대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 2, 189 ~ 206. May 2015

비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로

임 재 훈* · 이 형 숙**

비례 추론에 관한 여러 연구에서 학습 지도 개선 방향으로 시각적 표상의 활용이 제안되어 왔다. 그러나 초등학교 교과서의 비와 비율, 비례식과 비례배분 단원에 사용되고 있는 시각적 표상은 질적인 면에서나 양적인 면에서나 매우 제한되어 있다. 이 논문에서는 교과서의 비례식과 비례배분 내용을 시각적 표상에 주목하여 분석하고, 시각적 표상의 적극적인 활용 방안 마련을 위한 기초적 논의를 전개한다. 이중수직선 모델과 이중테이프 모델은 각각 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에서 비례 맥락에 내재된 공변 관계와 불변성을 인식하는 데 유용하게 사용될 수 있다. 이 논문에서는 이를 초등학교 교과서의 비례식 및 비례배분 실생활 문제의 유형별로 이중수직선 모델과 이중테이프 모델이 어떻게 기능할 수 있는지를 논의함으로써 예시하였다. 초등 수학 교과서의 비례식 및 비례배분 실생활 문제의 각 유형은 두 관점(다중 묶음 관점과 변동 부분 관점) 및 두 모델(이중수직선 모델과 이중테이프 모델)과 모두 연결될 수 있다. 이 논문의 분석은 비례식과 비례배분 교재 구성 및 수업에서 시각적 표상을 활용하는 구체적인 방안을 마련하는 데 도움이 될 것이다.

Ⅰ. 서 론

비례는 자연현상, 사회현상, 생활현상에 광범위하게 응용되는 실용적인 수학으로, 곱셈, 나눗셈, 분수와 같은 초등 수학의 여러 내용을 통합하는 핵심 주제이다. 또한 일차함수, 닮음과 같은 이후의 수학 학습의 바탕이 된다. 비례의 이와 같은 중요성을 고려할 때, 올바른 비례 추론 능력을 길러주는 것은 수학교육의 중요한 과제라 할 수 있다. 우리나라는 초등학교 고학년에서 비, 비율, 비례식, 비례배분을 가르치면서 비례 추론 능력의 향상을 도모해 왔다. 그러나 비례 추론 능력을 길러주려는 노력에도 불구하고, 학생들의 비례 추론 능력은 기대에 미치지 못하고 있다(김경선, 박영희, 2007; 김경희, 백희수, 2010; 박정숙, 2008; 박희옥, 박만구, 2012 등).

그동안 비와 비례 교육에 관한 여러 연구가 이루어져 왔다. 국내의 연구를 살펴보면, 비 및 비례 추론의 개념적 분석을 통해 교육적 시사점을 도출한 연구(정은실, 2003a, 2003b, 2010), 비, 비율, 비의 값 용어 정의에 관한 연구(박교식, 2010; 장혜원, 2002; 홍갑주, 2013), 학생들의 비례적 사고에 관한 연구(고은성, 이경화, 2007; 권미숙, 김남균, 2009; 김민경, 2007; 김숙진, 2011; 박정숙, 2008; 박희옥, 박만구, 2012), 외국 교과서와의 비교 연구(김경희, 백희수, 2010; 박희자, 정은실, 2010), 학습 지도 프로그램을 개발하고

* 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr
** Eastern Washington University, hslee@ewu.edu

적용한 연구(김경선, 박영희, 2007; 김수현, 나귀수, 2008; 신재은, 2005)가 있다.

이 연구들에서 반복적으로 찾아볼 수 있는 비와 비례 교육 개선을 위한 제안 중 하나가 시각적 모델 사용의 필요성이다(김경선, 박영희, 2007; 김경희, 백희수, 2010; 김민경, 2007; 김숙진, 2011; 박희자, 정은실, 2010; 신재은, 2005; 정은실, 2003a). 예를 들어, 박희자와 정은실(2010)은 비율표, 원그래프 측정기, 확대 축소된 그림, 띠그래프 등 다양한 시각적 모델의 사용을 고려해야 한다고 하였다. 김경선과 박영희(2007)도 비례 추론을 시각화할 수 있는 프로그램 개발이 필요함을 주장하였다.

비례 학습 지도에 시각적 모델 사용을 권고하는 제안이 반복되어 온 것에 비하여, 비례와 시각적 표현의 관계를 중점적으로 분석한 연구는 상대적으로 적다. 비례와 시각적 모델에 관한 직접적인 연구로는 문제에 그림 정보를 함께 제시한 경우와 그렇지 않은 경우 학생들의 문제 해결에 어떤 차이가 나타나는지 조사한 연구가 있고(김민경, 2007; 김숙진, 2011), 그 외에는 학습 지도 프로그램 개발에서 문제와 관련된 그림 정보나 띠 그림을 부분적으로 사용하는 수준에 머물러 있다([그림 Ⅰ-1]).

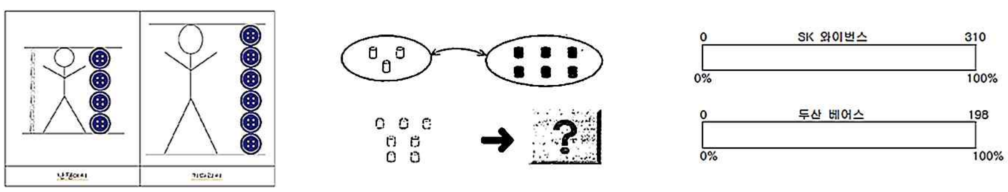
본 연구는 [그림 Ⅰ-1](a), (b)와 같은 문제와 관련된 그림 정보보다 [그림 Ⅰ-1](c)와 같은 좀 더 구조화된 수학적인 다이어그램에 관심이 있다. 이에 이 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따라 개발된 6학년 2학기 수학 교과서(실험본)의 비례식과 비례배분 단원을 구조화된 수학적 다이어그램에 주목하여 고찰한다. 그리고 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 몇 개의 유형으로 분류하고, 각 유형별로 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점, 이중수직선 모델과 이중테이프 모델과의 관련성을 분석한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례를 보는 두 가지 관점

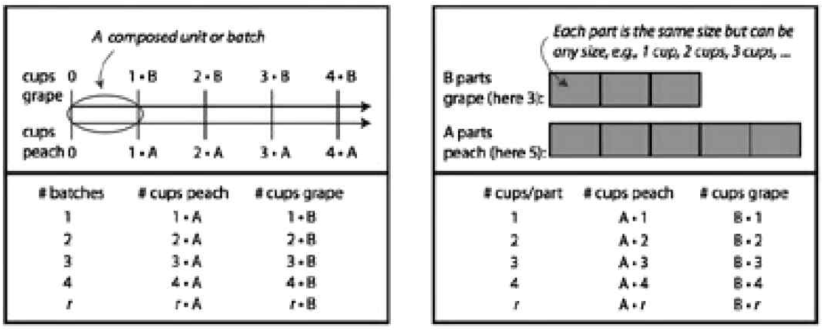
비례에서 변하는 측면과 변하지 않는 측면을 이해하는 것이 중요하다. 예를 들어, 빵 2개를 만드는 데 달걀 3개가 필요하다면, 빵 6개를 만드는 데는 달걀 9개가 필요하다. 빵의 개수가 3배 커짐에 따라 필요한 달걀의 개수도 3배 커진다. 이와 같이 빵과 달걀의 개수가 같이 변한다는 공변 관계를 이해하는 것이 일차적으로 중요하다. 뿐만 아니라 빵과 달걀의 개수는 각각 (2개, 3개), (6개, 9개)로 달라졌지만, 두 상황에서 변하지 않고 유지되는 그 무엇이 있다는 것을 이해하는 것이 중요하다.

비례의 이해는 상황이 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는



(a) (b) (c)

[그림 Ⅰ-1] (a) 비례 문제 그림 정보 (김숙진, 2011, p. 183), (b) 비례 문제 그림 정보(김민경, 2007, p. 146), (c) 퍼센트와 띠 그림(신재은, 2005, p. 153)



(a) Multiple-batches perspective (b) Variable-parts perspective

[그림 Ⅱ-1] 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점 (Beckmann & Izsák, 2015, p. 22)

것을 함의한다(정은실, 2003b). Beckmann과 Izsák(2015)의 다중 묶음 관점(multiple-batches perspective)과 변동 부분 관점(variable-parts perspective)은 비례 상황에 내재한 공변성과 불변성을 이해하는 틀을 제공한다([그림 Ⅱ-1]).[1] 예를 들어, 복숭아 주스와 포도 주스를 3:5로 섞어서 혼합 주스 1병을 만든다고 하자.

