Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 2 (Apr. 2015), 103–115
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.2.103

On the Development of Differential Geometry from mid 19C to early 20C by Christoffel, Ricci and Levi-Civita

크리스토펠, 리치, 레비-치비타에 의한 19세기 중반부터
20세기 초반까지 미분기하학의 발전

Won Dae Yeon 원대연

Contemporary differential geometry owes much to the theory of connections on the bundles over manifolds. In this paper, following the work of Gauss on surfaces in 3 dimensional space and the work of Riemann on the curvature tensors on general n dimensional Riemannian manifolds, we will investigate how differential geometry had been developed from mid 19th century to early 20th century through lives and mathematical works of Christoffel, Ricci-Curbastro and Levi-Civita. Christoffel coined the Christoffel symbol and Ricci used the Christoffel symbol to define the notion of covariant derivative. Levi-Civita completed the theory of absolute differential calculus with Ricci and discovered geometric meaning of covariant derivative as parallel transport.

Keywords: Christoffel symbol, covariant derivative, parallel transport, Christoffel, Ricci-Curbastro, Levi-Civita, Einstein; 크리스토펠 기호, 공변미분, 평행이동, 크리스토펠, 리치, 레비-치비타, 아인슈타인.

MSC: 01A55, 01A60 ZDM: A30

1 서론

18세기 초 미분적분학을 해석기하학에 응용하는 것으로 시작한 미분기하학은 평면의 곡선 연구에서 벗어나 공간의 곡선과 곡면을 다룬다. 몽쥬(Monge)는 나폴레옹 시절 군사적 측량을 하는 건축기사로서 곡면을 입체의 경계로 보았다. 반면 측지학과 측지선의 측량에 관심이 많았던 가우스(Gauss)는 곡면을 분리된 2차원 피막으로 이해했다. 가우스가 곡면의 기하학을 연구하는 데 사용한 주요 도구는 가우스 사상이다. 가우스 사상은 곡면이 매장된 3차원 공간을 이용하여 정의되고 가우스 사상의 미분에 의해 가우스 곡률이 정의되지만

Won Dae Yeon: Dept. of Math., Duksung Women's Univ. E-mail: dywon@duksung.ac.kr
Received on Mar. 27, 2015, revised on Apr. 16, 2015, accepted on Apr. 21, 2015.

가우스의 놀라운 정리(Gauss's Theorema Egregium)를 통하여 가우스 곡률이 곡면이 3차원 공간에 어떻게 매장되어 있는지에 상관없이 2차원 피막의 정보만으로 구할 수 있는 불변량임을 보였다.

크리스토펠(Christoffel)은 가우스 곡률을 내재적으로 구하는 식에 등장하는 2^3개의 함수를 임의의 n차원으로 확장하여 n^3개의 함수 Γ^k_{ij}를 제안하였다. Γ^k_{ij}를 크리스토펠 기호(Christoffel symbol)라고 하는데 2차미분형식의 국소적 동치 문제의 해결에 이 기호를 사용하였다. 리치(Ricci)는 여기서 한 걸음 더 나아가 크리스토펠 기호를 이용하여 좌표계의 선택에 관계 없는 불변량 (2)를 정의할 수 있고 이 불변량을 이용하여 공변미분 (3)을 정의할 수 있음을 발견하였다. 크리스토펠과 리치는 단순히 대수적인 관점에서 2차미분형식의 국소적 동치 문제의 해결에만 노력하였기 때문에 크리스토펠 기호를 이용하여 정의된 불변량과 공변미분이 공간의 기하에 어떤 영향을 미치는지는 알지 못하였다. 기하학자인 레비-치비타(Levi-Civita)는 리치와의 공동 연구를 통하여 공변미분이 공간에 미칠 영향을 발견하였다. 공변미분을 이용하여 평행성을 정의할 수 있고 이 평행성에 의해 다양체의 서로 다른 두 점의 접벡터들을 비교할 수 있게 되었다. 이 이론이 접속(connection) 이론으로 현대 미분기하학의 출발점이다.

'리만이 논리적으로 아인슈타인(Einstein)의 바로 선배가 된다'는 러셀(Russel)의 말처럼 리만의 결과는 아인슈타인의 연구에 매우 중요한 수학적 업적이었으나 일반상대성이론을 정립하는 데 직접적인 도움을 준 것은 리치와 레비-치비타의 텐서 미분학이었다. 아인슈타인은 일반상대성이론을 연구하고 있을 당시 스위스 취리히의 연방공과대학[1)]에 재직하고 있었는데 여기서 수학자인 그로스만(Grossmann)과 공동연구를 하였고 괴팅엔을 떠나 연방공과대학에 재직하고 있던 당대 최고의 수학자인 바일(Weyl)을 만나 많은 도움을 받았다. 바일의 지도교수인 힐버트(Hilbert)는 괴팅엔 대학에서 아인슈타인과 비슷한 주제의 연구를 하고 있던 민코프스키(Minkowski)가 맹장 수술 후 갑자기 죽자 그의 물리학과 관련된 분야의 연구를 떠맡아 연구를 이어오고 있었다.

