계층 외곽 속도 분포는 역적분에 의한 해석 결과로 순차적분이 이루어지는 벽면에서 자유류에 의해 정의되는 경계층 외곽 속도 분포와 일치됨을 알 수 있다. 이를 통해 올바른 후류 유동이 형성되었음을 확인할 수 있다. Fig. 5에서 경계층 해석 프로그램의 결과와 Schlichiting

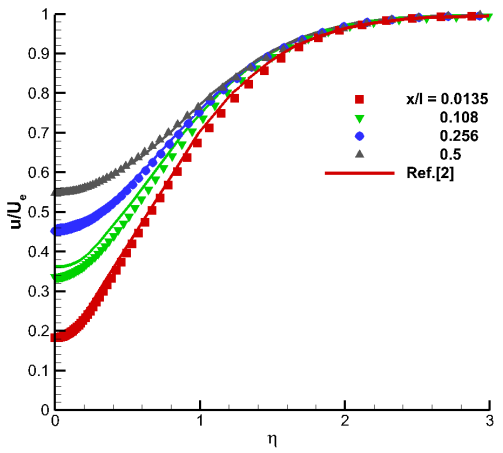



Fig. 5 Comparison of velocity profiles with Schlichiting's

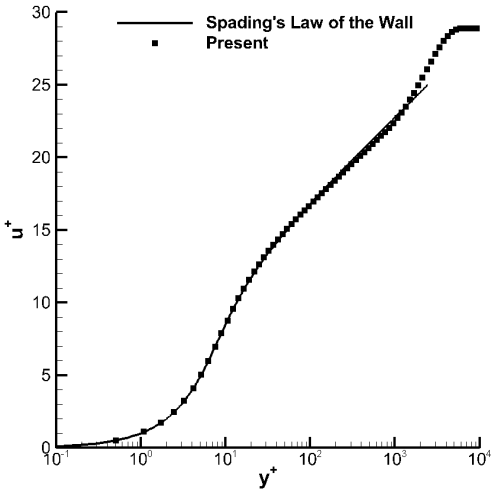



Fig. 6 Velocity profile inside turbulent boundary layer

의 평판 후류 유동에 대한 해석해를 비교하였다. 각 지점에서의 속도 분포가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

### 3.1.4 2차원 평판 난류 유동

2차원 평판 난류 유동을 해석하기 위해 대수적 난류 모델인 Baldwin-Lomax 모델을 적용하였다. 난류 유동의 해석 조건은 다음과 같다.

$$M = 0.03\ ,\quad Re = 1.0 \times 10^7 \tag{37}$$

Fig. 6에 경계층 내부의 속도를 Spalding의 law of the wall[12]과 비교하였다. 경계층 해석 프로그램의 결과가

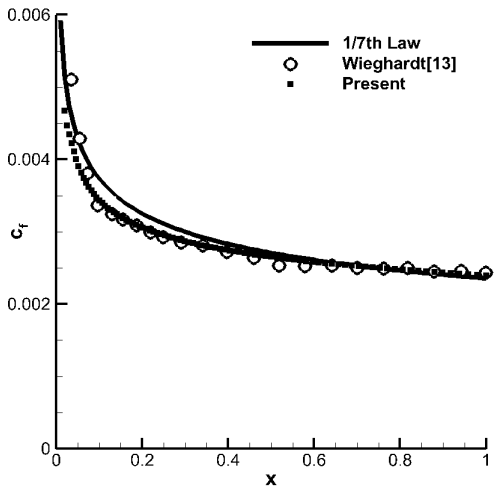



Fig. 7 Skin friction distributions along wall

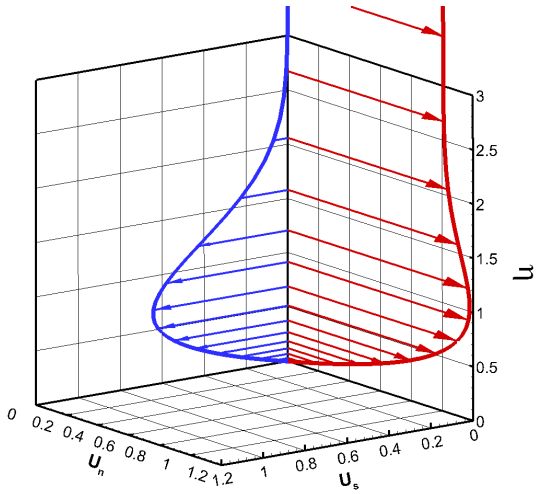



Fig. 8 Tangential and normal velocity profiles

Spalding의 law of the wall과 일치되는 것을 볼 수 있으며, 난류 유동에 대한 개발된 경계층 해석 프로그램의 정확도를 확인할 수 있다.

Fig. 7에서는 평판 위 마찰 계수 분포를 Wieghardt and Tillman[13]의 실험 결과와 경험식을 이용한 결과를 개발된 해석 프로그램을 이용한 결과와 비교하였다. $1/7^{th}$ power law의 결과는 실험에 의해 보정된 경험식의 결과[2]를 사용하였다. 개발된 해석 프로그램을 이용해 비교에 사용한 두 결과와 유사한 값을 얻을 수 있음을 Fig. 7에서 알 수 있다.

### 3.2 3차원 평판 이차유동

3차원 평판에 아래의 식 (38)과 같은 외부 유동이 존재하면 경계층 내부에는 이차유동이 발생한다[14].

