대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 2, 177 ~ 188. May 2015

수학사에 기초한 벡터의 내적과 외적의 연결

오 택 근*

본 논문은 평면과 공간에서 두 벡터의 곱에 대한 역사적 발달 과정을 살펴보고, 이를 바탕으로 벡터의 내적과 외적을 연결하기 위한 교육적 시사점을 도출하였다. 역사적 분석의 결과, 평면에서 방향이 다른 두 선분의 곱을 정의하려는 노력은 두 선분의 길이의 곱과 방향각의 합이라는 기하학적 의미와 함께 복소수의 연산 규칙을 확립함으로써 복소수를 수학적 대상으로 승인하는 계기를 제공하였음을 확인하였다. 또한 3차원 공간에서 방향이 다른 두 선분의 곱을 정의하려는 노력은 사원수의 도입을 이끌었으며, 사원수의 곱으로 나타나는 실수부분과 벡터부분이 각각 벡터의 내적과 외적의 현대적인 정의로 발전하였음을 확인하였다. 이러한 분석 결과를 토대로 기하학적 관점에서 벡터의 내적과 외적을 각각 다른 방식으로 정의하여 서로 관련이 없는 것으로 인식하도록 만드는 현재의 전개방식에 대해 반성하고, 이 두 곱을 연결시키기 위한 한 가지 방안을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

17세기 말부터 힘이나 속도와 같이 크기와 방향을 갖는 대상을 벡터 개념으로 정립하기 시작하였고, 18세기부터 많은 수학자들은 벡터 사이의 연산을 탐구하기 시작하였다. 예를 들면, 두 벡터의 합은 두 벡터를 변으로 하는 평행사변형의 네 번째 꼭짓점으로 표현된다는 평행사변형 법칙을 통해 정의될 수 있다(이희정, 신경희, 2013). 그러나 두 벡터의 곱—즉, 서로 방향이 다른 두 선분의 곱—을 정의하는 것은 쉬운 일이 아니었다. 실제로 평면에서 두 유향선분의 합과 곱의 정의를 확립하는 과정은 궤변적인 대상으로 인식되어 오던 허수를 수학적인 대상으로 받아들이는 계기를 제공하였다(이동환, 2012). 이와 같이 19세기 중반에 이루어진 벡터 해석학의 발달은 수학을 비롯하여 물리학, 공학, 천문학 등 다양한 학분 분야의 혁명적인 진보를 이끌어내었다(Crowe, 1967). 벡터 및 벡터의 연산 개념의 발달로 인해 평면이나 공간, 나아가 4차원 이상의 대상을 수학적 대상으로 간주하여 계산을 수행할 수 있게 되었고, 그 결과 공간에서의 운동이나 복잡한 현상을 수학적으로 이해할 수 있게 된 것이다.

벡터를 다루는 방식은 크게 세 가지로 구분할 수 있다(Sierpinska, 2002). 첫째, 벡터를 유향선분으로 표현하는 기하학적 접근이다. 둘째, 유향선분을 좌표평면에 나타내고, 위치벡터를 사용하여 성분으로 표현하는 산술적 접근 방법이다. 마지막으로 체 F에 대하여 특정한 대수적 성질을 만족시키는 집합 V를 벡터공간으로 정의하고, 집합 V의 원소를 벡터로 정의하는 추상적이고 구조적인 공리체계를 따르는 접근 방법이다. 두 번째와 세 번째는 각각 산술적 관점과 구조적 관점으로 구분되지만, 모두 대수적 접근으로 포괄할 수 있다(Sierpinska, 2002).

Harel(1990)과 Sierpinska(2002)는 학생들이 벡터

* 경기과학고등학교, tech0523@snu.ac.kr

개념을 이해하기 위해서는 기하학적 사고에서 시작하여 분석-산술적 사고를 거쳐, 분석-구조적 사고로 진행할 수 있도록 점진적 추상화 방식을 따르는 교수 계열을 구성할 것을 강조하였다. 우리나라의 고등학교 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)을 반영한 교과서에서는 벡터 개념을 도입하고 벡터의 연산을 정의하는 과정에서 유향선분을 사용한 기하학적 접근을 취하고 있으며, 그 이후에 유향선분을 위치벡터로 변환하여 좌표의 성분을 이용하여 나타내는 방법을 소개하며 대수적 정의로 확장해나가는 접근을 따르고 있다(이준열 외 9인, 2014; 황선욱 외 10인, 2014). Sierpinska(2002)의 관점에서 본다면, 기하학적 대상으로서 유향선분을 사용하여 벡터의 개념을 도입하고, 이를 좌표평면이나 좌표공간에서 위치벡터로 변환하여 다루는 방식은 자연스러운 구성이라고 할 수 있다. 그러나 두 유향선분의 곱에 해당하는 두 벡터의 내적과 외적의 정의를 기하학적 관점에서 도입하고, 그것을 성분으로 변환함으로써 대수적인 정의를 유도하는 접근 방식은 벡터의 내적과 외적의 대수적 표현이 갖는 본질을 이해하는 데에 어려움을 준다. 또한 기하학적 접근에 따라 벡터의 내적과 외적을 분리하여 다루는 것은 이 두 곱이 서로 관련이 없는 것으로 인식하게 만든다.

벡터 지도에 관한 연구에서는 대수적 접근과 기하학적 접근 중 하나에 초점을 두거나 이 둘의 자연스러운 연결을 강조한다(이지현, 홍갑주, 2008; 이윤수, 2009; Sierpinska, 2002). 그러나 벡터의 연산, 특히 벡터의 내적과 외적에 대하여 대수적 관점과 기하학적 관점을 연결하기 위한 방안에 대한 연구는 부족하다. 이를 위해서는 벡터의 내적과 외적의 정의에 대한 역사를 살펴볼 필요가 있다. 즉, 벡터의 내적과 외적이 역사적으로 어떻게 확립되어 왔으며, 그것을 현재 다루어지고 있는 방식과 어떻게 연결할 수 있는지 연구할 필요가 있다.

