

논문 2015-52-5-23

이산 시간 선형 스위치드 시스템의 스위칭 신호 및 상태에 대한 강인한 추정 알고리즘

(Robust Estimation Algorithm for Switching Signal and State of Discrete-time Switched Linear Systems)

이 찬 화*, 심 형 보**

(Chanhwa Lee[Ⓢ] and Hyungbo Shim)

요 약

본 논문에서는 측정 잡음에 의해서 출력 신호가 왜곡된 이산 시간 선형 스위치드 시스템의 스위칭 신호와 상태 변수를 관측하기 위한 강인한 추정 및 검출 기법을 제시한다. 첫째, 최소 거리 기준에 기초한 작동 모드 추정 알고리즘이 제안된다. 이 과정에서 모드의 추정값을 얻게 되고, 이를 이용하여 상태 변수 또한 관측할 수 있게 된다. 둘째, 주어진 스위치드 시스템의 작동 모드 변화 시점, 즉, 스위칭이 언제 발생하는지 검출하는 알고리즘이 고안된다. 시스템에 인가되는 측정 잡음이 유계라는 가정 하에, 제안된 추정 알고리즘은 주어진 스위치드 시스템의 작동 모드를 정확하게, 그리고 상태 변수를 근사적으로 추정하며, 검출 알고리즘은 실제 스위칭이 발생한 후, 미리 정해진 지연 시간이 지나가기 전에 스위칭 시간을 검출할 수 있다.

Abstract

In this paper, we present robust estimation and detection algorithms for discrete-time switched linear systems whose output measurements are corrupted by noises. First, a mode estimation algorithm is proposed based on the minimum distance criterion. Then, state variables are also observed under the active mode estimate. Second, a detection algorithm is constructed to detect the mode switching of the switched system. With the boundedness of measurement noise, the proposed estimation algorithm returns the exact active mode and approximate state information of the switched system. In addition, the detection algorithm can detect the switching time within a pre-determined time interval after the actual switching occurred.

Keywords : Discrete-time switched linear systems, switching signal and state estimation, observer design

I. 서 론

스위치드 시스템(switched system)은 스위칭 (switching)이라는 이산 신호에 의해서 시스템의 동역학이 바뀌는 시스템으로, 스위칭 신호가 현재 동작할 서브시스템(subsystem)을 결정하는 시스템을 일컫는다. 예컨대, 분열 주기에 따른 세포의 활동, 변속 기어에 따른 자동차의 운동, 스위치를 포함한 전기 회로 등 우리 주변의 수많은 복잡한 시스템들이 스위치드 시스템으로 모델링 될 수 있으며, 이런 유용성으로 인해 최근 제어

* 학생회원, ** 정회원, 서울대학교 전기·정보공학부 (ASRI, Department of Electrical and Computer Engineering, Seoul National University)

Ⓢ Corresponding Author(E-mail: chlee@cdsl.kr)

※ 이 논문의 선행 연구 결과가 2014년 정보 및 제어 학술대회(CICS 2014)에서 이미 발표되었음^[1].

※ 이 논문은 2009년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No. 2009-0083495)이며, 2014년도 두뇌한국21플러스사업에 의하여 지원되었음.

Received ; January 12, 2015 Revised ; April 24, 2015

Accepted ; April 25, 2015

이론 분야에서 많은 주목을 받고 있다^[1~3].

스위치드 시스템을 효과적으로 제어하기 위해서는 스위칭 신호를 아는 것이 무엇보다 필수적이다. 즉, 시스템이 어느 모드(mode)에서 동작하고 있으며, 작동 모드의 변화, 즉 스위칭은 언제 발생하는지 관측하는 것이 요구된다. 따라서 본 논문에서는 스위치드 시스템의 작동 모드를 추정하고, 스위칭 시간을 검출하는 알고리즘을 제시하며, 이를 바탕으로 관측기(observer) 설계 기법을 제안한다. 구체적으로 본 논문에서 다루고 있는 시스템은 모든 서브시스템이 이산 시간(discrete-time) 선형 시스템인 이산 시간 선형 스위치드 시스템이며, 출력 신호가 유계(bounded)인 측정 잡음(noise)에 의해 왜곡되고 있음을 가정한다.

관측기의 기반이 되는 관측가능성(observability)의 개념은 안정성(stability) 및 제어가능성(controllability)과 더불어 제어 시스템에서 가장 기본적이며, 중요한 문제 중 하나이다. 따라서 이산 시간 스위치드 시스템에 대해서도 관측가능성의 개념이 다양하게 연구되고 있다. 먼저, 모드 및 초기 상태(initial state) 변수에 대한 관측가능성 개념이 소개되었으며^[4], 제어 입력(control input)의 유무에 따른 관측가능성의 변형 개념 또한 논의되었다^[5]. 또한, 이를 발전시켜 유계인 잡음이 존재하는 경우에 모드 관측가능성(mode observability)이 연구되기도 하였다^[6].