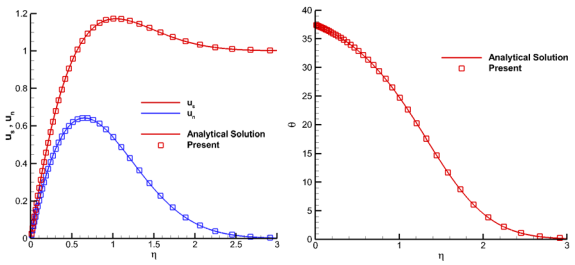
$$U = Const.,\ W = U(a - bx) \tag{38}$$

여기에서는 $a = 1,\ b = 2$일 경우에 대하여 해석을 수행하였다. 이때의 속도 분포에 해당하는 경계층 외부의 압력 구배는 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial z} = 2U^2 \tag{39}$$

계산에 사용된 유동 조건은 3.1.1의 것을 이용하였다. 또한 $z$방향으로 무한한 평판을 모사하기 위해 periodic 경계 조건을 적용하였다.

개발된 경계층 해석 프로그램을 통해 해석된 결과를 Fig. 8과 Fig. 9에 도시하였다. Fig. 8을 보면 자유류와 평행한 방향과 자유류에 수직한 방향의 속도 분포를 보여준다. 물체 표면 근처에서 자유류에 수직한 방향의 속도가 발생되며 이는 경계층 외곽으로 가면서 소멸되는 것을 알 수 있다. Fig. 8에 도시한 결과를 이차유동의 해석해와 비교한 결과를 Fig. 9에 나타내었다. 해석해의 결과와 개발된 프로그램의 결과가 일치하는 것으로 보아 개발 프로그램의 정확도를 확인할 수 있다.




(a) Velocity profile (b) Flow angle with freestream

Fig. 9 Comparisons of velocity profiles with analytic solution

## 4. 결 론

경계층 방정식을 직접 적분하는 경계층 해석 프로그램을 개발하고 해석해와 수치해를 갖는 경계층 유동에 대해 해석, 비교하였다. 2차원 평판의 층류, 난류, 박리 유동과 같은 2차원 경계층 유동이 잘 예측되는 것을 확인하였다. 또한 3차원 평판에서 나타나는 이차유동을 통해 3차원 경계층 유동에 대한 해석을 수행하였고, 3차원 경계층 유동을 해석할 수 있음

을 확인하였다. 본 논문에서 개발된 3차원 경계층 해석 프로그램을 통해 경계층 유동이 올바르게 해석됨을 확인하였다. 추후 개발된 경계층 해석 프로그램을 이용하여 비점성 해석 프로그램과 결합한 점성-비점성 해석 프로그램으로 확장할 예정이다.

## 후 기

본 연구는 인하대학교의 지원으로 수행되었으며, 이에 대해 깊이 감사를 드립니다.

## Note

This paper is a revised version of a paper presented at the KSAS 2014 Fall Conference, Jeju, Nov.19-21, 2014.

## Reference

[1] 2005, Anderson, J.D.Jr., "Ludwig Prandtl's Boundary Layer," *Physics Today*, Vol.58, Issue 12, pp.42-48.

[2] 1979, Schlichting, H., *Boundary Layer Theory, 7th edition*, McGraw-Hill Inc.

[3] 1963, Smith, A.M.O. and Clutter, D.W., "Solution of the Incompressible Laminar Boundary-Layer Equations," *AIAA Journal*, Vol.1, No.9, pp.2062-2070.

[4] 1972, Keller, H.B. and Cebecci, T., "Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows, II : Two-Dimensional Turbulent Flows," *AIAA Journal*, Vol.10, No.9, pp.1193-1199.

[5] 1977, Cebecci, T., Kaups, K. and Ramsey, J.A., "A general Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layer on Arbitrary Wings," *NASA-CR-2777*.

[6] 1987, Van Dalsem, W.R. and Steger, J.L., "Efficient Simulation of Separated Three-Dimensional Viscous Flows Using the Boundary-Layer Equations," *AIAA Journal*, Vol.25, No.3, pp.395-400.

[7] 1984, Van Dalsem, W.R., "Simulating of Separated Transonic Airfoil Flow by Finite-Difference Viscous-Inviscid Interaction," *Ph.D. Thesis*, Stanford University.

[8] 1978, Baldwin, B.S. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," *AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting*.

[9] 1974, Klineberg, J.M. and Steger, J.L., "The Numerical Calculation of Laminar Boundary Layer Separation," *NASA TN D-7732*.

[10] 2006, Lee, S. and Choi, D.W., "On Coupling the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations with Two-Equation Turbulence Model Equations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.50, Issue 2, pp.165-197.

[11] 2012, Kwak, E., Lee, N., Lee, S. and Park, S., "Performance Evaluation of Two-Equation Turbulence Models for 3D Wing-Body Configuration," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol.13, No.3, pp.307-316.

[12] 1961, Spalding, D.B., "A Single Formula for the Law of the Wall," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.28, Issue 3, pp.455-458.

[13] 1951, Wieghardt, K. and Tillman, W., "On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure," *NACA TM-1314*.

[14] 1991, White, F.M., "Viscous Fluid Flow," *2nd edition*, McGraw-Hill Inc.