벡터 및 벡터의 연산의 역사적 발달 과정을 분석하는 것과 같이, 특정한 수학적 주제에 대한 역사적 발달 과정을 파악하고 그 흐름을 이해하는 것은 실제로 다루어지는 내용을 보다 잘 이해하는 데에 도움이 된다(우정호 외 5인, 2006). 특히 어떤 수학적 개념과 관련된 기호 및 그 개념 자체의 발생과 변화 과정을 파악하는 것은 단순히 해당 개념 뿐 아니라 일반적인 수학적 지식의 발달 과정을 이해하는 데에도 도움이 된다(이동환, 2012). 또한 정연준(2011)에 따르면, 특정한 수학적 계산 방법에 대한 역사적 분석은 그 내용을 잘 이해하는 데에 도움을 줄 뿐 아니라, 그 내용과 관련되어 학교수학에서 제시되고 있는 지식들을 수학적 사고의 형성이라는 관점에서 재해석할 수 있는 틀을 이끌어낼 수 있다(p. 268).

본 논문에서는 이러한 관점에서 평면과 공간에서 두 유향선분의 곱의 정의에 대한 역사적 발달 과정을 분석한다. 즉 역사적으로 벡터의 곱을 정의하는 과정에서 발달한 복소수와 사원수의 곱의 대수적 정의에 내재된 기하학적 의미를 구체화한다. 이를 토대로 벡터의 내적과 외적을 연결하는 방안을 도출함으로써, 이 두 곱을 분리하여 다루고 있는 현재의 교육과정에 대해 반성적으로 검토할 필요가 있다는 시사점을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 평면과 공간에서 유향선분의 곱에 대한 역사적 발달과정

1. 평면에서 두 유향선분의 곱과 복소수의 승인

수학의 역사에서 음수나 무리수를 수학적인

대상으로 승인하는 과정이 쉽지 않았던 것과 마찬가지로, $\sqrt{-1}$ 또는 허수단위 i로 대표되는 음수의 제곱근을 수학적인 대상으로 승인하기까지는 상당한 시간과 노력이 필요했다(이동환, 2012; Crowe, 1967). 음수의 제곱근과 관련된 표현 및 기호는 고대 그리스 시대에서부터 언급되기 시작하였으며, 16세기에는 이탈리아의 수학자 Cardano에 의해 구체적인 계산에서 사용된 흔적이 발견되었다(Boyer & Merzbach, 2000; Cardano, 1993). Cardano는 합이 10이고 곱이 40이 되는 두 수를 구하는 풀이과정에서, 실근을 가지는 이차방정식의 두 근을 구하는 절차와 동일한 계산 방법을 적용하여 $5+\sqrt{-15}$와 $5-\sqrt{-15}$로 표현되는 수를 언급하였다. 물론 그는 이러한 수를 "쓸모없을 뿐만 아니라 이해하기도 어렵다"라고 거부하며 수학적 대상으로 간주하지는 않았다 (Boyer & Merzbach, 2000). 그러나 연속성의 원리에 입각하여 궤변적인 수인 $\sqrt{-15}$에 실수의 연산 규칙을 그대로 적용하였던 것이다(이동환, 2012). 이와 같이 방정식의 계산 과정에서 음수의 제곱근이 사용되었음에도 불구하고 19세기까지 많은 수학자들은 0보다 크지도 않고 작지도 않으며, 그렇다고 0도 아닌 수를 수학적인 대상으로 인정하길 거부하였다. 1831년 Gauss가 복소수의 기하학적 표현을 제시하면서부터 비로소 널리 인정받게 된 것이다(Crowe, 1967).

물론 복소수의 기하학적 표현을 Gauss가 처음 만든 것은 아니다. 물리학에서 유향선분으로 크기와 방향을 갖는 양을 표현하는 방법이 발달하기 시작하여 평행사변형 법칙으로 두 벡터의 합을 설명하는 방식이 17세기 말에 정립되었고, 18세기 후반부터는 일부 수학자들에 의해 복소수의 기하학적 표현과 벡터를 결부시키려는 노력이 시작하였다(이희정, 신경희, 2013). 예를 들어 1797년 Wessel은 길이와 방향을 대수적으로 표현하고, 이들 사이의 합과 곱을 계산하는 방법에 대해 언급하고 있다.

> 이것은 다음 질문을 다루려는 시도이다: 어떻게 방향을 해석적으로 표현할 것인가? 즉 수직인 직선을 어떻게 표현할 것인가? 하나의 등식에서 알려진 직선과 알려지지 않은 직선의 길이와 방향을 모두 표현할 수 있는가? (Wessel; Crowe(1967), p. 6에서 재인용)

음수의 제곱근이 나타나기 전까지 다루어 왔던 수학적인 대상인 실수는 그 초점이 크기였다. 즉 크기를 수로 나타내고 그 결과에 대한 대소관계를 비교할 수 있어야만 했다. 이에 반해 Wessel은 크기와 함께 방향까지 수학적인 대상으로 간주하고 이를 표현하기 위해 노력한 것이다. 크기와 방향을 모두 나타내기 위해서는 평면이라는 기하학적 대상을 활용할 필요가 있었으며, 평면 위의 모든 방향을 나타낼 수 있는 수로서 복소수를 수학적 대상으로 받아들인 것이다. Wessel은 평면상에서 한 벡터의 끝점에 다른 벡터의 시작점을 일치시킴으로서 오늘날 평행사변형 법칙이라고 부르는 방식으로 두 벡터의 합을 정의하였으며, 평면에서 두 유향선분의 곱을 정의하기 위하여 다음과 같은 설명을 제시하였다.