이런 개념들을 바탕으로 많은 관측기 설계 기법들이 제안되어 왔다. 스위칭 신호에 대한 정보를 사전에 알 수 없거나 측정할 수 없는 경우 모드를 추정하는 기법이 고안되었으며^[7], 나아가 모드를 알 수 없는 상황에서 상태 변수를 추정하는 문제가 다루어졌다^[8]. 최근에 잡음이 있는 연속 시간(continuous-time) 선형 스위치드 시스템의 스위칭 신호를 추정하는 기법이 제시되었으며^[9~10], 이를 응용하여, 본 논문에서는 이산 시간 스위치드 시스템의 스위칭 신호와 상태 변수를 함께 관측하는, 잡음에 강인한 추정 및 검출 알고리즘을 제안한다.

표기법: $|v|$ 는 벡터 v 의 유클리드 노름(Euclidean norm)을, $\|M\|$ 은 행렬 M 의 유도된 행렬 2-노름(induced matrix 2-norm)을 나타낸다. 또한, $\lambda_{\min}(M)$ 은 행렬 M 의 최소 고유값(minimum eigenvalue)을 표기하는 것이다.

II. 본 론

1. 사전 지식

다음과 같은 이산 시간 선형 스위치드 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + v(k) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 은 상태 변수, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ 는 출력, $v(k) \in \mathbb{R}^q$ 는 측정 잡음, $\sigma(k) \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, N\}$ 은 스위칭 신호이다. 초기 상태 변수와 스위칭 신호의 추정이 가능하기 위해서 시스템 (1)은 필수적으로 결합 관측가능성 행렬(joint observability matrix)에 대한 다음의 $2n$ 계수(rank) 조건을 만족해야 한다^[4, Lemma 1].

가정 1: $i \neq j$ 인 모든 $i, j \in \mathcal{M}$ 에 대해 다음 계수 조건을 만족한다.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} O_i^{(2n)} & O_j^{(2n)} \end{bmatrix} = 2n$$

여기서 $O_i^{(k)} := [C_i^\top (C_i A_i)^\top \dots (C_i A_i^{k-1})^\top]^\top$ 이다.

가정 1은 아래 (2)과 같이 정의된 결합 관측가능성 그라미안(joint observability Gramian)이 정칙(nonsingular) 행렬이란 사실과 동치이다.

$$W_{i,j}(2n) := \sum_{k=0}^{2n-1} \begin{bmatrix} (C_i A_i^k)^\top \\ (C_j A_j^k)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i A_i^k & C_j A_j^k \end{bmatrix} > 0 \quad (2)$$

이런 경우, $m \geq 2n$ 일 때, $W_{i,j}(m)$ 이 정칙 행렬이므로, 최소 고유값은 0보다 크다.

$$\omega_{\min}(m) := \min_{i,j \in \mathcal{M}; i \neq j} \lambda_{\min}(W_{i,j}(m)) > 0$$

언급 1: 모드가 i 이고, 초기 시간 k_0 에서 초기 상태 변수 x_0 로부터 시작한 측정 잡음이 없는 시스템의 출력을 $y_i(k; k_0, x_0)$ 라 표기하자. 그러면 짧은 계산을 통해 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_0}^{k_0+m-1} |y_i(k; k_0, x_0) - y_j(k; k_0, x_0')|^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_0^\top & -x_0'^\top \end{bmatrix} W_{i,j}(m) \begin{bmatrix} x_0 \\ -x_0' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\omega_{\min}(m) = 0$ 이면, $y_i(k; k_0, x_0) = y_j(k; k_0, x_0')$ 을 모든 $k \in [k_0, k_0 + m - 1]$ 에 대해 만족하는, $i \neq j$ 인 모드 i, j 와 초기 상태 x_0, x_0' 이 존재한다. 즉, 출력 정보만으로 구분할 수 없는(indistinguishable) 모드가 존재한다.

다음과 같이 새로운 기호 $\overline{W}_{i,j}(m)$ 를 정의하면,

$$\overline{W}_{i,j}(m) := \sum_{k=0}^{m-1} [(C_i A_i^k - C_j A_j^k)^\top] [C_i A_i^k - C_j A_j^k],$$

언급 1에서 $x_0' = x_0$ 인 경우, 아래의 식이 성립한다.

$$\sum_{k=k_0}^{k_0+m-1} |y_i(k; k_0, x_0) - y_j(k; k_0, x_0)|^2 = x_0^\top \overline{W}_{i,j}(m) x_0$$

$m \geq 2n$ 일 때, 가정 1에 의해 $W_{i,j}(m) > 0$ 이 만족된다면, $\overline{W}_{i,j}(m)$ 역시 정칙 행렬이므로, 최소 고유값은 0보다 크다.

$$\overline{\omega}_{\min}(m) := \min_{i,j \in \mathcal{N}; i \neq j} \lambda_{\min}(\overline{W}_{i,j}(m)) > 0$$

또한, 위의 가정 1에 의해서 시스템 (1)의 모든 서브 시스템이 관측가능하다는 것을 쉽게 보일 수 있으므로, $(A_i - L_i C_i)$ 를 안정하게 만들어주는 관측기 이득 L_i 가 모든 i 에 대해서 존재한다. 그러므로 추가적으로, 모든 $i \in \mathcal{N}$ 와 k 에 대해서 $\|(A_i - L_i C_i)^k\| \leq \hat{\mu}(\hat{\beta})^k$ 와 $\|A_i^k\| \leq \check{\mu}(\check{\beta})^k$ 를 만족하도록 하는 $\hat{\mu} \geq 1$, $0 < \hat{\beta} < 1$, $\check{\mu} \geq 1$, $\check{\beta} \geq 1$ 이 존재한다. 다음 가정 2를 논의하기 전에, $L_{\max} := \max_{i \in \mathcal{N}} \|L_i\|$, $C_{\max} := \max_{i \in \mathcal{N}} \|C_i\|$ 와 같이 L_{\max} , C_{\max} 를 정의하자.