본 논문에 나오는 인물들은 단지 수학의 발전에만 영향을 미친 것이 아니라 물리학 등 응용을 통하여 인류 문명의 발전에도 지대한 영향을 미쳤기 때문에 이들에 대해서는 수학자뿐만 아니라 역사학자나 철학자들도 그들의 관점에서 연구한 논문이나 저서들이 있다. 부처(P. Butzer)는 [3]에서 크리스토펠 탄생 150주년을 맞아 그의 생애와 과학적 업적에 관한 논문을 발표하였다. 여기서 부처는 크리스토펠의 업적이 수학과 물리학과 역학의 발전에 미친 영향을 현대적인 맥락에서 평가하였다. 지오바넬리(M. Giovanelli)는 [11]에서 기하학적인 전통을 따라 이론을 전개한 리만과 실용적인 관점에서 특별한 문제를 해결하기 위하여 이론을 전개한 크리스토펠, 리치와 아인슈타인의 차이점을 경험주의자들이 인식하지 못 하였던 점에 대해서

1) Eidgenössische Technische Hochschule 약하여 보통 ETH라고 한다.

논하였다. 귀에라지오 (A. Guerraggio) 와 나스타시 (P. Nastasi) 는 두 번의 세계대전 사이의 이태리 수학자들의 업적에 대한 단행본 [12]을 출판하였는데 이 책에서 리치와 레비-치비타가 활동하던 시대를 황금시대 (golden period) 라고 하였고 레비-치비타를 20세기 전반기의 이태리 최고 수학자라고 하였다. 저명한 기하학자이자 수학사가인 라우크비츠 (D. Laugwitz) 는 괴팅엔 수학자들에 의해 전해 내려오는 리만에 대한 평가를 참고하여 리만의 과학 전기 (scientific biography) [15]을 저술하였다. 이 책에서는 리만의 원대한 구상을 이해하는데 필요하지 않은 수학적 세부 사항은 제외하고 리만의 업적을 박사학위 논문, 박사학위후 논문 (Habilitationsschrift), 취임 강연 (Habilitationsvortrag) 순으로 소개하였다. 나스타시 (P. Nastasi) 와 타치올리 (R. Tazzioli) 는 [20]에서 정치적 인종적 박해를 받았던 20세기 전반기 이태리 최고의 수학자 레비-치비타의 개인적인 삶과 업적을 그가 남긴 서신을 통하여 연구하였다.

한국수학사학회지에서도 기하학 분야의 특정한 주제나 인물들을 통해 당시 수학의 역사를 살펴보려는 시도가 있었다. 이런 시도로 20세기 기하학과 대수학의 한 획을 그은 업적을 낸 수학자인 엘리 카르탕 (Élie Cartan) 을 통해 20세기 리만 기하학이 어떻게 발전해 왔는지를 조망한 김영욱과 Yuzi Jin의 [14], 수학 거의 모든 분야와 수리물리학 등에 훌륭한 업적을 남긴 독일 수학자 리만 (Riemann) 의 생애와 업적을 살펴보고 리만 방정식에 대해 고찰한 한길준의 [13], 어떤 기하학적 양이 핀치되어 있으면 위상적 또는 미분위상적인 구면이 된다는 구면정리의 발전과 역사를 다룬 조민식의 [6], 비유클리드기하학의 창시자 중 한 사람인 로바체프스키 (Lobachevski) 의 수학철학이 현대철학의 일종의 저수지였음을 보이고 그의 수학철학이 비유클리드기하의 탄생에 기여했음을 밝힌 박창균 [21] 등이 있다.

위 논문들의 연구 대상인 로바체프스키와 리만과 카르탕은 기하학자들 외에게도 잘 알려진 수학자들이지만 기하학을 배우는 학생이나 전공하는 연구자들도 대체로 그들의 업적을 오늘날의 용어로 해석하여 이해하고 있을 뿐 그 당시로 돌아가 왜 그런 발상을 하게 되었는지에 대해서는 생각해보지 않았을 가능성이 많다. 이런 의미에서 위 저자들의 시도는 수학과 관련된 역사와 철학을 수학과 통합하거나 끊어진 수학적 사고의 흐름을 잇는 중요한 역할을 한다고 할 수 있다.

본 논문에서는 이미 잘 알려진 가우스와 리만의 기하학 분야의 업적을 그 후대의 학자들이 이어받아 어떻게 발전시켰는지를 고찰한다. 여기에 등장하는 주된 세 인물인 크리스토펠, 리치 (Ricci), 레비-치비타 (Levi-Civita) 는 위에 언급된 수학자들보다 덜 알려진 사람들이지만 19세기 중반부터 20세기 초까지 미분기하학의 발전에 토대를 닦아 20세기 중반 이후 미분기하학을 비롯한 수학 여러 분야의 혁명적인 발전에 이바지하였을 뿐만 아니라 아인슈타인의 일반상대성이론에 기여하는 등 수학과 물리학이 소통할 수 있는 기회를 제공하였다.

본문에는 지명과 인명 등은 널리 통용되는 영어 표기법을 사용하였고 각주에는 학위를 받은

대학과 학위 논문의 제목 등을 해당 원어로 표기하였다. 인물의 이름은 처음 나왔을 때 한 번만 괄호 안에 영문 표기를 덧붙였다. 이 논문에서는 식을 간단하게 표기하기 위하여 아래 첨자와 위 첨자가 동일할 때 이 첨자에 대해서 더하는 것으로 보는 아인슈타인의 약속을 사용하였다.

미국수학회 (American Mathematical Society) 와 제휴하여 미국 노스 다코타 주립대학 (North Dakota State University) 에서 제공하는 수학 계보 프로젝트 (Mathematics Genealogy Project) [28]를 이용하여 등장하는 인물들의 계보를 확인하였고 인물에 관한 정보는 인터넷 백과사전인 위키피디아 (Wikipedia) [30]와 맥튜터 수학사 기록 보관소 (The MacTutor History of Mathematics Archive) [27]를 참조하였다.