> $+1$을 양의 실수 방향의 단위 선분, $+\epsilon$을 양의 실수방향에 수직이면서 같은 시점을 가지는 단위 선분이라고 하자: 그러면 $+1$의 방향각은 0°, -1의 방향각은 180°이고, $+\epsilon$의 방향각은 90°, $-\epsilon$의 방향각은 -90° 또는 270°가 될 것이다. 곱의 방향각이 각 성분의 방향각의 합이라는 규칙에 의해 우리는 다음 결과를 얻을 수 있다.
> $(+1)(+1)=+1, (+1)(-1)=-1, (-1)(-1)=+1,$
> $(+1)(+\epsilon)=+\epsilon, (+1)(-\epsilon)=-\epsilon,\ (-1)(+\epsilon)=-\epsilon,$
> $(-1)(-\epsilon)=+\epsilon, (+\epsilon)(+\epsilon)=-1,\ (+\epsilon)(-\epsilon)=+1,$
> $(-\epsilon)(-\epsilon)=-1$
> 이로부터 ϵ은 $\sqrt{-1}$과 같음을 알 수 있다; 그

리고 이 곱셈의 다양한 결과는 상식적인 연산의 규칙도 위반하지 않고 결정된다는 것을 알 수 있다. (Wessel; Crowe(1967), p. 7에서 재인용)

위 인용문에서 Wessel은 평면을 생성하는 수직인 두 방향의 단위 벡터를 $+1$과 $+\epsilon$로 명명하고, 이를 각각 양의 실수 방향과 양의 실수에 수직인 방향으로 정의하고 있다. 또한 평면에서 두 유향선분의 곱이 각 선분의 길이의 곱과 방향각의 합으로 생성되는 유향선분이 됨을 언급하고 있다.

두 유향선분의 곱에 대한 Wessel의 정의를 현대적인 기호로 다음과 같이 해석할 수 있다. 즉 평면의 두 유향선분을 복소수 z_1과 z_2로 간주하고, 이를 그 크기와 방향을 이용하여 다음과 같이 극형식으로 나타낼 수 있다.

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

이제 두 유향선분의 곱은 두 복소수 z_1과 z_2의 곱으로 생각할 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$z_1 \times z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \times (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

이는 복소평면에서 복소수의 절댓값과 편각을 이용하여 두 복소수의 곱을 기하학적으로 설명하는 것과 일치한다.

한편, Wessel은 임의의 복소수를 양의 실수 방향과 그에 수직인 방향의 단위 벡터로 분해할 수 있다는 점에 착안하여, 단위벡터 $+1$, -1, $+\epsilon$, $-\epsilon$ 사이의 곱을 정의하는 규칙을 제시함으로써, 임의의 두 복소수의 곱을 대수적으로 정의할 수 있는 기반을 제공하였다. 특히 앞의 인용문에서 제시한 규칙을 따르는 계산 방식이 상식적인 연산 규칙을 위반하지 않는다는 Wessel의 언급을 통해, 평면에서 두 유향선분을 표상으로 갖는 대수적 대상들 사이의 곱을 정의함에 있어서 기존의 대수적 대상인 실수에서의 연산 규칙이 중요하게 고려되고 있음을 확인할 수 있다.

2. 공간에서 두 유향선분의 곱과 사원수의 출현

평면의 유향선분이라는 복소수의 기하학적 표상을 갖게 되면서 19세기 초반 수학자들은 삼차원 공간의 유향선분을 기하학적 표상으로 갖는 대수적 대상을 찾는 데 관심을 갖게 된다(Cajori, 1928). 복소수의 승인 과정에서 중요하게 고려되었던 연속성의 원리—'특정 경우나 대상에서 성립하는 성질이 그와 비슷해 보이는 다른 경우나 대상에서도 성립한다는 주장'(이동환, 2014: 68)—에 입각하여 Wessel은 평면에서의 아이디어를 공간으로 확장하려고 시도하였다. 즉, 양의 실수 방향과 그에 수직인 방향의 단위벡터로 평면을 생성하였던 아이디어를 확장하여, 그 두 벡터에 동시에 수직인 방향의 단위벡터를 공간에 추가함으로써 삼차원 공간의 유향선분을 대수적으로 표현할 수 있다고 생각하였다. 그 결과 반지름이 1인 구의 중심을 시점으로 하는 서로 수직인 세 방향의 단위벡터를 각각 1, η, ϵ로 표현하고[1], 공간상의 임의의 점을 삼원수 $x + \eta y + \epsilon z$로 나타내었다(Crowe, 1967). 이렇게 표현된 삼원수의 합은 연속성의 원리를 따르며 기하학적으로 평행사변형 법칙을 만족하고, 대수적으로도 대응하

1) 원문에서는 구의 반지름을 r로 제시하고, 서로 수직인 세 방향의 벡터를 각각 r, ϵr, ηr로 나타내었으나 가독성을 위해 본 논문에서는 반지름이 1인 구로 바꾸어 표현하였다. 여기서 ϵ과 η는 각각 $\epsilon\epsilon = -1$ $\eta\eta = -1$을 만족한다.

는 두 벡터의 성분의 합으로 자연스럽게 확장되었다. 그러나 삼원수의 곱은 연속성의 원리를 만족하면서 정의되기 어려웠다. Wessel은 평면에서 두 유향선분의 크기의 곱과 방향각의 합으로 곱을 정의했던 것에 착안하여, 삼원수의 곱을 정의하려고 시도하였다. 그는 두 삼원수 w_1과 w_2의 곱 $w_1 \times w_2$을 w_2에 수직인 방향[2]을 회전축으로 하여 w_2의 방향각만큼 w_1을 회전하고, w_1과 w_2의 크기를 곱하여 얻어지는 유향선분으로 결정하는 방법을 제시하였다(Crowe, 1967).