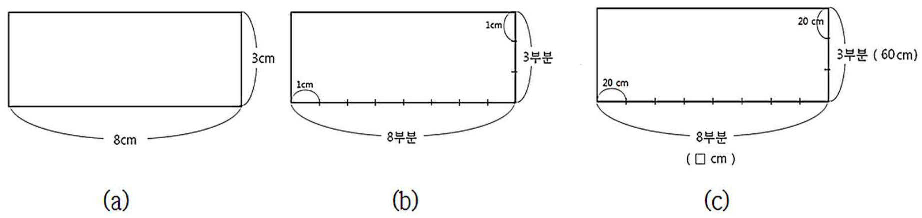
혼합 주스의 양을 2배, 3배, 4배로 증가시키는 방법으로 다음 두 가지를 생각할 수 있다. 첫째로, 다중 묶음 관점에서, 컵의 크기는 그대로 유지한 채 복숭아와 포도 주스의 컵 수를 늘리는 것이다. 복숭아 주스 3컵과 포도 주스 5컵으로 혼합 주스 1병을 만드는 것을 r번 반복하면, 결국 복숭아 주스 3(컵)×r[2]과 포도 주스 5(컵)×r로 혼합 주스 r병을 만들게 된다. 혼합 주스의 양이 변함에 따라 컵의 수가 공변하고, 컵의 수의 변화에 상관없이 복숭아 주스 컵 수는 포도 주스 컵 수의 $\frac{3}{5}$이라는 관계는 그대로 유지된다.

둘째로, 변동 부분 관점에서, 컵의 수는 그대로 유지한 채 복숭아와 포도 주스의 컵의 크기를 각각 2배, 3배, 4배로 늘리는 것이다. 예를 들어, 혼합 주스의 양을 2배로 하기 위해 처음에 사용한 컵보다 2배 큰 컵을 사용하여 복숭아 주스 3컵, 포도 주스 5컵을 계량하는 것이다. 혼합 주스의 양이 변함에 따라 컵의 크기가 공변하고, 컵의 크기의 변화에 상관없이 복숭아 주스 3컵에 포도 주스 5컵이라는 것은 변하지 않는다.

이 두 관점을 같은 종류의 두 양의 비 및 다른 종류의 두 양의 비와 관련하여 살펴보자. 같은 종류의 두 양의 비는 길이:길이와 같이 한 측정 공간 내에서의 비라고 할 수 있고, 다른 종류의 두 양의 비는 거리:시간과 같이 두 측정 공간 사이의 비라고 할 수 있다.

같은 종류의 두 양의 비와 관련된 다음 문제를 보자. “가로 8cm, 세로 3cm인 직사각형 모양의 작은 액자가 있습니다. 같은 모양의 큰 액자의 세로가 60cm일 때, 가로는 몇 cm입니까?” 이것을 다중 묶음 관점에서 세로가 3cm에서 60cm로 20배 길어지면 가로도 20배 길어진다고 해석할 수 있다. 이 문제를 변동 부분 관점에서 해석할 수도 있다. [그림 Ⅱ-2](a)와 같이 가로 8cm, 세로 3cm를 단순히 특정한 양으로 보지 않고, [그림 Ⅱ-2](b)와 같이 1cm라는 부분이 8번, 3번 있는 것으로 본다. 이렇게 8cm, 3cm를 8부분, 3

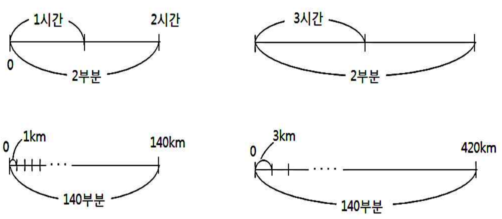
1) 이 논문에서는 multiple-batches를 다중 묶음, variable-parts를 변동 부분으로 번역한다.
2) [그림 Ⅱ-1](a) 하단의 r · A는 A컵의 r배에 해당하는 미국식 곱셈 표현이다.



[그림 Ⅱ-2] (8cm, 3cm) 문제의 변동 부분 관점 해석

부분으로 보면, [그림 Ⅱ-2](c)와 같이 가로의 길이가 160cm임을 알 수 있다.

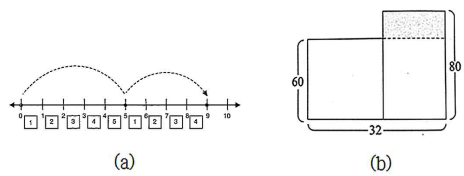
이제 다른 종류의 두 양의 비와 관련된 다음 문제를 보자. “일정한 빠르기로 2시간 동안에 140km를 가는 자동차가 있습니다. 같은 빠르기로 달릴 때 420km를 가려면 몇 시간 걸리겠습니까?” 이 문제를 다중 묶음 관점에서 해석하는 것은 자연스럽다. 예를 들어 2시간, 140km를 3번 반복하여 6시간, 420km를 얻을 수 있다. 이 문제를 변동 부분 관점에서 해석하려면, 처음 상황에서 2시간, 140km를 2부분, 140부분으로 보아야 한다([그림 Ⅱ-3]). 그리고 나중 상황에서도 시간 2부분, 거리 140부분의 관계가 동일하게 유지된다고 보고, 420km를 140부분으로 보아 거리 1부분에 해당하는 것이 3km임을 구한다. 이로부터 시간 1부분이 3시간이 됨을 알아, 시간 2부분인 6시간을 구할 수 있다.[3]



[그림 Ⅱ-3] (2시간, 140km) 문제의 변동 부분 관점 해석

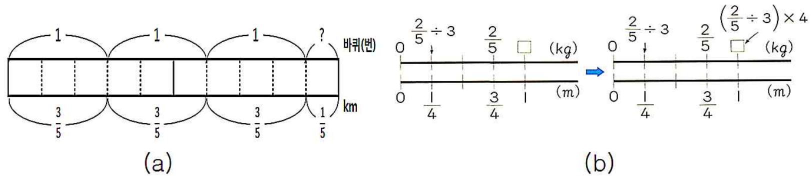
2. 이중수직선 모델과 이중테이프 모델

수학적 지식의 이해에서 표상은 매우 중요하다. 수학적 지식 이해는 다양한 수학적인 표상을 생성하고 해석하는 것과 깊이 관련되어 있다(Lesh, Post, & Behr, 1987). 여러 표상 중에서 그림이나 다이어그램 같은 시각적 표상은 문제의 이해와 해결에 도움을 줄 수 있다(Lamon, 1994). 구체적인 수준에서 추상적인 수준으로 도약하는 초등학생에게 시각적 표상은 의미 있는 정보로서, 이를 잘 사용하면 형식적 수학화를 도울 수 있다(김민경, 2007). 수학적으로 의미 있는 좋은 시각적 표상은 문제를 구조적으로 표현하여 문제에 나오는 여러 정보를 종합적으로 파악하고 해결 방안을 찾기 쉽게 한다(권석일, 임재훈, 2007). [그림 Ⅱ-4]와 같이 수량 사이의 관계를 수직선이나 선분도, 면적도로 나타내면 문제 구조 이해에 바탕을 둔 해법을 찾을 수 있는 경우가 많다.



[그림 Ⅱ-4] (a)5+4=□의 수직선(Teppo & van denHeuvel-Panhuizen, 2014, p. 50), (b) x+y=32, 60x+80y=2200의 면적도 (이용률, 2010, p. 8)

3) 2, 140, 420이라는 추상적인 수들 사이의 관계만 생각하면 이와 같은 추론은 어색하지 않지만, km, 시간과 같은 양의 속성을 고려하면 어색하게 느껴질 수 있다.



[그림 Ⅱ-5] (a) $2 \div \frac{3}{5}$ (b) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ (杉山吉茂 外, 2004, p. 69)

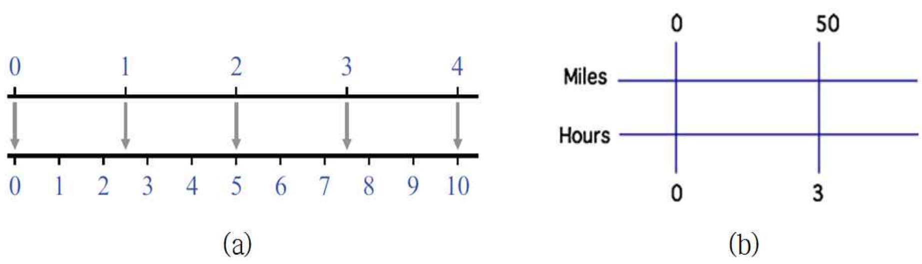
비례 문제에 이용할 수 있는 구조적인 시각적 표상으로 이중수직선 모델과 이중테이프 모델이 있다. 이중수직선 모델은 덧셈적인 접근을 벗어나 곱셈적인 접근으로 나아가는 데 유용하며(Küchemann, Hodgen, & Brown, 2011), 비례 맥락에서 두 값의 조정을 용이하게 하여 비례 추론을 촉진할 수 있다(Orrill & Brown, 2012). 이중수직선 모델은 비례식과 비례배분 단원만이 아니라, 곱셈, 나눗셈 등 비례 관계가 내재된 내용에 광범위하게 활용될 수 있다. 예를 들어, 분수 나눗셈에서 [그림 Ⅱ-5]를 활용할 수 있다.