2 크리스토펠

엘윈 브루노 크리스토펠은 1829년 11월 10일 독일의 아헨 근처에서 출생하였다.[2)] 1850년 베를린 대학 (University of Berlin) 에 입학하여 보카르트 (Borchardt), 아이젠슈타인 (Eisenstein), 요아킴스탈 (Joachimsthal), 슈타이너 (Steiner), 디리클레 (Dirichlet) 등의 가르침을 받았는데 이 중 디리클레의 영향이 가장 컸다. 1856년 베를린 대학에서 쿠머 (Kummer) 를 지도교수로 하여 박사학위를 받았다.[3)]

크리스토펠은 박사학위를 받은 후 어머니의 병 간호를 위하여 고향으로 돌아와 3년을 보내게 되는데 이때 디리클레, 리만, 코시 (Cauchy) 등의 업적을 공부하였다. 역설적으로 이 기간에 대학을 떠나 홀로 연구한 것이 그가 학맥에 얽매이지 않고 수학 문제에 독립적으로 접근할 수 있는 기반을 제공하였다.

1859년 크리스토펠은 베를린 대학의 사강사 (Privatdozent) 가 되었고 1862년 취리히 공대 (Polytechnicum in Zürich) 의 학과장으로 전임하였다. 1869년 베를린 공대 (University of Technology of Berlin) 의 교수로서 학문적으로 고향이나 다름없는 베를린으로 다시 돌아오게 되었다. 크리스토펠이 기하학 분야에 남긴 업적인 크리스토펠 기호를 소개한 논문 [7]이 크렐의 논문집[4)]에 실린 것도 이즈음이다.

그러나 희망과 달리 베를린 공대에서 당대의 대가인 바이어스트라스 (Weierstrass), 쿠머, 크로네커 (Kronecker) 등이 포진하고 있던 명문 대학인 베를린 대학과 경쟁하기 어려워 우수한 학생의 유치에 실패하고 실망스러운 나날을 보냈다. 3년 후인 1872년 당시 독일에 속해있던

2) Elwin Bruno Christoffel은 지금은 Monschau로 불리는 Montjoie에서 태어나 70세의 나이로 1900년 3월 15일 독일 제국에 속해있던 Strasbourg에서 사망하였다.

3) Universität Berlin에 제출한 학위 논문의 제목은 De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis이다.

4) Journal für die reine und angewandte Mathematik를 Crelle's Journal 또는 약하여 Crelle이라고 부르는데 크렐은 이 논문집을 창립한 편집자 (재임기간 1826–1856년) 이다. 당시에는 논문집을 편집장의 이름을 따서 부르기도 하였는데 이 저널의 다음 편집장은 보카르트였고 당시에는 보카르트 논문집 (재임기간 1856–1880년) 이라고 불렸다.

스트라스부르크의 스트라스부르크 대학(University of Strasbourg)의 학과장으로 초빙되어 전직한 후 1894년 은퇴할 때까지 여기서 지내게 된다. 이 시기는 프러시아 공화국이 알사스-로렌(Alsace-Lorraine) 지방을 점령한 시기로 대학이 구조 조정을 겪던 때이었다. 크리스토펠은 대학에 새로 수학 연구소를 설립하는 등 매우 의욕적으로 학과장의 직을 수행하였으나 1894년 병으로 학과장 직을 사임하고 은퇴하였다.

수학 계보 프로젝트 [28]에 의하면 크리스토펠은 스트라스부르크 대학에서 박사 학위 학생 두 명을 배출하였다. 그 당시 대분분의 수학자가 했던 것처럼 크리스토펠의 많은 아이디어는 그가 남긴 35편의 논문을 통하기보다는 강의를 통해서 후대에 전해졌다. 크리스토펠은 등각 사상, 크리스토펠-슈바르츠 공식, 디리클레 문제 등 순수수학 분야뿐 아니라 샥 파동, 1차원 개스 흐름 등 응용수학 분야에도 뛰어난 업적을 남겼다. 따라서 [30]에서처럼 크리스토펠을 수학자겸 물리학자로 분류하는 것이 타당하다. 이 논문에서 다룰 주요 업적은 텐서 미분학의 기본이 되는 크리스토펠 기호 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$를 도입한 것이다.[5)]

1869년 크리스토펠은 리만 다양체의 계량의 국소적 동치 문제를 다룬 논문 [7]을 발표하였다. 이는 데데킨트(Dedekind)가 리만의 사후인 1866년 리만의 논문 [25]을 출간[6)]한지 불과 3년만의 일로 크리스토펠은 데데킨트나 베를린의 디리클레를 통하여 리만의 업적을 알고 있었을 가능성이 많다.[7)] 이 논문에서 2차미분형식인 리만 계량의 국소적 동치 문제를 다루면서 크리스토펠 기호라고 불리는 n^3 개의 함수 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$를 제안하였다. 후대의 학자들에 의해 밝혀진 바와 같이 이 논문의 크리스토펠 기호는 공변미분과 평행이동의 개념을 포함하는 역사적인 것이었지만 당시에는 크리스토펠조차 크리스토펠 기호와 이런 기하학적인 개념들과의 연관성이나 유용성을 알아보지 못하였다.