Wessel이 제시한 방법에 따라 두 삼원수 $w_1 = x + \eta y + \epsilon z$과 $w_2 = (\cos u) + \epsilon(\sin u)$의 곱 $w_1 \times w_2$을 실수 및 평면벡터를 곱하는 과정에서 성립하였던 분배법칙을 적용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_1 \times w_2 &= (x + \eta y + \epsilon z) \times (\cos u + \epsilon \sin u) \\ &= \quad x \times (\cos u + \epsilon \sin u) \\ &\quad + \eta y \times (\cos u + \epsilon \sin u) \\ &\quad + \epsilon z \times (\cos u + \epsilon \sin u) \end{aligned}$$

Wessel은 $w_2 = (\cos u) + \epsilon(\sin u)$에 수직인 방향을 η로 간주하였다(각주2) 참고). 특히 위 식에서 ηy는 η와 같은 축 상에 있으므로 η를 회전축으로 방향각 u만큼 회전시켜도 변화가 없다. 따라서 $\epsilon^2 = -1$라는 규칙과 교환법칙을 적용하면, $w_1 \times w_2$는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & w_1 \times w_2 \\ &= (x \cos u - z \sin u) + \eta y + \epsilon(x \sin u + z \cos u) \end{aligned}$$

w_1에 $w_3 = (\cos u) + \eta(\sin u)$를 곱하는 것은 위와 같은 방식으로 w_3에 수직인 방향인 ϵ을 회전축으로 w_3의 방향각 u만큼 회전하는 것으로 설명할 수 있다. 그러나 이러한 방법으로는 w_1에 $w_4 = \eta(\cos u) + \epsilon(\sin u)$을 곱하는 것—즉, 실수 방향을 축으로 회전하는 것—을 설명할 수 없다.

Wessel이 고안한 방법을 임의의 두 삼원수의 곱에 적용하기 위해서는 η와 ϵ의 곱인 $\eta\epsilon$과 $\epsilon\eta$을 정의해야 한다. 이 때, $\eta\epsilon$과 $\epsilon\eta$을 같다고 정의하면 모순이 발생한다. 따라서 공간에서 두 유향선분의 곱을 잘 정의하기 위해서는 실수 혹은 평면의 유향선분 사이의 곱에서 유지되어 오던 교환법칙이라는 상식적인 규칙을 포기해야 한다. 결국 복소수를 나타내는 평면에 수직인 방향의 단위벡터를 추가하고, 연속성의 원리에 입각하여 평면에서 공간으로 확장된 두 유향선분의 곱을 정의하려는 Wessel의 시도는 실패에 봉착하였다.

Wessel의 실패에도 불구하고 복소수의 곱셈 규칙을 확장하여 공간에서의 두 유향선분의 곱을 정의하려는 수학자들의 노력은 지속적으로 이어졌고, 이는 Hamilton이 사원수를 발견할 수 있는 토대를 확립해 주었다(Crowe, 1967). Hamilton은 Wessel의 아이디어와 마찬가지로, 공간에서 서로 수직인 세 방향의 단위 벡터를 1, i, j로 간주하고 삼원수를 사용하여 삼차원 공간의 대수화를 시도하였지만, 삼원수의 곱을 제대로 설명할 수 없었다(Boyer & Merzbach, 2000; Cajori, 1929; Crowe, 1967).

이상에서 살펴본 바와 같이 공간에서 두 유향선분의 곱을 정의하려는 Wessel과 Hamilton의 초기의 시도를 통해, 복소수의 승인을 가져왔던 평면벡터를 곱하는 방식이 공간벡터의 곱을 정의하는 데에 장애가 되고 있다는 것을 확인할 수

---

2) w_2는 공간의 유향선분이므로 w_2에 수직인 방향은 공간에서 w_2를 법선벡터로 갖는 평면과 나란한 모든 방향이 될 수 있다. 그러나 Wessel은 w_2가 $x + \eta y$(단, x, y는 실수)인 경우, w_2가 1과 η에 의해 생성되는 평면상에 있는 것으로 간주하여, w_2에 수직인 방향을 1과 η에 모두 수직인 방향이라고 생각한 것으로 보인다.

있다. 이는 Bachelard가 언급한 '인식론적 장애'(이종희, 1999: 134-135)가 벡터의 곱을 정의하는 수학의 역사에서도 나타나고 있음을 보여준다.

한편, Hamilton은 공간에서 두 유향선분의 곱을 정의하기 위한 지속적인 노력 끝에, 1853년 독창적인 아이디어를 제시하였다. 삼원수 대신 사원수를 사용하여 공간을 표현하고, 교환법칙을 버린다면 공간의 유향선분의 곱을 정의할 수 있다고 생각한 것이다(Boyer & Merzbach, 2000). 즉, 삼차원 공간에서 서로 수직인 세 방향의 단위벡터를 각각 허수를 의미하는 i, j, k 로 표현하고, 이들을 곱하는 규칙을 다음과 같이 제시하였다(Boyer & Merzbach, 2000; Crowe, 1967).

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$
$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$$

Hamilton이 제시한 연산 규칙의 특징은 다음과 같다. 먼저 평면에서 실수에 수직인 방향의 단위벡터 ϵ로 표상되는 허수단위의 성질인 $\epsilon^2=-1$이 공간에서 서로 수직인 세 단위벡터 i, j, k에 적용되고 있다는 점이다. Boyer & Merzbach(2000)은 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$이라는 규칙은 그 당시 너무나 분명하게 받아들이고 있었던 규칙이라고 언급하였다. 이러한 사실은 공간에서 유향선분의 곱을 정의하려는 Hamilton의 시도가 복소수를 사용하여 평면을 대수화하였던 Wessel의 아이디어에 기반하고 있는 것으로 연속성의 원리가 작동하고 있음을 보여준다.