전형적인 이중수직선은 대응 다이어그램이다(Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014). 이중수직선 모델에서는 대응하는 두 수가 바로 위아래에 위치한다. 대응하는 두 수를 윗선과 아랫선의 각 0에서부터 같은 거리만큼 떨어진 곳에 위치시키기 위해, 아랫선과 윗선의 척도를 달리 하는 것을 개의치 않는다([그림 Ⅱ-6]).

이중수직선 모델은 한 측정 공간 내의 관계와 두 측정 공간 간의 관계를 모두 나타낸다(Orrill & Brown, 2012). [그림 Ⅱ-6](b)의 이중수직선에서 가로 방향으로 시간이 2배로 늘어나면 거리도 2배로 늘어나는 관계를 표현할 수 있다. 이중수직선을 통하여 거리와 시간이라는 두 양이 같이 늘어나고 같이 줄어든다는 공변 관계의 인식을 강화할 수 있다.

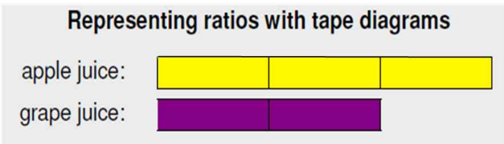
이와 같은 이중수직선의 특성은 다중 묶음 관점과 잘 연결된다. 3시간 50마일을 반복하여 시간이 3시간에서 6시간으로 2배 늘어남에 따라 거리가 50마일에서 100마일로 2배 늘어난다는 다중 묶음 관점은 이중수직선에서 효과적으로 구현될 수 있다. 또 이중수직선을 세로 방향으로 보면, 시간이 주어졌을 때 거리를 정해주는 관계($\frac{50}{3}$배)에 주목하게 된다. 이 수치 $\frac{50}{3}$은 다중 묶음 관점에서 한 양이 다른 양의 몇 배인지를 나타내는 불변자에 해당한다.

이중테이프 모델은 이중수직선 모델과는 다른



[그림 Ⅱ-6] 대응 다이어그램으로서의 이중수직선 ((a) Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014, p. 233, (b) Orrill & Brown, 2012, p. 382)

특징을 지닌다. [그림 Ⅱ-7]은 사과 주스와 포도 주스의 비가 3:2인 혼합 주스를 이중테이프 모델로 나타낸 것이다. 테이프를 구성하는 한 부분(작은 직사각형 한 칸)은 위 테이프에서나 아래 테이프에서나 동일한 크기의 양을 나타낸다. 위 테이프에서 한 부분이 1컵이면 아래 테이프에서 한 부분도 1컵을 나타낸다. 이것으로부터 이중테이프 모델은 같은 종류의 두 양의 비와 잘 어울린다는 것을 알 수 있다.



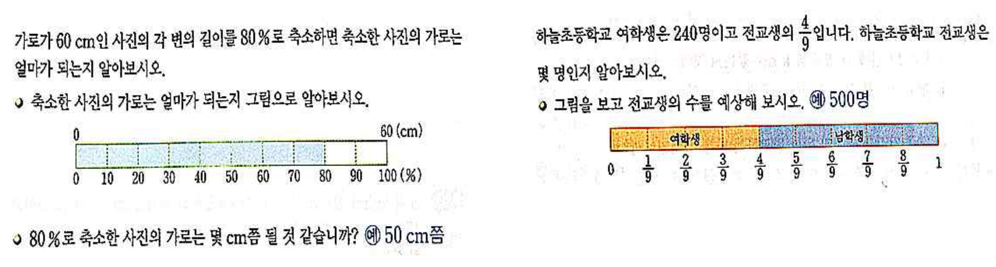
[그림 Ⅱ-7] 3:2의 이중테이프 모델 (Common Core Standards Writing Team, 2011, p. 4)

[그림Ⅱ-7]의 이중테이프 모델은 사과 주스와 포도 주스의 비가 3:2인 임의의 혼합 주스를 모두 나타낼 수 있다. [그림Ⅱ-7]에서 한 부분은 1컵을 나타낼 수도 있고, 1L를 나타낼 수도 있다. 또, 한 부분이 2컵을 나타낼 수도 있고, 4L를 나타낼 수도 있다. 한 부분이 4L를 나타낸다면, [그림Ⅱ-7]은 사과 주스 4L들이 3병, 총 12L와 포도 주스 4L들이 2병, 총 8L가 혼합 주스를 만드는 데 사용된 것을 나타낸다. 이로부터 이중테이프 모델이 변동 부분 관점과 잘 어울림을 알 수 있다.

Ⅲ. 수학 교과서의 비와 비율, 비례식과 비례배분 단원에서 시각적 모델

6학년 1학기 수학 교과서 4단원 비와 비율을 보면, [그림 Ⅲ-1]과 같이 띠 그림이 비율과 기준량으로 비교하는 양 구하기, 비율과 비교하는 양으로 기준량 구하기에 3번 등장한다(교육부, 2015a, pp. 112-115). 띠 그림과 직접적으로 관련된 활동은 ‘축소한 사진의 가로의 길이가 얼마쯤 될 것 같은지 어림해 보기’, ‘그림을 보고 전교생의 수를 예상해 보기’와 같이 답을 예상해 보는 활동이다.

교사용 지도서(교육부, 2015b)에는 띠 그림[4] 활용 방안이 기술되어 있지 않다. 지도서에 적혀 있는 답 ‘50cm쯤’, ‘500명’으로 미루어 보건대, 이 띠 그림은 답을 단순 어림하기 위한 것으로 보인다. 예를 들어, ‘띠 그림에서 80%에 해당하는 길이는 약 50cm이다.’, ‘띠 그림에서 $\frac{4}{9}$에 대응하는 학생수가 240명이므로 전교생의 수는 2



[그림 Ⅲ-1] 비와 비율 단원의 띠 그림 (교육부, 2015b, pp. 244, 247)

4) 교과서의 띠 그림은 테이프 모양이지만, 서로 다른 단위를 갖는 윗선과 아랫선으로 이루어진 이중수직선의 기능을 수행한다. 그림의 형태는 테이프 모양이지만, 앞의 Ⅱ장에서 논의한 변동 부분 관점을 나타내는 이중테이프 모델의 테이프와는 그 기능이 다르다.

배 조금 넘는 약 500명일 것 같다.'와 같이 답을 어림하는 것이다.

띠 그림을 더 적극적으로 활용하여, 예를 들어 '띠 그림에서 60cm가 100%이므로, 10%에 해당하는 길이는 6cm이다. 이것을 이용하여 80%에 해당하는 길이를 구하면 6×8=48(cm)이다.'와 같이 추론에 의해 축소한 사진의 가로의 길이를 구할 수 있다. 전교생의 수를 구하는 문제도 '띠 그림에서 $\frac{4}{9}$가 240명이므로, $\frac{1}{9}$은 60명이다. 따라서 전교생은 540명이다.' 또는 '띠 그림에서 $\frac{4}{9}$가 240명이므로, $\frac{8}{9}$은 480명이다. $\frac{1}{9}$은 60명이므로 전교생은 480+60=540명이다.'와 같이 추론에 의해 답을 구할 수 있다.

교과서에는 답을 예상해 보는 질문에 이어 "80%를 분수로 나타내어 보시오. 60의 $\frac{4}{5}$는 얼마입니까? 축소한 사진의 가로는 몇 cm입니까?" "1은 $\frac{4}{9}$의 몇 배입니까? 하늘초등학교의 전교생은 몇 명입니까?"와 같은 수치적인 성격의 질문들이 제시되어 있다. 이 질문들은 띠 그림을 비례 추론 증진에 효과적으로 사용하기에 적절한 질문으로 보이지 않는다. 결국 띠 그림은 단순 어림의 용도로만 사용되고 사장될 우려가 있다.

활동 2 자전거로 거리가 300 m인 비탈길을 내려오는 데 120초가 걸렸습니다. 같은 빠르기로 10 m인 비탈길을 내려오는 데 걸리는 시간을 알아보시오.

- 자전거로 내려온 거리의 걸린 시간에 대한 비율을 구해 보시오.
- 구한 비율을 이용하여 표를 완성하시오.