가정 2: 측정 잡음 $v(k)$ 는 고르게 유계(uniformly bounded)이다. 즉, 다음을 만족하는 v_{\max} 가 존재한다.

$$|v(k)| \leq v_{\max}, \quad \forall k \quad (3)$$

더욱이, 모든 시간 k 에 대해서 다음 부등식을 만족하는 자연수 $\delta, \Delta \geq 2n$ 가 존재한다.

$$\omega_{\min}(\delta) |x(k)|^2 > 4v_{\max}^2 \delta \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\omega}_{\min}(\Delta) |x(k)|^2 \\ & > 4(1 + C_{\max} \check{\mu}(\check{\beta})^\Delta (\check{\mu}(\check{\beta})^\Delta + 1) E(\delta))^2 v_{\max}^2 \Delta \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 다음과 같은 표기법이 사용되었다.

$$U_i(\delta) := \sum_{k=0}^{\delta-1} (C_i A_i^k)^\top C_i A_i^k$$

$$M_{\max}(\delta) := \max_{i \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\delta-1} \|U_i^{-1}(\delta) (C_i A_i^k)^\top\|$$

$$E(\delta) := \hat{\mu} \left(M_{\max}(\delta) + \frac{1}{1 - \hat{\beta}} L_{\max} \right)$$

가정 3: 연속된 스위칭 시간 사이에는 최소한 $\delta + \Delta$ 시간만큼 떨어져 있다. 즉, j 번째 스위칭 시간을 k_j 로 표기하면, $k_{j+1} - k_j \geq \delta + \Delta$ 가 성립한다.

2. 작동 모드 및 상태 추정 알고리즘 (EST)

이번 장에서는 스위치드 시스템의 작동 모드와 상태 변수를 추정하는 알고리즘 EST를 제시한다. EST 알고리즘은 작동 모드를 추정하는 mEST와 상태 변수를 추정하는 sEST로 구성되어 있다.

(1) 모드 추정 알고리즘 (mEST)

먼저 모드를 추정하는 알고리즘 mEST를 제안하기에 앞서, $\hat{\sigma}(k)$ 를 모드 $\sigma(k)$ 의 추정값으로, \hat{k}_j 를 j 번째 스위칭 시간 k_j 의 추정값으로 표기하자. 편의상 $\hat{k}_0 = 0$ 으로 둘 것이다. 아래의 mEST 알고리즘은 시간 \hat{k}_j 마다 호출되어서, 시간 $\hat{k}_j + \delta - 1$ 까지 작동한다.

작동 모드 추정 알고리즘 (mEST):

Initialize: $z_i(\hat{k}_j) \leftarrow 0$ for all $i \in \mathcal{N}$

- 1: **while** $\hat{k}_j \leq k \leq \hat{k}_j + \delta - 1$ **do**
- 2: Run the following system for all $i \in \mathcal{N}$

$$z_i(k+1) = A_i^{-\top} z_i(k) + C_i^\top y(k)$$
- 3: **end while**
- 4: **for** $i = 1$ **to** N **do**
- 5: $X_i^* \leftarrow U_i^{-1}(\delta) (A_i^\top)^{\delta-1} z_i(\hat{k}_j + \delta)$
- 6: Calculate the following for $k \in [\hat{k}_j, \hat{k}_j + \delta - 1]$ with $\tilde{x}_i(\hat{k}_j) = X_i^*$ and $s_i(\hat{k}_j - 1) = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(k+1) &= A_i \tilde{x}_i(k) \\ s_i(k) &= s_i(k-1) + |y(k) - C_i \tilde{x}_i(k)|^2 \end{aligned}$$
- 7: $I_i \leftarrow s_i(\hat{k}_j + \delta - 1)$
- 8: **end for**
- 9: $\hat{\sigma}_j \leftarrow \arg \min_{i \in \mathcal{N}} I_i$

위 mEST 알고리즘의 1번째 줄에서 3번째 줄은 시간 구간 $[\hat{k}_j, \hat{k}_j + \delta - 1]$ 에서 실시간으로 동작하며, 시간 $\hat{k}_j + \delta - 1$ 직후에 4번째 줄부터 9번째 줄까지 한꺼번에 수행되고, 모드 추정값 $\hat{\sigma}_j$ 가 계산된다.

(2) 상태 추정 알고리즘 (sEST)

여기에서는 앞의 II.2.(1)장에서 구한 $\hat{\sigma}_j$ 와 $X_{\hat{\sigma}_j}^*$ 를 가지고, 시간 $\hat{k}_j + \delta$ 부터 다음 스위칭이 검출되기 전까지 (다음 스위칭은 II.3장의 DET 알고리즘을 통해서 검출되며, 추정값은 편의상 \hat{k}_{j+1} 로 표기할 수 있다.) 상태 변수를 추정하는 sEST 알고리즘을 제시할 것이다.