좌표계 (x^i)를 이용하여 표기한 2차미분형식

$$g = g_{ij}(x^k)dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

를 다른 좌표계 $(\tilde{x}^i)$를 이용하여 표현하면

$$\tilde{g}_{kl} = g\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^l}\right)$$

는

$$\tilde{g}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} g_{ij} \tag{1}$$

을 만족한다.

---

5) 이 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$를 제2종 크리스토펠 기호라고 한다. 크리스토펠은 이 양을 $\left\{ {i\,j \atop k} \right\}$로 나타냈는데 이 기호는 리치와 레비-치비타에 의해 완성된 텐서 미분학에서 첨자를 처리하는 규칙(합을 나타낼 때 첨자가 위에 나오는 것과 아래 나오는 것을 무효첨자로 하는 약속)을 만족하지 않기 때문에 $\left\{ {k \atop i\,j} \right\}$로 표기해야 한다. 지금은 크리스토펠 기호로 $\left\{ {i\,j \atop k} \right\}$ 대신 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$를 사용하는 것이 일반적이다. $\Gamma^{\,k}_{i\,j} = g^{kl}\Gamma_{ij\,l}$에 의해 정의되는 $\Gamma_{ij\,k}$를 제1종 크리스토펠 기호라고 하는데 크리스토펠은 $\left[{i\,j \atop k} \right]$로 표기하였다. 이 기호도 텐서 미분학의 첨자 규칙에 위배된다.

6) 아인슈타인의 일반상대성이론이 발표된 이후 1919년 바일에 의해 다시 출간 되었다.

7) 리만이 [25]를 주제로 사강사 취직강연을 한 해는 1854년이다.

크리스토펠은 가우스 [10]의 2차원 곡면 이론을 n차원으로 확장하여 크리스토펠 기호 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$를

$$\Gamma^{\,k}_{i\,j} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} \right)$$

로 정의하였다. (1)에 의해 크리스토펠 기호 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$는

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^{\,h}_{j\,i} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^h} - \widetilde{\Gamma}^{\,k}_{m\,l} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j}$$

를 만족한다. 여기서 $\widetilde{\Gamma}^{\,k}_{i\,j}$는 좌표계 $(\tilde{x}^i)$를 이용한 크리스토펠 기호이다. 따라서 좌표변환 $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, \cdots, x^n)$이 선형인 경우만 크리스토펠 기호 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$가 텐서가 될 변환식을 만족한다.

레비-치비타의 해석에 의하면 크리스토펠 기호를 이용하여 공변미분(covariant derivative)이나 평행성(parallelism)을 정의할 수 있는데 당시 크리스토펠은 크리스토펠 기호가 공간에 부여하는 기하학적인 의미를 해석하는 작업은 하지 않고 2차미분형식의 국소적 동치 문제의 해결에만 집중하였다.

이 2차미분형식의 국소적 동치 문제는 1948년 천(Chern) [4]이 2차미분형식을 일반화한 핀슬러 계량에 대하여 당시 카르탕(Cartan)이나 베왈드(Berwald)가 정의한 접속이 아닌 유클리드 접속을 도입하여 두 핀슬러 계량이 국소적 동치일 필요충분조건을 구하는 문제로 확장하였다. 이때 필요충분조건을 나타내는 불변량이 유클리드 접속으로 표현된다. 이 논문은 현대적인 의미에서의 핀슬러 기하학의 출발점이 되는 매우 중요한 논문이었지만 당시에는 다발에 정의된 접속에 대한 이론이 정립되어 있지 않은 상태이어서 오랫동안 잊혀져 오다가 1992년 천 본인의 해석 [5]와 이후 그의 학생들과의 연구 [1]를 통하여 핀슬러 기하학의 새로운 지평을 열게 되었다. 복소 핀슬러 계량의 대표적인 예가 고바야시(Kobayashi) 계량인데 1996년 천의 학생이었던 파란(Faran) [9]은 복소 핀슬러 해밀토니안이 고바야시 여계량(co-metric)과 국소적 동치일 필요충분조건을 구하는 문제를 해결하였다.

3 리치

그레고리오 리치-쿠바스트로는 1853년 1월 12일 이태리의 북부 도시 루고(Lugo)에서 출생하였다.8) 리치는 1869년 16살의 나이에 로마 대학(University of Rome)에 입학할 정도의 신동이었다. 국내 정세의 영향으로 1년만에 고향으로 돌아갔다가 볼로냐 대학(University of Bologna)을 다녔다. 다시 1년만에 당시 이태리 수학 연구의 중심지이던 피사의 고등사범학교(Scuola Normale Superiore di Pisa)로 전학하여 1875년 베티(Betti)와 디니(Dini)를 지도교수로 하여 박사학위를 받았는데 학위의 주제는 수리물리학 분야이었다.9)

8) Gregorio Ricci-Curbastro는 Lugo di Romagna에서 태어나 1925년 8월 6일 72세의 나이로 Bologna에서 사망하였다. 이 논문에서는 리치-쿠바스트로를 약하여 리치라고 한다.

9) Scuola Normale Superiore di Pisa에 제출한 학위 논문의 제목은 On Fuchs' Research Concerning Linear Differential Equations이다.