다음으로 i, j, k 중 서로 수직인 방향의 두 단위벡터 사이의 곱에서 교환법칙이 성립하지 않는다는 것이다. 이는 실수 및 평면벡터에서의 곱을 정의할 때는 생각할 수 없었던 것으로 기존의 연산 규칙을 위반하는 중요한 변화이다. 즉 공간벡터를 대수적 대상으로 승인하기 위해서 상식으로 간주되었던 곱셈에 관한 교환법칙을 포기해야만 했던 것이다. 이러한 사실로부터 기존의 연산 규칙을 그대로 적용하는 연속성의 원리만으로는 새로운 수학적 대상을 적절히 설명하기 어려우며, 기존의 규칙에서 벗어나는 독창적인 시각이 요구된다는 점도 확인할 수 있다. Boyer & Merzbach(2000)은 Hamilton이 곱셈의 교환법칙이라는 공준을 버림으로써, 이른바 기본법칙에 의해 주어지는 제약을 만족시킬 필요가 없는 대수학을 확립하는 엄청난 자유를 수학자들이 누릴 수 있도록 공헌하였다고 언급하였다(pp. 947-948).

Hamilton이 고안한 사원수는 실수와 i, j, k 를 사용하여 $q = w + \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z$의 꼴로 표현된다. 한편, 3차원 공간의 유향선분을 사원수로 나타내면 $\rho = \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z$의 꼴, 즉 실수부분이 0인 사원수이다. i, j, k 사이의 곱셈 규칙에 따라 3차원 공간의 유향선분을 나타내는 두 사원수 $\rho_1 = \mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}y_1 + \mathrm{k}z_1$과 $\rho_2 = \mathrm{i}x_2 + \mathrm{j}y_2 + \mathrm{k}z_2$의 곱 $\rho_1\rho_2$을 계산하면 실수부분이 0이 아닌 일반적인 사원수가 된다. 즉 아래에서 살펴보는 바와 같이 3차원 공간의 두 유향선분의 곱인 $\rho_1\rho_2$가 3차원을 벗어나 4차원으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}y_1 + \mathrm{k}z_1)(\mathrm{i}x_2 + \mathrm{j}y_2 + \mathrm{k}z_2) \\
&= \mathrm{i}^2 x_1x_2 + \mathrm{ij}\, x_1y_2 + \mathrm{ik}\, x_1z_2 \\
&\quad + \mathrm{ji}\, y_1x_2 + \mathrm{j}^2\, y_1y_2 + \mathrm{jk}\, y_1z_2 \\
&\quad + \mathrm{ki}\, z_1x_2 + \mathrm{kj}\, z_1y_2 + \mathrm{k}^2\, z_1z_2 \\
&= \underbrace{-(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}_{S_{\rho_1\rho_2}} \\
&\quad \underbrace{+\mathrm{i}(y_1z_2 - z_1y_2) + \mathrm{j}(z_1x_2 - x_1z_2) + \mathrm{k}(x_1y_2 - y_1x_2)}_{V_{\rho_1\rho_2}}
\end{aligned}$$

Hamilton은 위의 계산 결과에서 $S_{\rho_1\rho_2}$과 $V_{\rho_1\rho_2}$을 각각 $\rho_1\rho_2$의 실수부분과 벡터부분이라고 언급하였지만, 이 둘을 서로 다른 종류의 곱으로 간주하지는 않았다. 이와 달리 Grassmann은 $S_{\rho_1\rho_2}$과 $V_{\rho_1\rho_2}$을 각각 "내적(internal product)"과 "외적

(external product)"이라는 서로 다른 종류의 곱으로 구분하였다(Boyer & Merzbach, 2000). 사원수의 곱으로 나타나는 실수부분과 벡터부분을 서로 다른 곱으로 구분하는 Grassmann의 시도는 3차원 공간 내에서 두 벡터의 곱을 설명하려는 의도로 보인다. 또한 Grassmann은 공간에서 서로 수직인 단위벡터를 i, j, k 대신에 e_1, e_2, e_3와 같이 숫자가 포함된 첨자로 표현함으로써 벡터 공간을 일반적인 n차원으로 확장할 수 있게 하였다(이희정, 신경희, 2013; Boyer & Merzbach, 2000). 한편, Gibbs는 Hamilton과 Grassmann의 표기 및 아이디어를 결합하여 삼차원 공간의 두 벡터 $\rho_1 = \mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}y_1 + \mathrm{k}z_1$과 $\rho_2 = \mathrm{i}x_2 + \mathrm{j}y_2 + \mathrm{k}z_2$에 대한 내적과 외적을 각각 기호 "·"과 ×"을 사용하여 $\rho_1 \cdot \rho_2$과 $\rho_1 \times \rho_2$로 표기하고 다음과 같이 정의하였다(Cajori, 1929).

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$
$$\begin{aligned}\rho_1 \times \rho_2 = \ & \mathrm{i}(y_1z_2 - z_1y_2) \\ & + \mathrm{j}(z_1x_2 - x_1z_2) \\ & + \mathrm{k}(x_1y_2 - y_1x_2)\end{aligned}$$

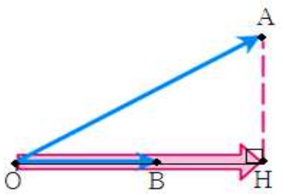
Gibbs가 제시한 위의 정의는 현대 수학에서 사용하는 벡터의 내적과 외적의 정의와 동일하다.