상태 변수 추정 알고리즘 (sEST):

Require: $\hat{\sigma}_j, X_{\hat{\sigma}_j}^*$

- 1: Calculate the following for $k \in [\hat{k}_j, \hat{k}_j + \delta - 1]$
with $\hat{x}(\hat{k}_j) = X_{\hat{\sigma}_j}^*$
$$\hat{x}(k+1) = (A_{\hat{\sigma}_j} - L_{\hat{\sigma}_j} C_{\hat{\sigma}_j})\hat{x}(k) + L_{\hat{\sigma}_j} y(k)$$
- 2: **while** $\hat{k}_j + \delta \leq k < \hat{k}_{j+1}$ **do**
- 3: $\hat{\sigma}(k) \leftarrow \hat{\sigma}_j$
- 4: Run the following observer in real-time
$$\hat{x}(k+1) = (A_{\hat{\sigma}_j} - L_{\hat{\sigma}_j} C_{\hat{\sigma}_j})\hat{x}(k) + L_{\hat{\sigma}_j} y(k) \quad (6)$$
- 5: **end while**

위 sEST 알고리즘의 1번째 줄은 mEST 알고리즘이 끝나자마자 시작하여 $\hat{x}(\hat{k}_j + \delta)$ 를 계산해 준다. 이 값을 바탕으로 4번째 줄의 관측기 (6)을 통해서 실시간으로 상태 변수의 추정값을 얻을 수 있다. 물론, 모드의 추정값 $\hat{\sigma}(k)$ 는 앞서 mEST 알고리즘을 통해서 구한 $\hat{\sigma}_j$ 를 사용하며, 이는 3번째 줄을 통해서 표현되어 있다.

(3) 추정 알고리즘의 결과

본 장에서는, 앞서 제시한 mEST와 sEST 알고리즘이 작동 모드는 정확하게, 상태 변수는 근사적으로 추정할 수 있음을 다음 보조정리를 통해 보일 것이다.

보조정리 1: 시스템 (1)이 가정 2의 조건 (3)과 (4)를 만족하며, 구간 $[\hat{k}_j, \hat{k}_j + \delta - 1]$ 에서 더 이상 스위칭이 일어나지 않는다고 하자. 그러면 mEST와 sEST 알고

리즘을 통해 얻은 모드 추정값 $\hat{\sigma}(k)$ 와 상태 변수 추정값 $\hat{x}(k)$ 는 다음 스위칭이 발생하기 전까지, 다시 말해, $\hat{k}_j + \delta \leq k < \hat{k}_{j+1}$ 에서, 아래 식을 만족한다.

$$\hat{\sigma}(k) = \sigma(k) \quad (7)$$

$$|x(k) - \hat{x}(k)| \leq v_{\max} E(\delta) \quad (8)$$

증명: 본 증명은 최소 거리 기준(minimum distance criterion)^[11]을 이용한 [9, Theorem 1]의 증명과 유사하다. 우선, mEST 알고리즘 2번째 줄의 시스템을 실행하여 5번째 줄에서 구한 X_i^* 는 다음과 같음을 계산을 통해서 알 수 있다.

$$X_i^* = U_i^{-1}(\delta) \sum_{k=\hat{k}_j}^{\hat{k}_j+\delta-1} (C_i A_i^{k-\hat{k}_j})^T y(k) \quad (9)$$

여기서 $J_i(X_i)$ 를 아래와 같이 정의하면,

$$J_i(X_i) := \sum_{k=\hat{k}_j}^{\hat{k}_j+\delta-1} |y(k) - y_i(k; \hat{k}_j, X_i)|^2, \quad (10)$$

우리가 (9)에서 구한 X_i^* 는 (10)에서 정의한 $J_i(X_i)$ 를 최소화하는 X_i 의 값으로, $X_i = X_i^*$ 에서 미분이 0이라는 다음의 사실로부터 계산된다.

$$\left. \frac{dJ_i(X_i)}{dX_i} \right|_{X_i=X_i^*} = 0$$

또한, mEST 알고리즘의 6번째, 7번째 줄을 통해 계산한 I_i 는 $J_i(X_i^*)$ 와 같음을 쉽게 확인할 수 있다. 그런데, 시스템 (1)의 출력은 $y(k) = C_\sigma A_\sigma^{k-\hat{k}_j} x(\hat{k}_j) + v(k)$ 와 같이 계산할 수 있으며, $i = \sigma$ 인 경우에 이렇게 계산된 $y(k)$ 를 (9)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$X_\sigma^* = x(\hat{k}_j) + U_\sigma^{-1}(\delta) \sum_{k=\hat{k}_j}^{\hat{k}_j+\delta-1} (C_\sigma A_\sigma^{k-\hat{k}_j})^T v(k) \quad (11)$$

이로부터 구한 X_σ^* 를 다시 (10)에 대입하여 계산하면, 다음의 부등식이 유도된다.

$$\sqrt{J_\sigma(X_\sigma^*)} \leq v_{\max} \sqrt{\delta}$$

그리고 민코프스키 부등식(Minkowski inequality)을 이용한 일상적인 계산으로부터, $i \neq \sigma$ 인 경우에 다음 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

$$\sqrt{J_i(X_i^*)} \geq \sqrt{\omega_{\min}(\delta)} |x(\hat{k}_j)| - v_{\max} \sqrt{\delta}$$