리치는 1877–1878년 박사학위후 연구과정을 독일에서 보내며 독일 수학자들의 영향을 많이 받았다. 클라인(Klein)과 브릴(Brill) 등의 강의를 들었고 연구도 주로 리만, 크리스토펠, 리프시츠(Lipschitz), 데데킨트 등 독일 수학자들에게서 영감을 받은 것이었다. 리치는 1879년 피사로 돌아와 디니의 조수로 일하다가 1880년 파두아 대학(University of Padua)의 교수로 임용되어 1925년 사망할 때까지 여기서 지냈다. 수학 계보 프로젝트 [28]에 의하면 리치는 파두아 대학에서 단 한 명의 박사 학위 학생을 배출하였는데 이 학생이 레비-치비타이다.

그의 초기 연구 분야는 수리물리학이었는데 후에 연구 분야를 미분기하학으로 바꾸었다. 당시 가우스와 리만이 미분기하학의 기초를 놓았는데 리치는 1883년부터 1888년까지 2차미분형식의 국소적 동치 문제를 절대미분학을 이용하여 해결하려는 체계적인 시도를 하였다. 이에 관한 첫 논문인 1884년의 [22]는 크리스토펠의 1868년 크렐 논문 [7]의 직접적인 영향을 받은 것으로 리치 자신도 이 논문에서 리만과 리프쉬츠 외에 특별히 크리스토펠에게 빚을 지고 있음을 밝혔다. 리치도 크리스토펠처럼 처음부터 기하학적인 문제 해결을 위해 노력한 것은 아니다. 일반적인 차원의 공간에 대해서 논하기보다 완전히 계산적인 관점에서 대수적으로 연구하였을 뿐이다. 리치의 목표는 n개의 변수에 대한 2차미분형식에 대한 불변량을 얻을 수 있는 추상적인 이론을 얻는 것이었다. 두 2차미분형식이 어떤 좌표변환에 대하여 일치함을 보이기 위해서 크리스토펠이 시도하였던 방법을 따라 첨자가 3개인 크리스토펠 기호와 나중에 리만 텐서라고 밝혀진 첨자가 4개인 기호를 도입하였고 크리스토펠의 알고리듬이 결국 공변미분임을 알게되었다.

결국 리치는 크리스토펠의 체계적이지 않았던 2차미분형식의 국소 동치 문제의 해결 시도를 체계적인 미분학으로 바꾸어 놓았다. 1893년 리치는 [24]에서 처음으로 절대미분학(absolute differential calculus)이라는 용어를 사용하였다. 여기서 '절대'의 의미는 불변량이 좌표계의 선택에 상관없다는 것이다. 리치는 그의 결과를 이태리 밖에 알리기 위하여 1892년 다부(Darboux)의 논문집에 그의 논문 [23]을 게재하였다. 그러나 그의 절대미분학이 널리 알려지게 된 것은 클라인의 5년 전 요청에 따라 클라인의 논문집에 그의 학생이었던 레비-치비타와 공동으로 1900년 [17]를 발표한 후이다. 절대미분학은 이전까지 첨자가 4개인 리만 텐서를 정의하는 데 사용된 매우 복잡한 식을 이용하여 리만 텐서가 실제로 텐서임을 보이는 대신 크리스토펠 기호를 이용하여 얻은 첨자가 3개인 불변량이 텐서임을 보였다.

리치는 크리스토펠 기호를 이용하여 좌표에 대하여 불변인 벡터장의 미분법을 고안하였다. 이 미분을 오늘날 공변미분(covariant derivative)이라고 하는데 이 미분이 좌표에 대해 불변이라는 의미에서 이런 이론을 절대미분법(absolute differentiation)이라고 하였다. 리치는 벡터장 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 에 대하여 크리스토펠 기호 $\Gamma^{\,k}_{i\,j}$ 를 이용하여

$$X^i_{;j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^{\,i}_{k\,j} \tag{2}$$

를 정의하였다. 벡터장 X 를 다른 좌표계 $(\tilde{x}^i)$ 를 이용하여 $X = \widetilde{X}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ 로 표현하였을 때

$$\widetilde{X}^i_{;j} = \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial \tilde{x}^j} + \widetilde{X}^k \widetilde{\Gamma}^{\,i}_{k\,j}$$

가

$$\widetilde{X}^k_{;l} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} X^i_{;j}$$

을 만족하므로 $X^i_{;j}$ 가 좌표계의 선택과 무관한 불변량이다. 리치는 이 불변량을 이용하여 벡터장 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 의 벡터 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 방향으로의 공변미분을

$$\nabla_v X = v^j X^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3}$$

로 정의하였다.

리치는 1884년부터 1894년까지 이 연구를 통하여 오늘날 리치 미분학(Ricci calculus) 이라고 불리는 절대미분학의 기초를 닦았다. 1900년 이후에는 주로 그의 학생이었던 레비-치비타와 공동으로 연구하였는데 가장 중요한 업적이라고 생각되는 1900년 논문 [17]에만 이름 전부인 리치-쿠바스트로 대신 리치를 사용하였다. 이 논문에서 절대미분학을 2차미분형식의 분류에 응용하였다. 리치의 업적의 진가를 당대에는 수학자들 특히 이태리의 수학자들은 알아보지 못하였다. 리치의 절대미분학을 당시 미분기하학자들이 당연히 많이 사용하였을 것처럼 보이지만 리치의 알고리듬으로는 전통적인 방법으로는 얻을 수 없는 새로운 결과를 얻을 수 없었기 때문에 미분기하학자들조차 절대미분학을 외면하였다. 1894년 비앙키(Bianchi)는 그의 유명한 저서인 [2]에서 리치의 결과를 논평하면서 '유용하지만 필수불가결한 것은 아니다' 라고 하였다. 절대미분학이 그 진가를 인정받게 된 것은 아인슈타인이 그의 일반상대성이론에 절대미분학을 이용한 후이다. 절대미분학은 불변량이 현대적 의미의 텐서가 된다는 뜻에서 오늘날 보통 텐서 미분학(tensor calculus)이라고 한다. 텐서 미분학은 20세기 초·중반 미분기하학자들이 계산을 하는 데 필수적인 도구가 되었다.