이상에서 살펴본 바와 같이 3차원 공간에서 두 벡터의 내적과 외적은 Hamilton에 의해 제시된 사원수의 곱의 실수부분과 벡터부분에서 비롯된 결과로서 서로 무관하지 않음을 확인할 수 있다. 특히 벡터의 내적은 서로 같은 방향의 선분들을 곱한 결과로 Hamilton이 제시한 규칙 중 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$이라는 사실에 의해 결정되며, 벡터의 외적은 서로 수직인 방향의 선분들을 곱한 결과로 $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$라는 규칙에 의해 결정된다.

Ⅲ. 벡터의 내적과 외적의 연결

1. 현대 교과서에서 벡터의 내적과 외적의 전개방식

우리나라의 고등학교 교과서에서는 일(work)의 양을 구하는 상황에서 벡터의 내적 개념을 도입하고 있다. 실제로 물리학에서 일은 물체의 이동방향으로 작용한 힘의 크기에 실제로 물체가 이동한 거리의 곱으로 정의된다.



[그림 Ⅲ-1] 벡터의 내적

따라서 [그림 Ⅲ-1]에서와 같이 점 O에 있던 물체에 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 힘을 가한 결과 물체가 B로 이동하였다면, 이 때 작용한 일은 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$의 크기의 곱과 같다. 따라서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 두 벡터의 내적의 정의는 다음과 같다(이준열 외 9인, 2014; 황선욱 외 10인, 2014).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

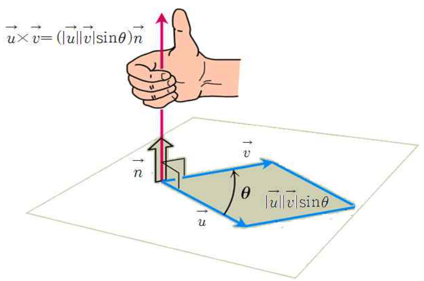
우리나라의 교육과정에서는 이러한 기하학적 정의를 토대로 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 위치벡터의 각 성분을 사용하여 벡터의 내적의 대수적 정의를 유도하고 있다(이준열 외 9인, 2014; 황선욱 외 10인, 2014).

평면의 두 벡터 $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$에 대하

여 $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$.

공간의 두 벡터 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$에 대하여 $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$.

한편, 벡터의 외적은 3차원 공간에서만 정의되는 연산으로, 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 외적($\vec{u}\times\vec{v}$)이란 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 만드는 평행사변형의 넓이를 성분으로 하고, 그 평행사변형이 포함된 면에 수직—즉, $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 동시에 수직—인 방향 중에서 오른 나사의 법칙에 따라 정해지는 방향을 갖는 벡터로 정의된다(Thomas at el., 2010).



[그림 Ⅲ-2] 벡터의 외적

[그림 Ⅲ-2]에서와 같이 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 만드는 평행사변형의 넓이는 $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$이므로, 오른 나사의 법칙에 따라 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 동시에 수직인 방향을 $\vec{n}$이라 하면, 두 벡터의 외적은 다음과 같이 기호로 나타낼 수 있다.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)\vec{n}$$

이러한 정의에 따라 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 동시에 수직인 벡터의 방향 $\vec{n}$을 구하면, 수직인 두 벡터의 내적은 0이므로 $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$와 $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$을 이용하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\vec{n}=\frac{(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)}{\|(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)\|}$$

이때 $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$의 값이 $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$임을 이용하면, 두 벡터의 외적에 대한 기하학적 정의를 다음과 같이 대수적 정의로 변형할 수 있다.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$$

이상에서 살펴 본 교과서의 전개 방식에 따르면, 두 벡터의 내적과 외적의 대수적 정의는 그 자체로 정의라기보다는 내적과 외적의 기하학적 정의를 기반으로 유도해 낸 정리와 같은 성격을 갖고 있다. 따라서 벡터의 내적과 외적의 대수적 정의가 어떤 의미를 갖는지, 그리고 두 벡터의 곱을 왜 그러한 방식으로 정의했는지에 대해 이해하기 어렵다. 나아가 기하학적 관점으로 두 벡터의 내적과 외적을 정의하는 것은 이 두 곱셈 방법이 서로 어떤 연관이 있는지 파악하기 어렵게 만들고 있다.

2. 벡터의 내적과 외적을 연결한 전개방식

Hamilton이 고안한 사원수의 곱의 실수부분과 벡터부분이 각각 벡터의 내적과 외적으로 발달하였다는 사실로부터 3차원 공간에서 두 벡터의 내적과 외적을 서로 연결하여 다룰 수 있는 한 가지 방안을 도출할 수 있다. 즉, 방향이 다른 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$에 대하여 내적 $\vec{u}\cdot\vec{v}$와 외적 $\vec{u}\times\vec{v}$는 다음과 같이 서로 연결하여 다룰 수 있다.

먼저 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 만드는 평면에서 $\vec{u}$를 서로 수직인 두 방향의 벡터로 분해한다. 이 중 한 방향을 $\vec{v}$와 같은 방향으로 정하면, $\vec{u}$는 $\vec{v}$방향으로 정사영하여 얻은 벡터($proj_{\vec{v}}(\vec{u})$)와 $\vec{v}$에 수직인

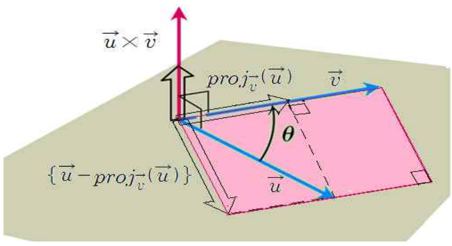
벡터$(\vec{u}-proj_{\vec{v}}(\vec{u}))$로 다음과 같이 분해된다.