결과적으로, 가정 2의 조건 (4)에 의해서 $i \neq \sigma$ 일 때, $\sqrt{J_i(X_i^*)} > \sqrt{J_\sigma(X_\sigma^*)}$ 가 성립하기 때문에, mEST 알고리즘의 9번째 줄로부터 계산한 아래 식 (12)의 $\hat{\sigma}_j$ 는 정확한 모드를 돌려주게 되고 (7)이 만족된다.

$$\hat{\sigma}_j := \arg \min_{i \in \mathcal{S}} J_i(X_i^*) \quad (12)$$

이제 (8)이 옳다는 것을 보이자. sEST 알고리즘의 1번째 줄에 의해서 $\hat{x}(\hat{k}_j) = X_\sigma^*$ 이므로, 식 (7)과 (11)로부터 $\hat{x}(\hat{k}_j)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{x}(\hat{k}_j) = x(\hat{k}_j) + U_\sigma^{-1}(\delta) \sum_{k=\hat{k}_j}^{\hat{k}_j+\delta-1} (C_\sigma A_\sigma^{k-\hat{k}_j})^\top v(k)$$

상태 변수 추정 오차를 $\hat{e} := x - \hat{x}$ 로 정의하면, 아래의 초기 오차와 오차방정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{e}(\hat{k}_j) = -U_\sigma^{-1}(\delta) \sum_{k=\hat{k}_j}^{\hat{k}_j+\delta-1} (C_\sigma A_\sigma^{k-\hat{k}_j})^\top v(k)$$

$$\hat{e}(k+1) = (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)}) \hat{e}(k) - L_{\sigma(k)} v(k)$$

그리고 간단한 계산에 의해서 오차 \hat{e} 는 다음과 같이 유계임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} |\hat{e}(\hat{k}_j)| &\leq v_{\max} M_{\max}(\delta) \\ |\hat{e}(k)| &\leq v_{\max} \hat{\mu} \left(M_{\max}(\delta) + \frac{1}{1-\hat{\beta}} L_{\max} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

부등식 (13)에 의해, (8)이 성립하는 것은 자명하다. \square

3. 스위칭 시간 검출 알고리즘 (DET)

스위칭 신호는 작동 모드와 스위칭 시간의 두 가지 요소로 구성된다. 앞의 II.2.(1)장에서는 이 중에서 모드를 추정하는 기법을 고안하였으며, 본 장에서는 나머지 요소인 스위칭 시간을 검출하는 알고리즘을 제시할 것이다. 보조정리 1로부터, 시간 $\hat{k}_j + \delta$ 에 정확한 작동 모

드 추정값 $\hat{\sigma}(\hat{k}_j + \delta)$ 와 근사적인 상태 변수 추정값 $\hat{x}(\hat{k}_j + \delta)$ 를 얻을 수 있었다. 이 정보들을 가지고, 우리는 시간 $\hat{k}_j + \delta$ 부터 스위칭이 발생하는지 감시하는 알고리즘을 수행할 것이다. 아래에 알고리즘이 요약되어 있으며, 다음의 표기가 사용되었음을 참고하자.

$$S_\Delta := v_{\max}^2 (1 + C_{\max} \check{\mu}(\check{\beta})^\Delta E(\delta))^2 \Delta$$

스위칭 시간 검출 알고리즘 (DET):

Require: $\hat{\sigma}_j, \hat{x}(k)$

Initialize: $\check{x}(\hat{k}_j + \delta) \leftarrow \hat{x}(\hat{k}_j + \delta), s(\hat{k}_j + \delta - 1) \leftarrow 0,$

$$K(\hat{k}_j + \delta) \leftarrow 0$$

1: **repeat**

2: Run the following systems in real-time

$$\check{x}(k+1) = A_{\hat{\sigma}_j} \check{x}(k) \quad (14)$$

$$s(k) = s(k-1) + |y(k) - C_{\hat{\sigma}_j} \check{x}(k)|^2$$

$$K(k+1) = K(k) + 1$$

3: **if** $K(k) \geq \Delta$ **then**

$$\check{x}(k) \leftarrow \hat{x}(k) \quad (15)$$

$$K(k) \leftarrow 0$$

6: **end if**

7: **until** either one of the following holds:

$$|\check{x}(k) - \hat{x}(k)| > v_{\max} (\check{\mu}(\check{\beta})^\Delta + 1) E(\delta) \quad (16)$$

$$\text{or } s(k) - s(k-\Delta) > S_\Delta \quad (17)$$

8: $j \leftarrow j + 1$

9: Detect the switching time with $\hat{k}_j \leftarrow k$

앞으로, 위에서 제시된 DET 알고리즘은 실제 스위칭이 시간 k_j 에 발생하면, 늦어도 Δ 시간 지연이 지나기 전에 스위칭을 검출할 수 있음을 보일 것이다. 즉, $\hat{k}_j < k_j + \Delta$ 임을 증명할 것이다. 이를 위해서 우선, 다음 스위칭이 시간 $k_{j+1} > \hat{k}_j + \delta$ 에서 발생했다고 생각하고, 편의상 $k^* = k_{j+1}$ 로 표기하자. 그리고 (14)의 추정 오차를 $\check{e} := x - \check{x}$ 로 정의하면, 시간 $[\hat{k}_j, k^* - 1]$ 에서는 보조정리 1에 의해 $\hat{\sigma}(k) = \sigma(k)$ 를 만족하고, 초기값은 $\check{x}(\hat{k}_j + \delta) = \hat{x}(\hat{k}_j + \delta)$ 와 같이 주어졌으므로, 아래와 같이 초기 오차와 오차방정식을 얻을 수 있다.