이동한 거리(m)	300	150		50	10
걸린 시간(초)	120		40		

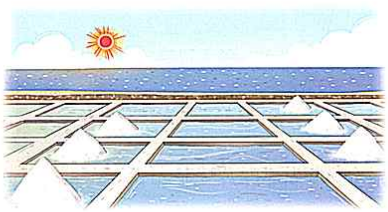
- 같은 빠르기로 10 m를 내려오는 데 걸리는 시간은 몇 초입니까?
- 100 : 40은 300 : 120의 전항과 후항을 각각 얼마로 나눈 것과 같습니까?
- 300 : 120=100 : 40이라고 할 수 있습니까?

[그림 Ⅲ-2] 비의 성질과 비례표 (교육부, 2014, p. 43)

비례식을 이용하여 문제를 해결할 수 있어요

익힘책 29~30쪽

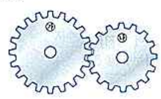
생각 열기 소금 20 kg을 얻으려면 바닷물 500 L가 필요합니다. 소금 12 kg을 얻으려면 바닷물 몇 L가 필요한지 알아봅시다.



활동 1 소금 12 kg을 얻기 위해서 필요한 바닷물의 양을 비례식을 이용하여 알아보시오.

- 소금 12 kg을 얻기 위해서 필요한 바닷물의 양을 □L라 하고 비례식을 세워 보시오.
- 비례식의 성질을 이용하여 □의 값을 구하시오.
- 소금 12 kg을 얻기 위해서 필요한 바닷물은 몇 L입니까?
- 다른 방법으로 문제를 해결해 보시오.

활동 2 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴가 있습니다. 톱니바퀴 ㉮가 4바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 5바퀴 돕니다. 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 바퀴 도는지 알아보시오.



- 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯가 도는 수를 □바퀴라 하고 비례식을 세워 보시오.
- 비례식의 성질을 이용하여 □의 값을 구하시오.
- 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 바퀴 돌게 됩니까?
- 다른 방법으로 문제를 해결해 보시오.

마무리 1 직사각형 모양의 액자가 있습니다. 액자의 가로와 세로의 비는 4 : 3입니다. 액자의 가로가 24 cm라면 세로는 몇 cm입니까?

2 자동차가 일정한 빠르기로 8 km를 달리는 데 5분이 걸렸습니다. 같은 빠르기로 240 km를 달린다면 몇 시간 몇 분이 걸립니까?

[그림 Ⅲ-3] 비례식 활용 문제(교육부, 2014, pp. 48-49)

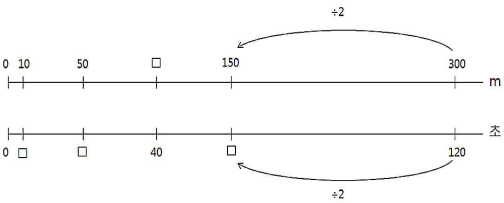
6학년 2학기 수학 교과서(실험본) 2단원 비례식과 비례배분에는 [그림 Ⅲ-2]와 같은 비례표가 비의 성질에 2번, 비례배분에 1번 나온다(교육부, 2014, pp. 42, 43, 50). 비의 성질 및 비례식의 성질 도입 이후, 비례식 문제는 비례표를 이용하지 않고 이 성질들을 이용하여 수치적으로 해결한다([그림 Ⅲ-3]). 이와 같은 교과서 전개 방식이 비례식 자체의 외형적 표현과 외항의 곱은 내항의 곱과 같다는 기계적 알고리즘에 치우친 것은 아닌지 재고할 필요가 있다.

비례배분에서도 비례표가 조개 15개를 1:2로 비례배분하는 초보적인 방법으로 제시된 후, $15\times\frac{1}{1+2}$, $15\times\frac{2}{1+2}$와 같은 수치적인 방법이 나온다([그림 Ⅳ-13] 참조). 교과서에서 비례표에 의한 풀이와 $15\times\frac{1}{1+2}$, $15\times\frac{2}{1+2}$와 같은 수치적 방법의 연결은 불분명하다. 이중수직선 모델이나 이중테이프 모델과 같은 시각적 모델은 비례식이나 비례배분 문제 해결에 등장하지 않는다.

이와 같은 우리나라 교과서의 비례식 및 비례배분 내용 구성 방식은 정은실(2003a)의 다음과 같은 비판으로부터 자유롭지 못한 것으로 보인다.

> 비례식을 푸는 전통적인 알고리즘 방식은 오랫동안 교과서에서 사용된 주 전략이었음에도 불구하고 소수의 학생에 의해서만 의미 있게 사용되어졌다. 비례식을 풀 수 있는 모든 사람이 반드시 비례적 추론을 사용하는 것은 아니다. 사실 대각선 곱셈과 같은 기계적인 알고리즘은 학생들에 의해 잘 이해되지 않으며, '자연스럽게 생성되는' 해결 방법이 아니며, 비례적 추론을 쉽게 하도록 한다기보다는 비례적 추론을 피하기 위하여 사용된다는 것을 보여주고 있다 (정은실, 2003a, p. 261).

이중수직선과 이중테이프와 같은 시각적 모델을 적절히 활용하면, 비례식의 성질을 기계적으로 적용하는 수치적 접근의 단점을 보완할 수 있다. 예를 들어 [그림 Ⅲ-2]의 활동 2에서 [그림 Ⅲ-4]와 같은 이중수직선을 비례표를 이용한 계산 과정과 연결할 수 있다.



[그림 Ⅲ-4] (300m, 120초) 문제의 이중수직선 모델

교과서의 비례식 및 비례배분 실생활 문제와 시각적 모델의 관계에 대해서는 다음 장에서 구체적으로 논의한다.

Ⅳ. 비례식 및 비례배분 실생활 문제와 시각적 모델

6학년 2학기 수학 교과서(실험본)의 비례식과 비례배분 단원에서 '비례식을 활용하여 문제를 해결할 수 있어요' 차시에 다음과 같은 문제들이 나온다(교육부, 2014, pp. 48-49).

문제 1. 소금 20kg을 얻으려면 바닷물 500L가 필요합니다. 소금 12kg을 얻으려면 바닷물 몇 L가 필요한지 알아봅시다.

문제 2. 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴가 있습니다. 톱니바퀴 ㉮가 4바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 5바퀴 돕니다. 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 바퀴 돌게 되는지 알아보시오.

문제 3. 직사각형 모양의 액자가 있습니다. 액자의 가로와 세로의 비는 4:3입니다. 액자의 가로가 24cm라면 세로는 몇 cm입니까?

문제 4. 자동차가 일정한 빠르기로 8km를 달리

는 데 5분이 걸렸습니다. 같은 빠르기로 240km를 달린다면 몇 시간 몇 분이 걸립니까?

위의 문제들을 다음 세 유형으로 구분할 수 있다.

· 유형 1. 두 수의 비가 주어진 비례식 문제 (문제 3)

· 유형 2. 같은 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례식 문제 (문제 2)

· 유형 3. 다른 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례식 문제 (문제 1, 문제 4)

또한 비례배분 차시 실생활 문제는 다음 두 유형으로 구분할 수 있다.

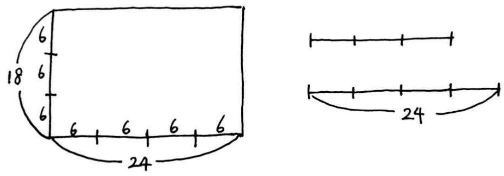
· 유형 4. 두 수의 비가 주어진 비례배분 문제5)

· 유형 5. 같은 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례배분 문제6)

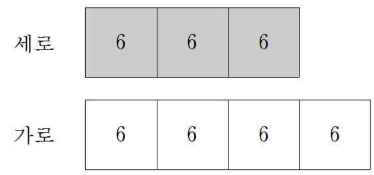
다음에서는 각 유형의 문제가 이중수직선 모델 및 이중테이프 모델과 어떻게 관련될 수 있는지 살펴본다. 이 장에서 제시한 그림 가운데 [그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-3], [그림 Ⅳ-5], [그림 Ⅳ-7], [그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-12])는 초등학교 교사들에게 그림그리기 전략을 이용하여 문제를 풀게 하였을 때 얻은 것이다.

1. 두 수의 비가 주어진 비례식 문제 (유형 1)

“직사각형 모양의 액자가 있습니다. 액자의 가로와 세로의 비는 4:3입니다. 액자의 가로가 24cm라면 세로는 몇 cm입니까?”라는 문제를 생각해 보자. 이 문제는 [그림 Ⅳ-1]과 같이 변동부분 관점에서 해결할 수 있다. 이 풀이를 [그림 Ⅳ-2]의 이중테이프 모델로 표현할 수도 있다.