$$\vec{u}=\underbrace{proj_{\vec{v}}(\vec{u})}_{\vec{v}\text{와 방향이 같은 벡터}}+\underbrace{\{\vec{u}-proj_{\vec{v}}(\vec{u})\}}_{\vec{v}\text{와 수직인 벡터}}$$

이제 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 곱은 서로 방향이 같은 벡터의 곱과 서로 수직인 벡터의 곱으로 분해할 수 있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다[3].

$$\vec{u}*\vec{v}=\underbrace{proj_{\vec{v}}(\vec{u})*\vec{v}}_{\text{같은 방향의 곱}}+\underbrace{\{\vec{u}-proj_{\vec{v}}(\vec{u})\}*\vec{v}}_{\text{수직인 방향의 곱}}$$

위의 식에서 서로 방향이 같은 벡터의 곱으로 표현된 $proj_{\vec{v}}(\vec{u})*\vec{v}$은 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 내적 $\vec{u}\cdot\vec{v}$이며, 서로 수직인 벡터의 곱으로 표현된 $\{\vec{u}-proj_{\vec{v}}(\vec{u})\}*\vec{v}$은 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$의 외적 $\vec{u}\times\vec{v}$이다. 이 과정을 기하학적으로 나타내면 [그림 Ⅲ-3]과 같다.



[그림 Ⅲ-3] 벡터의 내적과 외적의 연결

[그림 Ⅲ-3]에서 두 벡터의 내적은 방향이 같은 두 선분의 길이의 곱이므로, 그 결과는 실수이다. 또한 두 벡터의 외적은 서로 수직인 방향의 선분들 사이의 곱이므로, 수직인 두 선분을 변으로 하는 직사각형의 넓이를 나타낸다. 이것은 Hamilton이 공간에서 서로 수직인 단위 벡터인 i, j, k 들 사이의 곱을 두 수직인 방향이 만드는 평면에 수직인 방향의 단위 벡터로 정의한 것과 부합한다. 즉, $i^2=j^2=k^2=-1$은 방향이 같은 두 벡터의 곱인 내적의 정의와 연결되며, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$는 서로 수직인 두 벡터의 곱인 외적의 정의와 연결된다. 한편 실수배의 성질에 따라 $(xi)(yj)=xyij=xyk$가 되는데, 이는 서로 수직인 두 벡터 xi와 yj의 크기와 각각 길이가 같은 변을 갖는 직사각형의 넓이를 크기로 갖고 방향이 k인 벡터가 된다는 외적의 기하학적 의미를 내포하고 있다.

이와 같이 한 벡터를 다른 벡터에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해하여 곱하는 것을 각각 벡터의 내적과 외적으로 정의하는 방식은 사원수의 곱의 실수부분과 벡터부분에서 벡터의 내적과 외적이 비롯되었다는 것을 반영한다. 또한 내적과 외적이 서로 무관한 곱이 아니며 공간에서 두 벡터의 곱을 대수적으로 정의하는 역사적인 과정과 관련지어 통합적으로 다룰 수 있게 해 줌으로써 내적과 외적에 대한 이해를 풍부히 하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결론 및 논의

평면에서 두 유향선분의 곱을 정의하는 과정에서 오랜 기간 동안 수학적인 대상으로 받아들여지지 못했던 복소수가 승인될 수 있었다. 이를 기반으로 평면에서의 아이디어를 3차원 공간으로 확장하여 두 유향선분의 곱을 정의하려는 노력은 실패로 돌아갔다(Boyer & Merzbach, 2000). 그러나 그 과정에서 곱하는 순서를 바꾸면 부호가 반대가 된다는 규칙을 고안하여 곱셈의 교환

3) 이 식에서 두 벡터를 곱하는 기호로 '*'를 사용하였다. 이는 벡터의 내적과 외적을 표현하는 기호 '·'과 '×'와의 혼동을 피하기 위함이다.

법칙을 포기하는 독창적인 아이디어는 사원수의 발견으로 이어졌다. 나아가 사원수의 곱셈은 벡터의 내적과 외적이라는 개념의 기반을 제공하였다. Boyer & Merzbach(2000)는 교환법칙이 성립하지 않는 곱셈 규칙에 의해 창안된 사원수를 평행선 공준을 버리고 일관된 체계를 확립한 비유클리드 기하학의 탄생과 견주기도 하였다. Hamilton의 아이디어는 이후 Grassmann에 의해 계속적인 변화를 통해 새로운 대상으로 확장되고 일반화되어 추상적이고 구조적인 벡터공간의 일반화로 발전하였다(이희정, 신경희, 2013).

이처럼 평면과 공간에서 유향선분의 곱을 정의하는 역사적 발달 과정은 연속성의 원리(이동환, 2014)에 입각하여 기존의 연산 규칙을 새로운 대상에 확장하여 적용하는 과정인 동시에, 기존의 연산 규칙을 만족하지 않는 새로운 대상을 위해 상식으로 간주되어 오던 규칙의 포기 및 변형이라는 통념의 위반(이기돈, 최영기, 2014)을 통해 혁명적인 변화를 불러 온 과정이었다.

우리나라의 교과서에서 벡터의 내적은 기하학적 관점에 입각하여 정의된 후 위치벡터의 성분을 이용하여 대수적인 표현을 유도하는 방식으로 전개된다(이준열 외 9인, 2014; 황선욱 외 10인, 2014). 이러한 전개 방식은 Sierpinska(2002)가 제안한 벡터의 교수 계열을 잘 따르고 있는 것으로 보인다. 그러나 기하학적 관점에 따른 정의로부터 대수적 표현을 유도하는 방식은 내적의 대수적 정의가 갖는 본질을 충분히 이해하기에는 부족한 부분이 있다. 또한 벡터의 내적과 외적의 기하학적 정의는 이 두 곱에 서로 다른 별개의 곱으로 간주하게 만든다.