$$\check{e}(\hat{k}_j + \delta) = \hat{e}(\hat{k}_j + \delta)$$

$$\check{e}(k+1) = A_{\sigma(k)} \check{e}(k)$$

그리고 (8)에 의해서 초기 오차 $\tilde{e}(\hat{k}_j + \delta)$ 는 다음과 같이 유계임을 알 수 있다.

$$|\tilde{e}(\hat{k}_j + \delta)| = |\hat{e}(\hat{k}_j + \delta)| \leq v_{\max} E(\delta)$$

게다가 (15)에 의해서 \tilde{x} 는 \hat{x} 로 Δ 시간마다 주기적으로 업데이트되고 있으므로, 오차 \tilde{e} 의 상계(upper bound)는

$$|\tilde{e}(k)| \leq v_{\max} \tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta E(\delta) \quad (18)$$

와 같이 계산되며, $\tilde{x} - \hat{x}$ 의 상계는 (8)과 (18)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$|\tilde{x}(k) - \hat{x}(k)| \leq |\tilde{e}(k)| + |\hat{e}(k)| \leq v_{\max} (\tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta + 1) E(\delta) \quad (19)$$

이를 이용하여, DET 알고리즘의 스위칭 검출 성능을 보여주는 다음의 보조정리들을 유도할 수 있다.

보조정리 2: DET 알고리즘에서 조건 (16)과 (17)은 시간 구간 $[\hat{k}_j, k^* - 1]$ 에서 만족될 수 없다.

증명: 식 (19)로부터 (16)이 만족될 수 없음은 자명하다. 또한, 민코프스키 부등식에 의해서 다음 부등식이 성립하므로,

$$\begin{aligned} & (s(k) - s(k - \Delta))^{1/2} \\ & \leq \left(\sum_{l=k-\Delta+1}^k |v(l)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{l=k-\Delta+1}^k |C_\sigma \tilde{e}(l)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq v_{\max} \sqrt{\Delta} + v_{\max} C_{\max} \tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta E(\delta) \sqrt{\Delta} =: \sqrt{S_\Delta}, \end{aligned}$$

조건 (17) 역시 만족될 수 없다. □

보조정리 3: 가정 2와 3을 만족할 때, 실제 스위칭이 시간 k^* 에 발생하면, 늦어도 Δ 시간 지연이 지나기 전에 조건 (16)과 (17) 중 하나가 작동한다. 즉, DET 알고리즘은 시간 $\hat{k}_{j+1} < k^* + \Delta$ 에서 스위칭 시간을 검출할 수 있다.

증명: 조건 (16)이 구간 $[k^*, k^* + \Delta - 1]$ 에서 만족하지 않는다면, 조건 (17)이 동일한 구간 안에서 반드시 작동함을 증명할 것이다. 즉, $k \in [k^*, k^* + \Delta - 1]$ 일 때, 다

음이 만족됨을 가정하고,

$$|\tilde{x}(k) - \hat{x}(k)| \leq v_{\max} (\tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta + 1) E(\delta), \quad (19')$$

$s(k^* + \Delta - 1) - s(k^* - 1) > S_\Delta$ 임을 보인다.

다음과 같이 $k \geq k^*$ 에서 새로운 가상의 오차 변수 $\tilde{e}_i(k)$ 를 정의하자.

$$\tilde{e}_i(k) := \tilde{x}(k) - A_i^{k-k^*} x(k^*)$$

우리는 $\tilde{e}_i(k)$ 가 다음 부등식을 만족함을 보일 수 있다.

$$|\tilde{e}_\sigma(k)| \leq v_{\max} \tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta (2\tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta + 1) E(\delta) \quad (20)$$

이를 보이기 위해서, $\tilde{x}(k)$ 이 $\hat{x}(k)$ 로 업데이트 되는 시간을 k_u 라고 표기하고, 먼저 시간 $k_u = k^*$ 인 경우를 생각하면, 그 다음 업데이트는 시간 $k^* + \Delta$ 에서 발생하고, 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_\sigma(k)| & = \left| A_\sigma^{k-k^*} (\tilde{x}(k^*) - x(k^*)) \right| \\ & \leq v_{\max} \tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta E(\delta) \end{aligned}$$

이제 $k^* < k_u < k^* + \Delta$ 인 경우를 고려하자. 시간 $k^* \leq k < k_u$ 에서 $\tilde{e}_\sigma(k) = A_\sigma^{k-k^*} (\tilde{x}(k^*) - x(k^*))$ 이 성립하며, 시간 $k_u \leq k < k^* + \Delta$ 에서는 다음의 관계가 만족된다.

$$\begin{aligned} \tilde{e}_\sigma(k) & = A_\sigma^{k-k_u} \tilde{x}(k_u) - A_\sigma^{k-k^*} x(k^*) \\ & = A_\sigma^{k-k_u} (\hat{x}(k_u) - A_\sigma^{k_u-k^*} \tilde{x}(k^*)) \\ & \quad + A_\sigma^{k-k^*} (\tilde{x}(k^*) - x(k^*)) \end{aligned}$$

따라서, (18)과 (19')에 의해서 부등식 (20)이 성립한다.