4 레비-치비타

툴리오 레비-치비타는 1873년 3월 29일 이태리 파두아(Padua)에서 출생하였다.[10)] 1890년 파두아 대학(University of Padua)에 입학하여 1893년 여기서 박사학위를 받았는데[11)] 그의 지도교수는 리치이다. 후에 레비-치비타가 리치와 공동 연구를 통하여 절대미분학을 완성하는 데 이 박사학위 논문이 기초가 되었다. 국제적으로 명성이 있었던 레비-치비타는 로마 대학(University of Rome)의 끊임없는 구애에도 불구하고 1898년부터 약 20년간 파두아 대학에서 학과장직을 유지하다가 1918년 로마 대학으로 이직하였다. 그러나 1차세계대전 이후 국제

10) Tullio Levi-Civita는 1941년 12월 29일 68세의 나이로 로마에서 사망하였다.

11) 1892년에 졸업하고 1893년에 학위 논문이 출간되었다. Università di Padova에 제출한 학위 논문의 제목은 Sugli invarianti assoluti이다.

정세와 자국의 전체주의와 반인종주의가 자유로운 학문 교류를 힘들게 하였다.

레비-치비타는 1922년 런던 왕립학회 (Royal Society of London) 가 수여하는 실베스터 메달 (Sylvester medal) 을 받았는데 그가 최초의 외국인 수상자이었다. 1930년 이 학회의 외국인 회원 (fellow) 으로 선출되었고 1931년 당시 수학 논평을 하는 가장 중요한 논문집인 젠트랄블라트 (Zentralblatt für Mathematik) 의 외국인 위원이 되었다. 1931년 이태리의 모든 교수들은 의무적으로 파시즘에 대한 맹세문에 서명하였는데, 평화주의자였던 그는 이 맹세에 도덕적으로 강력하게 반대하였지만 자신이 처한 현실 때문에 맹세문에 서명할 수밖에 없었다. 당대의 저명 수학자인 볼테라 (Volterra) 등은 이 맹세문에 서명을 거부하여 대학에서 해직되었다.

1932년과 1934년에는 잘 알려진 하다마 (Hadamard) 세미나에서 레비-치비타와 그의 학생들의 업적에 대해 집중적으로 연구하였다. 레비-치비타는 1933년 처음으로 미국을 방문하여 브라운 대학, 프린스턴 대학, 미국 수학회 등에서 일련의 강연을 하였고 1935년에는 소련을 방문하여 모스코바와 키에프에서 강연을 하였다. 1936년 다시 미국을 방문하여 하버드 대학, 프린스턴 대학, 라이스 대학에서 강연을 하였는데 라이스 대학에서 한 인터뷰로 인하여 문제가 생겨 본국으로 소환되었다.[12)]

이태리 파시스트 정부는 1936년 노르웨이 오슬로에서 개최된 제11회 세계수학자대회 (International Congress of Mathematicians) 에 자국의 수학자들이 참여하는 것을 금지하여 레비-치비타도 세계수학자대회에 참가하지는 못했지만 필즈 메달 (Fields medal) 수상자를 선발하는 위원회의 위원으로 임명되어 활동하였다. 이때 첫 필즈 메달이 하버드 대학의 알포스 (Ahlfors) 와 메사추세츠 공과대학의 더글라스 (Douglas) 에게 수여되었다. 1838년 인종법이 제정된 후 레비-치비타는 강제로 논문집 젠트랄블라트의 편집위원직에서 축출되었고[13)] 해외 학회의 참석이 불허되는 등 학문적으로 은퇴 생활을 하게 되었다. 이후 건강이 급격하게 악화되어 심장에 문제가 생겼고 1941년 심장마비로 사망하였다.

레비-치비타는 기하학을 포함한 순수 수학 분야뿐 아니라 응용 수학 분야에도 업적을 남겼는데 그의 주업적은 절대미분기하의 완성이다. 레비-치비타는 1925년 그의 업적을 종합하여 [19] 를 저술하였는데 이 책은 기초 이론, 2차형식과 절대미분학의 두 부분으로 나뉘어져 있다. 이 책의 1926년 영어 번역판은 아인슈타인의 물리학 이론에 대한 응용 편 두 장이 추가되어 세 부분으로 구성되어 있다.

12) 레비-치비타가 해외 여행 중 한 언동은 모두 영사관을 통해 본국 정부로 보고 되었다. 라이스 대학에서 한 인터뷰가 문제되어 본인의 해명에도 불구하고 본국으로 소환되었다. 레비-치비타가 이미 국제적으로 명망을 얻은 수학자이어서 이태리 교육부에서는 그를 정중하게 소환할 것을 파시스트 정부에 요청하였다. 이 여행이 그의 수학계에 대한 사실상 마지막 기여가 되었다.