벡터의 내적과 외적이 처음부터 별개의 곱셈 방법으로 고려되어 발전한 것이 아니며, 공간에서 서로 수직인 세 단위벡터 i, j, k 의 곱셈 규칙에 따라 정의되는 사원수의 곱셈 계산 결과의 실수부분과 벡터부분이라는 사실에 비추어볼 때, 현재의 지도 방식을 재고할 필요가 있다. 즉 벡터의 내적과 외적을 서로 관련 지어 다룰 수 있는 적절한 방안이 요구된다. 물론 벡터의 외적은 다루지 않고 벡터의 내적만을 다루고 있는 현재 우리나라의 고등학교 교육과정을 고려할 때, 내적과 외적을 연결하여 학생들에게 제시하는 것이 쉬운 일은 아닐 것이다. 그러나 학생들을 가르치는 수학교사 혹은 대학에서 벡터의 내적과 외적을 함께 배우는 예비 수학교사들에게 이 두 곱을 통합적으로 제시하는 것은 '교수학적 내용지식'(Schulman, 1986)의 강화라는 측면에서 중요한 의의를 갖는다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 벡터를 서로 직교하는 성분으로 분해할 수 있다는 아이디어에 착안하여 같은 방향의 두 벡터의 곱과 수직인 방향을 갖는 두 벡터의 곱을 각각 내적과 외적으로 정의하는 방식을 제안하였다. 이는 Brousseau(2005)가 수학 교수학적 상황론에서 교수학의 본질로 강조한 바와 같이, 무질서하고 정돈되지 않은 수학적 지식의 발생과정을 논리적으로 구성하면서도 그것을 쉽게 이해하고 사용할 수 있도록 재구성하려는 노력이다. 이를 위해서는 수학적 개념의 역사적 발생과정과 논리적 전개과정을 적절히 조화시킬 필요가 있다. 물론 본 연구에서 제시한 방법이 벡터의 내적과 외적을 지도하는 가장 효율적인 방안이라고 보기는 어려울 것이다. 벡터의 내적과 외적의 역사 발생적 분석 및 기하학적 의미를 종합적으로 고려하여 보다 적절한 연결 방안을 모색함으로서, 이 개념을 학습하는 과정에서 보다 의미 있게 이해할 수 있는 데에 도움이 되는 연구가 필요할 것으로 보인다. 본 논문이 그러한 연구 흐름을 생성하는 데에 일조할 수 있기를 기대한다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정.** 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8].

김응태 · 박승안(1993). **선형대수학.** 청문각

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

이기돈 · 최영기(2014). 수학 내러티브의 교육적 활용. **수학교육학연구, 24**(3), 443-465.

이동환(2012). 복소수 개념의 발달과 교육적 함의. **한국수학사학회지, 25**(3), 53-75.

이동환(2014). 수학적 지식의 발달에서 연속성 원리와 역할. **한국수학사학회지, 27**(1), 67-79.

이윤수(2009). **벡터 개념의 지도에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

이종희(1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. **수학교육학연구, 9**(1), 133-150.

이준열 · 최부림 · 김동재 · 한대희 · 전용주 · 장희숙 · 조석연 · 조성철 · 황선미 · 박성훈(2014). **고등학교 기하와 벡터**. 서울: 천재교육.

이지현 · 홍갑주(2008). 교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성. **학교수학, 10**(4), 573-581.

이희정 · 신경희(2013). 그라스만의 수학 인식과 벡터공간의 일반화, **한국수학사학회지, 26**(4), 245-257.

정연준(2011). 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 13**(2), 267-286.

황선욱 · 강병개 · 김영록 · 윤갑진 · 김수영 · 송미현 · 이성원 · 도종훈 · 이문호 · 박효정 · 박진호(2014). **고등학교 기하와 벡터**. 서울: 좋은책 신사고.

Brousseau, G. (2005). The study of the didactical conditions of school learning in mathematics. In *Activity and Sign* (pp. 159-168). Springer US.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사 · 상.** 양영오 · 조윤동 (공역). 서울: 경문사.(영어 원작은 1991 년에 출판).

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations* (Vol. 1). Courier Corporation.

Cardano, G. (1993). *Ars magna or the rules of algebra.* Ed. R. T. Witmer. New York: Dover.

Crowe, M. J. (1967). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system.* University of Notre Dame Press.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(3), 387-392.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 4-14.

Sierpinska, A. (2002). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer Netherlands.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. R. (2010). *Thomas' calculus early transcendentals.* Seoul: Pearson.

Connecting the Inner and Outer Product of Vectors Based on the History of Mathematics

Oh, Taek-Keun (Gyeonggi Science High School for the Gifted)

In this paper, I investigated the historical development process for the product of two vectors in the plane and space, and draw implications for educational guidance to internal and external product of vectors based on it. The results of the historical analysis show that efforts to define the product of the two line segments having different direction in the plane justified the rules of complex algebraic calculations with its length of the product of their lengths and its direction of the sum of their directions. Also, the efforts to define the product of the two line segments having different direction in three dimensional space led to the introduction of quaternion. In addition, It is founded that the inner product and outer product of vectors was derived from the real part and vector part of multiplication of two quaternions. Based on these results, I claimed that we should review the current deployment method of making inner product and outer product as multiplications that are not related to each other, and suggested one approach for connecting the inner and outer product.

* Key Words : History(역사), Product of Vectors(벡터의 곱), Inner product(내적), Outer product(외적), Quaternion(사원수)

논문접수 : 2015. 4. 6
논문수정 : 2015. 5. 17
심사완료 : 2015. 5. 19