마침내, 민코프스키 부등식에 의해서 아래의 부등식 (21)이 성립하며,

$$\begin{aligned} & (s(k^* + \Delta - 1) - s(k^* - 1))^{1/2} \\ & \geq \sqrt{\omega_{\min}(\Delta) |x(k^*)|} - v_{\max} \sqrt{\Delta} \\ & \quad - v_{\max} C_{\max} \tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta (2\tilde{\mu}(\tilde{\beta})^\Delta + 1) E(\delta) \sqrt{\Delta}, \end{aligned} \quad (21)$$

이를 가정 2의 조건 (5)와 결합하면, 우리가 본 증명에서 보이고자 했던, $s(k^* + \Delta - 1) - s(k^* - 1) > S_\Delta$ 이 성립함을 알 수 있다. □

4. 전체 알고리즘 (OBS)

이번 장에서는 앞서 살펴본 mEST, sEST 및 DET 알고리즘이 전체적으로 어떻게 동작하는지 정리할 것이다. 먼저, 초기 조건을 $j \leftarrow 0$, $\hat{k}_j \leftarrow 0$ 으로 두고, 시간 구간 $[\hat{k}_j, \hat{k}_j + \delta - 1]$ 에서 mEST 알고리즘을 수행하여, 작동 모드 $\hat{\sigma}_j$ 를 추정한다. 그 다음으로 $\hat{k}_j + \delta$ 시간에 sEST 알고리즘을 호출하여 실시간으로 상태 변수의 추정값 $\hat{x}(k)$ 를 계산하면서, 동시에 DET 알고리즘을 돌려서 스위칭 발생 여부를 감시할 것이다. 만약 스위칭이 검출되면, $j \leftarrow j + 1$, $\hat{k}_j \leftarrow k$ 로 스위칭 시간 추정값을 업데이트하게 되고, 이제 \hat{k}_j 시간부터 새로이 mEST 알고리즘을 호출하여, 전체 작동을 반복한다.

전체 알고리즘 (OBS):

Initialize: $j \leftarrow 0$, $\hat{k}_j \leftarrow 0$

- 1: **while** $k \geq 0$ **do**
- 2: **if** $\hat{k}_j \leq k \leq \hat{k}_j + \delta - 1$ **then**
 Operate mEST (Estimate σ by $\hat{\sigma}_j$)
- 3: **else if** $k > \hat{k}_j + \delta - 1$ **then**
 Operate sEST (Estimate x by \hat{x})
 Operate DET (Detect k_{j+1} & update \hat{k}_j)
- 4: **end if**
- 5: **end while**

마지막으로, 지금까지 유도한 보조정리 1, 2, 3을 모두 합치면, 위의 전체 알고리즘 OBS에 대한 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)이 가정 1, 2, 3을 모두 만족할 때, 알고리즘 OBS로 동작하는 관측기는 다음을 보장한다.

- (a) 스위칭이 발생하면, 늦어도 Δ 시간 지연이 지나기 전에 검출할 수 있다. 즉, $\hat{k}_j < k_j + \Delta$ 을 만족한다.
- (b) 스위칭 검출 후 δ 시간이 지나고, 다음 스위칭이 발생하기 전까지는 모드를 정확하게 추정할 수 있다. 즉, $\hat{k}_j + \delta \leq k < k_{j+1}$ 일 때, $\hat{\sigma}(k) = \sigma(k)$ 를 만족한다.
- (c) 스위칭 검출 후 δ 시간이 지나고, 다음 스위칭이 발생하기 전까지는 상태 변수를 근사적으로 관측할 수 있다. 즉, $\hat{k}_j + \delta \leq k < k_{j+1}$ 일 때, $|\hat{e}(k)| \leq v_{\max} E(\delta)$ 를 만족한다.

III. 모 의 실 험

제시된 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 다음과 같은 요소로 구성된 시스템 (1)을 고려하였다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0], C_2 = [1 \ 0]$$

상태 변수의 초기값은 $x(0) = [3 \ 3]^T$ 으로 주어졌으며, 측정 잡음 $v(k)$ 는 $|v(k)| \leq v_{\max} = 0.01$ 를 만족하도록 만들어 주었다. 또한, 스위칭 신호 $\sigma(k)$ 는 그림 1과 같이 $k_1 = 50$ 과 $k_2 = 100$ 에서 스위칭이 발생하도록 설정하였다. 관측기의 성능을 결정할 설계 변수 δ 와 Δ 는 모두 10으로 선택하였으며, 그림 1의 $|x(k)|$ 그래프에서 항상 $|x(k)| \geq 3.03$ 이 성립함을 확인할 수 있듯이, 가정 2의 조건 (4)와 (5)를 모두 만족하게 된다.