13) 레비-치비타가 축출된 후 세베리 (Severii) 와 봄피아니 (Bompiani) 가 위원직을 떠맡았다. 이 사건 직후 편집위원장이던 노이게바우어 (Neugebauer) 를 포함하여 주요 편집위원들이 사임하였다. 젠트랄블라트처럼 논문의 초록과 논평을 싣는 논문집은 정치적인 영향력으로부터 자유로워야 한다는 수학계의 중론에 따라 미국 중심의 수학 논평 (Mathematical Reviews) 이 창간되게 되었다.

크리스토펠 기호를 이용하여 2차미분형식의 분류를 연구하던 크리스토펠의 논문 [7]과 리치의 논문 [22]의 영향을 받아 1896년 텐서 미분학과 공변미분에 관한 논문 [16]을 발표하였다. 이 논문에서 처음 공변미분이라는 용어를 사용하였다. 1915년 아인슈타인의 일반상대성이론에 관한 논문 [8]에 리치와 레비-치비타가 발표한 [17]의 절대미분학이 사용되었다.

현대 미분기하학의 관점에서 레비-치비타의 업적은 크리스토펠 기호를 이용하여 리치가 정의하였던 공변미분에 기하학적 의미를 부여한 것이다. 1917년 논문 [18]에서 레비-치비타는 평행 (parallelism) 에 대한 개념을 도입하였다. 두 점 p 와 q 를 잇는 곡선 $c : [0,1] \to M$ 을 따른 벡터장 $X(s)$ 가

$$\nabla_{c'(s)} X(s) = 0 \tag{4}$$

을 만족할 때 벡터장 $X(s)$ 가 곡선 c를 따라 평행이라고 한다. (4)는 (3)에 의해

$$\frac{dX^k}{ds} + \Gamma^k_{ij} \frac{dc^i}{ds} X^j = 0 \tag{5}$$

로 쓸 수 있다. 초기조건 $X(0) = X_0 \in T_pM$ 을 만족하는 미분방정식 (5)의 해 $X(s), 0 \le s \le 1$ 가 존재하므로 곡선 c를 따른 평행이동 (parallel transport)

$$P_c : T_pM \to T_qM$$

을 $P_c(X_0) = X(1)$ 으로 정의한다.

5 결론

크리스토펠이 제안한 크리스토펠 기호 Γ^k_{ij} 는 현대적 해석으로는 리만기하학의 레비-치비타 접속 ∇ 의 계수들이다. 즉 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ 이다. 레비-치비타 접속은 주어진 계량 g와 양립하고 ($\nabla g = 0$) 꼬임이 영인 ($\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$) 접속이다. 접속을 이렇게 공리적으로 정의하는 것은 훨씬 후대의 일로 미분기하학의 역사를 더듬어 보니 이미 100여년 전에 기하학적 의미를 전혀 모르고 크리스토펠 때부터 사용해왔던 것임을 알게 되었다. 현재 사용하고 있는 미분기하학의 용어나 정의에 크리스토펠, 리치, 레비-치비타의 이름이 붙은 것은 이들의 논문이 발표되고 난 훨씬 후의 일이다. 특히 크리스토펠과 리치는 2차미분형식을 분류하는 대수적인 문제에 미분이라는 해석학적인 도구를 사용하려고 하였을 뿐이고 공간과 관련된 기하학적인 의미의 해석은 하지 못하였다. 따라서 이 두 사람을 기하학자라고 분류하기는 어렵다. 반면 레비-치비타는 크리스토펠과 리치가 이룩한 해석학적인 도구에 기하학적인 의미를 부여하고 이를 일반상대성이론과 같은 물리학 분야에도 응용할 수 있도록 한 공로가 있는 미분기하학자라고 할 수 있다. 레비-치비타는 당시 이태리 최고 수학자 중의 한 사람이었을 뿐 아니라 당대 최고의 미분기하학자라고 해도 지나침이 없다.

현대적인 관점에서 공변미분을 생각해 보자. 다양체 M 이 m 차원 유클리드공간 $\mathbb{R}^m$ 속에 등장적으로 매장되어 있을 때 M 위의 곡선 c를 따른 M 의 벡터장 $X(t)$ 를 $\mathbb{R}^m$ 의 벡터장으로

보고 미분을 한 후 M의 접평면으로 수직사영시킨 벡터가 $\nabla_{c'(t)}X(t)$이다. $\mathbb{R}^m$의 크리스토펠 기호는 $\Gamma_{ij}^k = 0$이므로 $\mathbb{R}^m$의 레비-치비타 접속에 의한 공변미분은 보통 미분과 일치한다. 이것을 M으로 국한시켜 M의 접평면으로 수직사영시킨 접속이 M에서 정의된 레비-치비타 접속과 일치한다.

우리가 다루는 공간을 m차원 유클리드공간 $\mathbb{R}^m$ 속으로 등장적으로 매장하지 않고도 이런 이론의 전개가 가능하다는 생각을 처음으로 한 수학자는 바일(Weyl)이다. 뿐만 아니라 바일은 오늘날 우리가 일반적으로 사용하는 다양체의 개념을 정의한 수학자로 이런 의미에서 현대적인 미분기하학의 시작은 바일부터라고 할 수 있다. 바일이 당시 수학의 중심지이던 괴팅엔 대학의 힐버트의 학생 중 가장 재능이 있었다는 디에도네(Dieudonné)의 언급[14)]을 증명하듯이 바일은 수학 전분야에 업적을 남겼다. 그러나 오히려 기하학자들에게는 20세기 후반 4차원 다양체의 연구가 활발해진 후에야 비로서 빛을 보게 된 바일 텐서 정도가 알려졌을 뿐이다. 바일에 대한 수학사적 연구는 또 하나의 논문이 필요한데 연구를 수행하기 위해서는 수학 전분야에 정통해야 할 뿐 아니라 인접 학문인 물리학에 대한 지식도 필요하다.