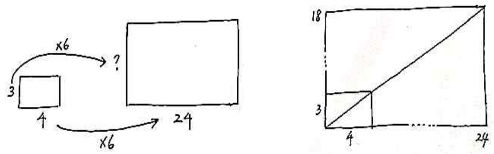


[그림 Ⅳ-1] ‘4:3’의 4, 3을 부분의 개수로 해석



[그림 Ⅳ-2] 4:3의 이중테이프 모델

이 문제를 [그림 Ⅳ-3]과 같이 푼 교사들도 있다. 이 풀이는 다중 묶음 관점을 반영하고 있으며, 이중수직선 모델로 [그림 Ⅳ-4]와 같이 나타낼 수 있다.

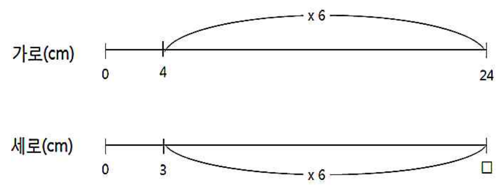


(a) (b)

[그림 Ⅳ-3] ‘4:3’의 4, 3을 4cm, 3cm로 해석

5) 유형 4의 문제로 “지수와 효정이가 조개 35개를 3:4로 나누어 가지려고 합니다. 각각 몇 개씩 가지면 되는지 알아보시오.”, “지수와 효정이는 밀가루와 쌀가루 무게의 비를 3:2로 반죽하여 빵을 만들기로 하였습니다. 빵 반죽에 들어간 밀가루와 쌀가루의 양을 알아보시오. 전체 가루가 3kg이면 반죽에 들어간 밀가루의 양은 얼마입니까?”, “형과 동생이 아버지의 생신에 15000원짜리 케이크를 사려고 합니다. 형과 동생이 3:2로 나누어 돈을 낸다면 두 사람은 각각 얼마씩 내야 합니까?”가 있다(교육부, 2014, pp. 51, 53, 57).

6) 유형 5의 문제로 “지수가 캔 조개는 6kg, 효정이가 캔 조개는 8kg입니다. 주방장 아저씨께서 주신 용돈이 7000원이라면 지수와 효정이는 받은 용돈을 어떻게 나누어야 하는지 알아보시오.”가 있다(교육부, 2014, p. 52).



[그림 Ⅳ-4] 4:3의 이중수직선 모델

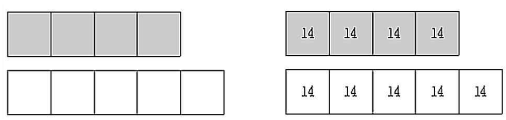
그런데 이 문제의 '4:3'의 4와 3을 4cm, 3cm로 해석하여 다중 묶음 관점에서 해결하는 것에 대해 논란이 있을 수 있다. 이 문제에서 액자는 하나이며, '가로와 세로의 비 4:3'과 '가로의 길이 24cm'는 한 액자에 대한 두 가지 묘사이다. 이 문제 맥락은 가로 4cm, 세로 3cm인 작은 액자와 그와 닮은 가로 24cm인 큰 액자를 비교하는 맥락과는 다르다. 그럼에도 불구하고, 문제에 주어진 정보 '가로와 세로의 비 4:3'으로부터 가로 4cm, 세로 3cm인 작은 액자를 떠올리는 것은 가로와 세로라는 단어로부터 구체적인 길이를 연상하고(길이를 나타내는 4, 3) 이것을 24cm의 'cm'와 연결하기(4cm, 3cm) 때문으로 보인다.

2. 같은 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례식 문제 (유형 2)

유형 2의 문제로 "맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴가 있습니다. 톱니바퀴 ㉮가 4바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 5바퀴 돕니다. 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 바퀴 돌게 되는지 알아보시오."를 생각해 보자. 이 문제는 [그림 Ⅳ-5]와 같이 이중수직선 모델을 사용하여 해결할 수 있다. [그림 Ⅳ-5](a)는 윗선과 아랫선에 동일 척도를 사용하고 있으며, [그림 Ⅳ-5](b)는 다른 척도를 사용하고 있다.

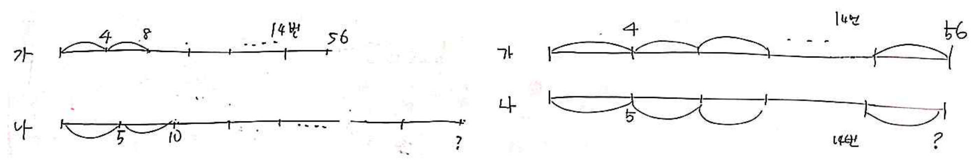
앞에서 논의한 바와 같이, 전형적인 이중수직선은 대응 다이어그램으로, [그림 Ⅳ-5](b)와 같이 대응하는 두 값 4, 5가 바로 위아래에 위치하도록 그린다. [그림 Ⅳ-5](a)와 같은 그림을 그린 교사들은 윗선과 아랫선 모두 바퀴의 회전수라는 같은 종류의 양을 나타내기 때문에 동일 척도를 사용하였다고 하였다. 즉, 같은 종류의 양을 다른 척도를 사용하여 나타내는 것에 부담을 느끼고 있었다. 아동들도 이중수직선을 사용하면서 유사한 부담을 느낄 수 있다. [그림 Ⅳ-5](a)와 [그림 Ⅳ-5](b)를 비교하면서 [그림 Ⅳ-5](b)와 같이 나타내었을 때의 장점을 인식할 수 있도록 하는 지도가 필요할 것이다.

이 문제를 [그림 Ⅳ-6]과 같이 이중테이프 모델을 사용하여 해결할 수도 있다. 4:5의 관계를 이용하여, 56바퀴가 4부분에 해당될 때 1부분이 14바퀴임을 알아내어 문제를 해결할 수 있다.



[그림 Ⅳ-6] (4바퀴, 5바퀴) 문제의 이중테이프 모델

이와 같은 그림을 그리기 위해서는 4바퀴, 5바퀴를 1바퀴라는 부분이 4번, 5번 있는 것으로 해



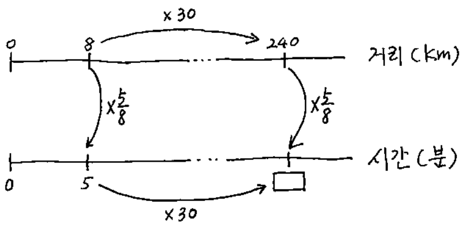
(a) (b)

[그림 Ⅳ-5] (a) 동일 척도 사용 (b) 다른 척도 사용

석해야 한다. 유형 1에서는 추상적인 두 수의 비 4:3의 4와 3을 구체적인 양 4cm, 3cm로 생각하여, 다중 묶음 관점에서 이중수직선 모델을 사용하여 문제를 해결할 수 있었다. 유형 2에서 4바퀴, 5바퀴를 4부분, 5부분으로 해석하는 것은 이것의 역과정이라고 할 수 있다. 구체적인 양 4바퀴, 5바퀴를 추상적인 수 4, 5로 생각하여 4부분, 5부분의 아이디어에 이를 수 있기 때문이다.

3. 다른 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례식 문제 (유형 3)

유형 3의 문제로 "자동차가 일정한 빠르기로 8km를 달리는 데 5분이 걸렸습니다. 같은 빠르기로 240km를 달린다면 몇 시간 몇 분이 걸립니까?"를 생각해 보자.