스위칭을 검출한 시간은 $\hat{k}_1 = 58$ 과 $\hat{k}_2 = 102$ 로, 실제 스위칭 발생 후 Δ 시간 지연이 지나기 전에 검출함을 확인할 수 있었다. 또한, 스위칭이 검출된 뒤, 작동 모드를 확인하기 위해 추가적으로 δ 시간이 더 지나고

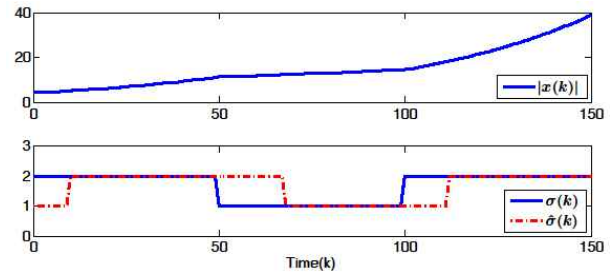


그림 1. 시간에 따른 $|x(t)|$ 와 스위칭 신호 추정값

Fig. 1. Plot of $|x(t)|$ and switching signal estimation.

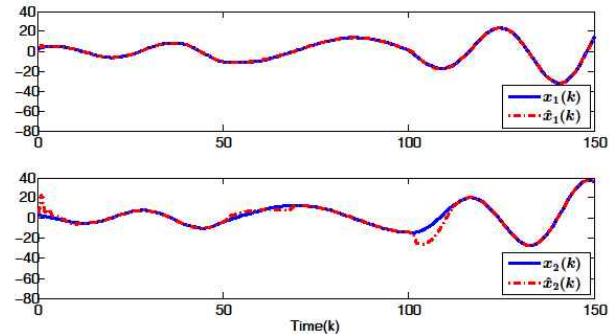


그림 2. 시간에 따른 상태 변수와 그 추정값

Fig. 2. Plot of x_i 's and their estimates \hat{x}_i 's.

나서, 정확한 스위칭 신호를 복원할 수 있었다. 그림 2는 상태 변수와 그 추정값을 나타내고 있으며, 스위칭이 일어난 후의 짧은 시간을 제외한 영역에서 성공적으로 관측기가 동작함을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 이산 시간 선형 스위치드 시스템의 추정 문제를 다루었다. 유계인 측정 잡음이 있는 경우에도 사전에 정해진 시간 지연 안에 스위칭의 발생을 검출하고, 작동 모드를 정확하게 추정하며, 상태 변수 또한 근사적으로 관측하는 강인한 온라인 알고리즘이 제시되었다. 이를 통해서 이산 시간 선형 스위치드 시스템의 관측기를 성공적으로 설계할 수 있었다.

REFERENCES

- [1] C. Lee, "On-line switching signal estimation of discrete-time switched linear systems with measurement noise," (in Korean) in *Proc. of the 2014 Conference on Information and Control Systems (CICS'14)*, pp. 69-72, Jeju, Korea, 2014.
- [2] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Springer, 2003.
- [3] Z. Sun and S. S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, 2006.
- [4] R. Vidal, A. Chiuso, and S. Soatto, "Observability and identifiability of jump linear systems," in *Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3614-3619, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- [5] M. Babaali and M. Egerstedt, "Observability of switched linear systems," in *Hybrid Systems: Computation and Control*, vol. 2993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 48-63, 2004.
- [6] M. Baglietto, G. Battistelli, and L. Scardovi, "Active mode observability of switching linear systems," *Automatica*, Vol. 43, no. 8, pp. 1442-1449, 2007.
- [7] E. A. Domlan, J. Ragot, and D. Maquin, "Active mode estimation for switching systems," in *Proc. of the 2007 American Control Conference*, pp. 1143-1148, New York, USA, 2007.
- [8] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli, "Minimum-distance receding-horizon state estimation for switching discrete-time linear

systems," in *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, vol. 358 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 347-358, 2007.

- [9] C. Lee, Z. Ping, and H. Shim, "On-line switching signal estimation of switched linear systems with measurement noise," in *Proc. of the 2013 European Control Conference*, pp. 2180-2185, Zurich, Switzerland, 2013.
- [10] Z. Ping, C. Lee, and H. Shim, "Robust estimation algorithm for switching signal and state of switched linear systems," submitted for publication.
- [11] G. Battistelli, "On adaptive stabilization of mode-observable switching linear systems," in *Proc. of 18th IFAC World Congress*, pp. 356-361, Milano, Italy, 2011.

저 자 소 개



이 찬 화(학생회원)

2008년 서울대학교 전기공학부
학사 졸업.

2010년 서울대학교 전기·컴퓨터
공학부 석사 졸업.

2012년~현재 서울대학교 전기·
정보공학부 박사 과정.

<주관심분야 : 스위치드 시스템, 사이버 물리 시스템>



심 형 보(정회원)

1993년 서울대학교 전기공학과
학사 졸업.

1995년 서울대학교 전기공학부
석사 졸업.

2000년 서울대학교 전기공학부
박사 졸업.

2003년~현재 서울대학교 전기·정보공학부 교수.
<주관심분야 : 비선형 시스템 제어 및 해석>