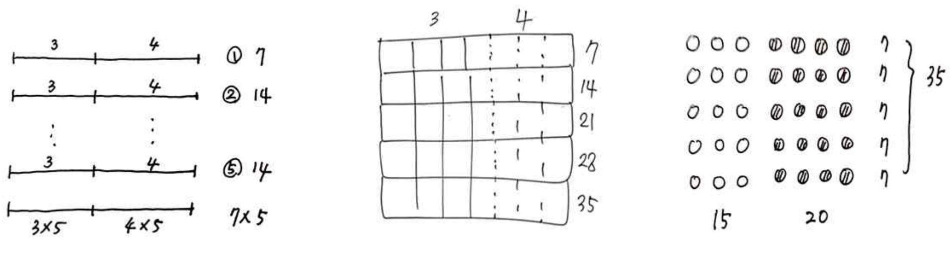
[그림 Ⅳ-7] (8km, 5분) 문제의 이중수직선 모델

[그림 Ⅳ-7]은 이 문제를 이중수직선을 사용하여 나타낸 것이다. 이중수직선에서 수평 방향의 관계(240은 8의 30배, □는 5의 30배) 또는 수직 방향의 관계(5는 8의 $\frac{5}{8}$, □는 240의 $\frac{5}{8}$)를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

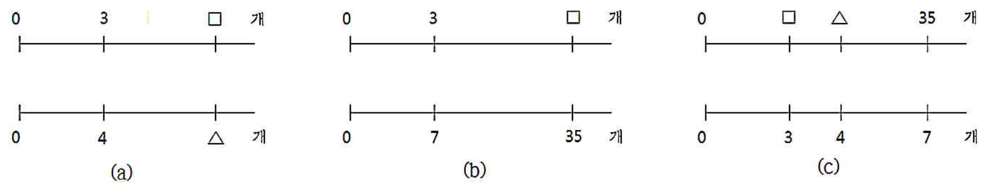
앞의 Ⅱ장에서 "일정한 빠르기로 2시간 동안에 140km를 가는 자동차가 있습니다. 같은 빠르기로 달릴 때 420km를 가려면 몇 시간 걸리겠습니까?"라는 문제를 변동 부분 관점에서 해결할 수 있음을 살펴본 바 있다([그림 Ⅱ-3]). 마찬가지로 위의 유형 3 문제도 8km와 5분을 각각 8부분, 5부분으로 해석하여 변동 부분 관점에서 해결할 수 있다. 이러한 풀이는 이중테이프 모델로 [그림 Ⅳ-6]과 유사한 방식으로 표현될 수 있다.

4. 두 수의 비가 주어진 비례배분 문제 (유형 4)

두 수의 비가 주어진 비례배분 문제로 "지수와 효정이가 조개 35개를 3:4로 나누어 가지려고 합니다. 각각 몇 개씩 가지면 되는지 알아보시오."를 생각해 보자. [그림 Ⅳ-8]은 이 문제를 다중 묶음 관점에서 해결한 것이다. 세 풀이 (a), (b), (c) 모두 추상적인 두 수의 비 3:4를 조개 3개와 조개 4개로 해석하고 있다. 그리고 전체 조개 35개를 모두 나누어줄 때까지 지수와 효정이에게 각각 조개 3개와 조개 4개씩 나누어 주는 일을 반복하고 있다. 3:4의 두 수 3, 4를 구체적



[그림 Ⅳ-8] '3:4'의 3, 4를 3개, 4개로 해석



[그림 Ⅳ-9] 조개 분배 문제의 이중수직선 모델

인 양인 조개 3개, 조개 4개로 생각하는 것은, 유형 1 문제에서 가로와 세로의 비 4:3을 4cm, 3cm로 생각했던 것과 마찬가지이다.

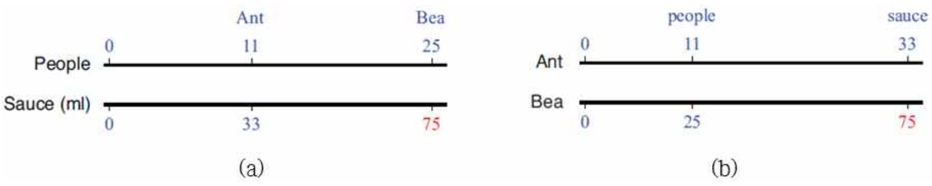
3:4의 두 수 3, 4를 조개 3개, 4개라는 양으로 해석하여 다중 묶음 관점에서 이 문제를 해결하려는 접근법을 이중수직선 모델과 관련지어 살펴보자. 추상적인 두 수 3, 4를 조개 3개, 4개로 해석하면, 이 문제는 같은 종류의 두 양 3개, 4개로 이루어진 한 상황이 주어졌을 때, 다른 상황의 두 양을 구하는 것이 된다. 그런데 비례배분 문제의 특성상, 이중수직선 위에 나타난 4개의 양 중 2개가 미지수가 되어, 이 이중수직선 위에서 곧바로 비례 추론에 의해 문제를 해결하기는 어렵다([그림 Ⅳ-9(a)].

이 문제의 해결에는 [그림 Ⅳ-9(b)], [그림 Ⅳ-9(c)]가 유용하다. [그림 Ⅳ-9(b)]에서 윗선은 지수가 받는 조개의 개수를 나타내고, 아랫선은 지수와 효정이에게 분배된 조개의 전체 개수를 나타낸다. [그림 Ⅳ-9(a)]가 부분(지수가 받는 조개의 개수)과 부분(효정이가 받는 조개의 개수) 사이의 비례 관계를 나타낸다면, [그림 Ⅳ-9(b)]는 부분(지수가 받는 조개의 개수)과 전체(지수와 효정이에게 분배되는 조개의 전체 개수) 사이의 비례 관계를 나타낸다.

[그림 Ⅳ-9(c)]에서 아랫선은 지수에게 3개 효정이에게 4개로 7개의 조개를 한 번 분배하는 상황을 나타내고, 윗선은 전체 조개 35개를 모두 분배하는 상황을 나타낸다고 볼 수 있다. 이렇게 보면, [그림 Ⅳ-9(c)]의 이중수직선은 전형적인 이중수직선과는 다른 점이 있다. 예를 들어, "복숭아 주스와 포도 주스를 3컵, 4컵씩 섞어 혼합 주스를 만든다. 모두 35컵의 주스를 사용했을 때 복숭아 주스와 포도 주스는 각각 몇 컵씩 사용했는가?"라는 문제를 [그림 Ⅳ-9(a)]와 같이 나타냈을 때 윗선은 복숭아 주스의 양을 나타내는 측정 공간이고, 아랫선은 포도 주스의 양을 나타내는 측정 공간이다. 그런데 이것을 [그림 Ⅳ-9(c)]와 같이 나타냈을 때, 윗선이나 아랫선은 복숭아 주스의 양을 나타내는 것도 아니고 포도 주스의 양을 나타내는 것도 아니다. 아랫선에서 3, 4, 7이라는 수는 문제 맥락에서 의미를 지니지만, 그 외 다른 수는 의미를 지니지 않는다.

Küchemann, Hodgen, Brown(2014)은 이와 같은 전형적이지 않은 이중수직선의 사용에 대하여 고찰하였다. 예를 들어 Ant가 11명분의 스프를 만드는 데 소스 33mL를 사용하고, Bea가 25명분의 같은 스프를 만드는 데 소스 75mL를 사용한다고 하자. 이 문제를 [그림 Ⅳ-10(a)]와 같이 전형적인 이중수직선으로 표현할 수도 있고, [그림 Ⅳ-10(b)]와 같이 Ant의 상황을 윗선에, Bea의 상황을 아랫선에 나타낸 대안적인 이중수직선으로 표현할 수도 있다.

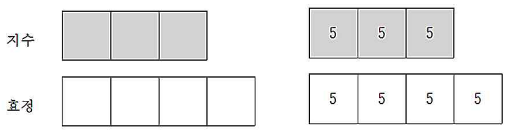
이와 같은 대안적인 이중수직선은 각각의 선이 어떤 한 종류의 양의 측정 공간을 나타내지 않는다는 점에서 어색하지만, 맥락에 따라 그 나름의 의의를 지닐 수 있다(Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014). 비례배분 맥락을 [그림 Ⅳ-9](b), [그림 Ⅳ-9](c)와 같은 이중수직선과 관련지어 보는



[그림 Ⅳ-10] 전형적인 이중수직선과 대안적인 이중수직선 (Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014, p. 234)

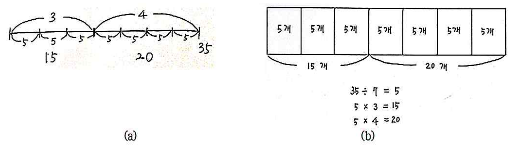
경험은 이중수직선을 유연하게 사용하는 능력을 기르는 데 도움이 될 수 있다.

이중테이프 모델은 비례배분 문제 해결에 효과적으로 사용될 수 있다([그림 Ⅳ-11]).



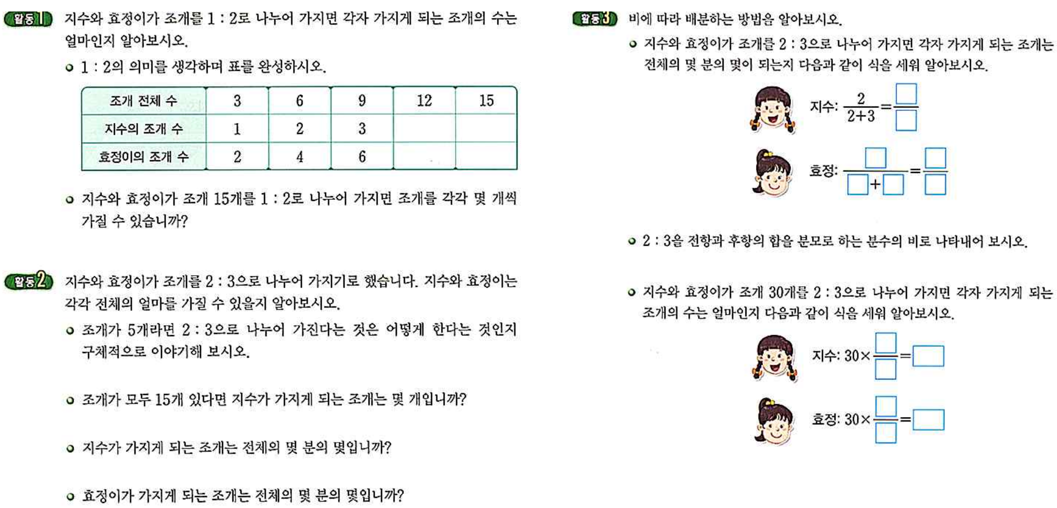
[그림 Ⅳ-11] 조개 분배 문제의 이중테이프 모델

다음 [그림 Ⅳ-12]의 초등 교사들의 풀이도 [그림 Ⅳ-11]의 이중테이프 모델과 마찬가지로 변동 부분 관점을 담고 있다.



[그림 Ⅳ-12] 조개 분배 문제의 변동 부분 관점의 풀이

여기서 다중 묶음 관점의 풀이(예, [그림 Ⅳ-8]) 및 변동 부분 관점의 풀이(예, [그림 Ⅳ-12])와 교과서 비례배분 차시 활동과의 연결성에 대해서 살펴보자. 교과서에는 비례배분 문제의 해결 방법을 찾는 활동으로 비례표를 이용한 활동 1과 수치적 해법으로 형식화하는 활동 3이 있다([그림 Ⅳ-13]).



활동1 지수와 효정이가 조개를 1 : 2로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 알아보시오.

- 1 : 2의 의미를 생각하며 표를 완성하시오.

조개 전체 수	3	6	9	12	15
지수의 조개 수	1	2	3		
효정이의 조개 수	2	4	6		

- 지수와 효정이가 조개 15개를 1 : 2로 나누어 가지면 조개를 각각 몇 개씩 가질 수 있습니까?

활동2 지수와 효정이가 조개를 2 : 3으로 나누어 가지기로 했습니다. 지수와 효정이는 각각 전체의 얼마를 가질 수 있을지 알아보시오.

- 조개가 5개라면 2 : 3으로 나누어 가진다는 것은 어떻게 한다는 것인지 구체적으로 이야기해 보시오.
- 조개가 모두 15개 있다면 지수가 가지게 되는 조개는 몇 개입니까?
- 지수가 가지게 되는 조개는 전체의 몇 분의 몇입니까?
- 효정이가 가지게 되는 조개는 전체의 몇 분의 몇입니까?

활동3 비에 따라 배분하는 방법을 알아보시오.

- 지수와 효정이가 조개를 2 : 3으로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개는 전체의 몇 분의 몇이 되는지 다음과 같이 식을 세워 알아보시오.

지수: $\frac{2}{2+3}=\frac{\square}{\square}$

효정: $\frac{\square}{\square+\square}=\frac{\square}{\square}$

- 2 : 3을 전항과 후항의 합을 분모로 하는 분수의 비로 나타내어 보시오.
- 지수와 효정이가 조개 30개를 2 : 3으로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 다음과 같이 식을 세워 알아보시오.

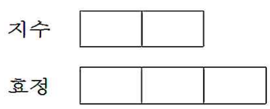
지수: $30\times\frac{\square}{\square}=\square$

효정: $30\times\frac{\square}{\square}=\square$

[그림 Ⅳ-13] 조개 분배 문제의 교과서 활동 전개 (교육부, 2014, pp. 50-51)

조개 15개를 1:2로 나누어가질 때 각자 가지게 되는 조개의 수를 비례표를 이용하여 구하는 활동 1에서, 조개 전체의 수를 3, 6, 9, 12, 15로 늘려가면서 각각 지수의 조개 수와 효정이의 조개 수를 구하여 표를 완성하게 된다. 이것은 지수 1개, 효정 2개씩 조개 3개를 반복해서 나누어주는 것과 잘 연결될 수 있다. 이렇게 볼 때, 이 비례표를 완성하는 활동은 다중 묶음 관점 및 [그림 Ⅳ-8]의 풀이와 잘 연결된다.

한편, 조개를 2:3으로 분배하는 활동 3에서는 비례배분 문제의 해결 방법을 $30 \times \frac{2}{2+3}$, $30 \times \frac{3}{2+3}$과 같이 형식화한다. 활동 3에 등장하는 $\frac{2}{2+3}$, $\frac{3}{2+3}$은 변동 부분 관점 및 [그림 Ⅳ-11], [그림 Ⅳ-12]와 같은 풀이와 잘 연결된다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-14]에서 한 부분이 나타내는 값을 바꾸어가면서 2:3으로 분배한다는 것의 의미 이해를 강화할 수 있을 것이다.



[그림 Ⅳ-14] 2:3 비례배분의 이중테이프 모델

이 그림은 한 부분이 3을 나타낸다면 지수 6개, 효정 9개, 한 부분이 5를 나타낸다면 지수 10개, 효정 15개로 조개를 분배하는 것을 포괄적으로 나타낸다. 이중테이프 모델과 수치적 해법이 연결되도록 하는 학습 지도가 필요하다.

5. 같은 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 비례배분 문제 (유형 5)

교과서에 나오는 이 유형의 문제로 “지수가 캔 조개는 6kg, 효정이가 캔 조개는 8kg입니다. 주방장 아저씨께서 주신 용돈이 7000원이라면 지수와 효정이는 받은 용돈을 어떻게 나누어야 하는지 알아보시오.”가 있다. 초등 교사들에게 이 문제를 그림으로 풀게 하였을 때 다음과 같은 두 가지 풀이가 나타났다.

- 6kg, 8kg을 6원, 8원으로 변환하여 [그림 Ⅳ-8]과 유사한 그림으로 해결
- 6kg, 8kg을 6부분, 8부분으로 해석하여 [그림 Ⅳ-12]와 유사한 그림으로 해결

7000원이라는 돈을 6kg, 8kg씩 반복해서 분배할 수는 없다. 첫 번째 풀이는 이러한 난점을 조개의 무게와 돈의 비례 관계에 의존하여, 7000원을 6원, 8원씩 반복하여 분배하는 문제로 바꾸어 해결한 것이다. 이러한 해결 방법은 다중 묶음 관점과 연결된다.

두 번째 풀이는 6kg, 8kg을 6부분, 8부분으로 변동 부분 관점에서 해석하는 것이다. 이때 1부분의 의미는 다중적이다. 1부분은 1kg의 조개를 나타낼 수도 있고, 7000(원)÷14=500(원)을 나타낼 수도 있다.

이상 각 유형별로 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점 및 이중수직선 모델과 이중테이프 모델의 적용 가능성에 대하여 살펴보았다. 문제 유형, 관점, 모델의 관계에 대하여, 특정 문제 유형이 특정 관점 및 특정 모델과만 내재적으로 연결된다고 보는 견해가 있을 수 있다. 예를 들어, 두 수의 비가 주어진 유형 1 비례식 문제나 유형 4 비례배분 문제는 변동 부분 관점 및 이중테이프 모델과만 연결되고, 구체적인 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 유형 2, 유형 3 문제는 다중 묶음 관점 및 이중수직선 모델과만 연결된다고 보는 것이다.

이 장의 고찰은 위에서 살펴본 각 유형의 문제와 특정 관점 및 특정 모델 사이에 내재적 연결성이, 설사 존재한다 하더라도, 절대적인 것이 아님을 시사한다. 예를 들어, 유형 4의 두 수의

비가 주어진 비례배분 문제는 변동 부분 관점에서 이중테이프 모델로 풀 수도 있고([그림 Ⅳ-11], [그림 Ⅳ-12]), 추상적인 수를 구체적인 양으로 변환하는 과정을 거쳐 다중 묶음 관점에서 이중수직선 모델로 풀 수도 있다([그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-9]). 같은 종류의 두 양으로 이루어진 상황이 주어진 유형 2의 비례식 문제도 다중 묶음 관점에서 이중수직선으로 풀 수도 있고([그림 Ⅳ-5]), 주어진 구체적인 양에서 부분의 수를 읽어내어 변동 부분 관점에서 이중테이프 모델로 풀 수도 있다([그림 Ⅳ-6]).[7]

Ⅴ. 결 어

여러 연구가 비례 학습 지도 개선을 위해 시각적 모델을 사용할 것을 권고해 왔다, 이에 비해 비례와 시각적 표현의 관계를 집중적으로 논의한 연구는 적으며, 교과서에서 시각적 모델의 활용도 매우 제한되어 있다. 이 논문에서는 교과서의 비례식 및 비례배분 실생활 문제를 유형별로 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에서 이중수직선 모델 및 이중테이프 모델과 관련하여 분석하였다. 각 유형의 문제는 다중 묶음 관점에서 해석될 수도 있고 변동 부분 관점에서 해석될 수도 있다. 또 이중수직선 모델로 표현될 수도 있고, 이중테이프 모델로 표현될 수도 있다. 이중수직선 모델과 이중테이프 모델을 적절히 혼용하면 각 유형의 문제를 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에서 종합적으로 이해하게 하는 데 도움이 될 것이다.

외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 명료한 수학적 설명이나 자연스런 구성 과정 없이 도입하고 비례식 활용 문제를 이 성질을 이용하여 기계적으로 푸는 방식 위주의 학습 지도가 이루어지면, 그저 단순한 요령[8]으로 식을 세우고 외항의 곱과 내항의 곱을 구해 답만 맞추는 아동들이 생길 수 있다. 비례식의 성질의 조기 형식화 및 지배적 우세는 비례 문제의 답을 빨리 구하는 데는 효율적이겠지만, 양들 사이에 존재하는 공변 관계 및 불변성 이해에 바탕을 둔 비례 추론 능력의 신장이라는 점에서 보면 바람직하지 않다. 비례 학습 지도의 일차적인 관건은 공변 관계와 불변성 이해에 바탕을 둔 추론 능력의 신장이며, 수치적 기법으로의 형식화는 이러한 추론을 통해 형성된 이해와 연결, 통합되어야 한다. 이중수직선 모델과 이중테이프 모델은 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에서 양들 사이의 공변 관계와 구조적 불변성을 이해하는 데 유용한 시각적 모델이다. 또한 비례배분 문제에서 살펴 본 바와 같이, 수치적 형식화와 연결될 수 있는 잠재력도 어느 정도 지니고 있다. 이 논문의 논의를 바탕으로 비례식 및 비례배분 교재 구성 및 수업에서 시각적 모델을 활용하는 구체적인 방안들이 마련되기를 기대한다.

초등 수학 교과서에 나오는 비례식 및 비례배분 실생활 문제를 몇 가지 유형으로 구분하여 분석한 결과는, 각 유형의 문제가 두 관점 및 두

---

7) 이것은 문제 유형과 특정 관점 및 모델 사이에 직접적 연결성의 존재를 부정하는 것은 아니다. 추상적인 수를 구체적인 양으로 변환하거나 구체적인 양에서 부분의 수를 읽어내는 과정의 매개가 없어도 된다는 점에서, 유형 1과 유형 4는 변동 부분 관점 및 이중테이프 모델과, 유형 2와 유형 3은 다중 묶음 관점 및 이중수직선 모델과 직접 연결된다.

8) 문제에 나온 수를 순서대로 이 거리:이 시간=저 거리:저 시간, 이 가로:이 세로=저 가로:저 세로, 이 빵:이 달걀=저 빵:저 달걀 (또는 이 거리:저 거리=이 시간:저 시간, 이 가로:저 가로=이 세로:저 세로, 이 빵:저 빵=이 달걀:저 달걀)과 같은 식으로 배열한다는 요령을 적용하면, 공변 관계나 불변성에 관한 인식이 결여된 상태에서도 비례식을 세울 수 있다. “자동차가 일정한 빠르기로 8km를 달리는 데 5분이 걸렸습니다. 같은 빠르기로 240km를 달린다면 몇 시간 몇 분이 걸립니까?”라는 문제에 이 요령을 적용하면 바로 8:5=240:□ (또는 8:240=5:□)라는 식을 세우고 외항의 곱과 내항의 곱을 구해 답을 구할 수 있다.

모델과 모두 연결될 수 있음을 보여준다. 그러나 이것은 둘 중 어느 한 관점이나 모델과만 연결되고 다른 관점이나 모델과는 연결되지 않는 비례 맥락 문제가 존재할 가능성을 부정하지는 않는다. 이와 같은 비례 맥락 문제가 존재하는지를 포함하여, 맥락과 관점과 모델의 관계에 대하여 더 포괄적이면서도 세분화된 분석이 수행될 필요가 있다. 또 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점이 분리되어 있는 독립적인 두 관점인지 아니면 서로 연결 또는 통합될 수 있는 성격의 것인지에 대한 분석도 이루어질 필요가 있다. 이와 같은 후속 연구는 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점을 각각 발달시키고 나아가 연결, 통합하는 실천적 방안을 모색하는 데 기초가 될 것이다.

참 고 문 헌

고은성, 이경화(2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석: 2명의 사례 연구. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

교육과학기술부(2011). **수학 6-1**. 서울: 두산동아.

교육부(2014). **수학 6-2 (실험본)**. 서울: 천재교육.

교육부(2015a). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2015b). **교사용 지도서 수학 6-1**. 서울: 천재교육.

권미숙, 김남균(2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

권석일, 임재훈(2007). 그림그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화. **수학교육학연구, 17**(2), 91-109.

김경선, 박영희(2007). 초등학생의 비례적 추론 지도에 관한 연구. **학교수학, 9**(4), 447-466.

김경희, 백희수(2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교 -TIMMS 평가목표와 공개문항을 중심으로. **학교수학, 12**(4), 473-491.

김민경(2007). 영상적 표상이 포함된 비례 문제에서 나타난 아동들의 비례적 사고 분석. **수학교육, 46**(2), 141-153.

김수현, 나귀수(2008). 비와 비율 지도에 대한 연구-교과서 재구성을 중심으로. **수학교육학연구, 18**(3), 309-333.

김숙진(2011). **초등학교 학생들의 비례 추론 능력에 시각적 표현이 미치는 영향 -5, 6학년을 대상으로-**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박교식(2010). 우리나라 초등학교 수학에서의 비율 정의와 비의 값 정의의 비판적 분석. **수학교육학연구, 20**(3), 397-411.

박정숙(2008). 비와 비례 과제에서 가법적 전략을 사용하는 학생의 문제해결특징: 중학생 2명의 사례 연구. **학교수학, 10**(4), 603-623.

박희옥, 박만구(2012). 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석. **초등수학교육, 15**(2), 159-170.

박희자, 정은실(2010). 우리나라 교과서와 미국 MIC 교과서의 비와 비율 관련 단원 비교 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3), 769-788.

신재은(2005). **초등학생을 위한 비 개념 지도 방안**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이용률(2010). **초등학교 수학의 중요한 지도 내용**. 서울: 경문사.

장혜원(2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의. **학교수학, 4**(4), 633-642.

정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

정은실(2010). 초등학교 수학 교과에서의 비례

추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

홍갑주(2013). 초등학교 2007 개정 교과서 비와 비율 관련 용어에 대한 고찰. **수학교육학연구, 23**(2), 285-295.

杉山吉茂 外 (2004). **新しい算數6上**. 東京: 東京書籍.

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in Terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Common Core Standards Writing Team (2011). *Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft): 6-7, Ratio and proportional relationships.* https://commoncoretools.files.wordpress.com/2012/02/ccss_progression_rp_67_2011_11_12_corrected.pdf

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). *Using the double number line to model multiplication.* Paper presented at Seventh Annual Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Poland.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education (BCME8)* (pp. 231-238). BSRLM: University of Nottingham.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitzing and norming. In G. Harel, & J. Confrel (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany: State University of New York press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems on representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(5), 381-403. doi:10.1007/s10857-012-9218-z.

Teppo, A & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM Mathematics Education, 46*(1), 45-58. doi: 10.1007/s11858-013-0518-2.

Visual Representations for Improving Proportional Reasoning in Solving Word Problems

Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)
Lee, Hyung Sook (Eastern Washington University)

There has been a recurring call for using visual representations in textbooks to improve the teaching and learning of proportional reasoning. However, the quantity as well as quality of visual representations used in textbooks is still very limited. In this article, we analyzed visual representations presented in a Grade 6 textbook from two perspectives of proportional reasoning, multiple-batches perspective and variable-parts perspective, and discussed the potential of the double number line and the double tape diagram to help develop the idea 'things covary while something stays the same,' which is critical to reason proportionally. We also classified situations that require proportional reasoning into five categories and provided ways of using the double number line and the double tape diagram for each category.

* Key Words : Proportion(비례), Proportional Reasoning(비례 추론), Visual Representation(시각적 표상), Double Number Line(이중수직선), Double Tape Diagram(이중테이프)

논문접수 : 2015. 4. 8
논문수정 : 2015. 5. 7
심사완료 : 2015. 5. 7