바일은 아인슈타인이 일반상대성이론을 완성하려고 노력할 때 스위스 취리히의 연방공과대학에서 그를 처음 만나[15)] 그 인연을 미국 프린스턴의 고등연구소까지 이어갔다.[16)] 아인슈타인의 일반상대성이론의 완성은 §4에서 언급한 레비-치비타의 이론 없이는 존재할 수 없을 뿐 아니라[17)] 그 당시 주변의 수학자들의 직간접적인 도움이 필수적이었다. 1905년 특수상대성이론은 기발한 아이디어로 이루어 낸 업적인 반면 일반상대성이론은 여러 해에 걸쳐 시행 착오 끝에 얻은 결과물이다. 이 문제와 관련하여 취리히에서 수학자인 그로스만(Grossmann)과 공동으로 연구하였고 아인슈타인의 1915년 괴팅엔 대학 강연에 영감을 받아 괴팅엔의 수학자들 사이에서 이에 대한 연구가 활발하였다. 특히 힐버트는 아인슈타인에 불과 5일 앞서 그의 장 방정식을 유도해냈다.

노벨상이나 수학의 노벨상 격인 필즈 메달의 수상자를 보면 지도교수의 영향을 많이 받는 경향이 있다. 이 논문에서 언급된 레비-치비타는 리치의 학생이었고 20세기 초 이 두 수학자의

14) 프린스턴의 고등연구소 홈페이지의 바일 소개 [29]

15) 바일의 재임기간은 1913–1930년, 아인슈타인의 재임기간은 1912–1914년이다. 바일은 1930년 힐버트의 후임으로 괴팅엔으로 돌아갔다.

16) 바일은 유태인이 아니지만 바일의 처가 유태인이어서 가족 모두가 인종적인 이유로 박해를 받았다. 오랜 고민 끝에 그의 학문적 고향이라고 할 수 있는 괴팅엔을 떠나 1933년 미국 프린스턴 고등연구소의 정교수가 되었다. 이전에 몇 번 이 연구소의 교수직을 수락하였으나 여러 사정으로 결과적으로 교수직을 거절하게 되었는데 바일이 마지막으로 교수직을 거절한 직후에 연구소의 교수로 임명된 수학자가 폰 노이만(von Neuman)이다. 당시 고등연구소 설립자겸 원장이던 플렉스너(Flexner)는 나치 정권하에 악화되어 가고있던 독일의 상황을 고려하여 다시 바일에게 교수직을 제안하였고 이에 비밀리에 스위스 취리히를 경유하여 미국으로 이주하였다. 이후 1955년 은퇴할 때까지 고등연구소에 머물렀다. 아인슈타인의 고등연구소 재임 기간은 1933년부터 그가 사망한 1955년까지이다.

17) 1915–1917년 아인슈타인은 레비-치비타와 교신하였다. 당시 아인슈타인의 편지를 레비-치비타가 모두 보관하고 있었는데 이를 이용하여 레비-치비타가 아인슈타인에게 보낸 편지도 모두 복원되었다. 이 교신에서 아인슈타인은 레비-치비타를 존경하고 있음을 나타냈다. 1936년 레비-치비타의 미국 여행은 아인슈타인의 초청에 의한 것이었다.

공동 연구는 절대미분학이라는 이론의 탄생으로 결실을 맺었다. 레비-치비타의 수학적 활동 기간인 약 40여 년간 국제적으로 많은 수학자들이 그의 영향을 받았다. 특히 그의 학생 중 한 명은 루마니아에서 미분기하학의 한 분야인 핀슬러 기하학의 초기 발전에 커다란 영향을 미쳤다. 이 주제는 다른 논문에서 다룰 예정이다.

감사의 글 더 좋은 논문이 될 수 있도록 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원 세 분께 감사의 마음을 전합니다. 심사위원들의 조언이 문장을 매끄럽게 하고 작은 잘못까지도 바로 잡는 데 많은 도움이 되었습니다. 이 논문의 전개 부분에 관하여 조언해 주시고 텐서 미분학의 역사에 관한 스트루크(D. Struik)의 논문 [26][18) 을 보내주신 김영욱 교수님께 감사드립니다. 이 논문의 초고를 읽고 더 발전할 수 있는 방향을 제시하여 주신 분들에게도 감사의 말을 전합니다.

References

1. D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*, Springer-Verlag, 2000.
2. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Spoerri, 1894.
3. P. Butzer, An outline of the life and work of E. B. Christoffel, *Historia Mathematica* 8 (1981), 243–276.
4. S. S. Chern, Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler Spaces, *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A* 5 (1948), 95–121.
5. S. S. Chern, On Finsler Geometry, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 314 (1992), 757–761.
6. Cho M. , History and Development of Sphere Theorems in Riemannian Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(3) (2011), 23–35. 조민식, 리만기하학에서 구면정리의 발전과 역사, 한국수학사학회지 24(3) (2011), 23–35.
7. E. Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, *Jour. für die reine und angewandte Mathematik* 70 (1869), 46–70.
8. A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* 49 (1916), 769–822.
9. J. Faran, The Equivalence Problem for Complex Finsler Hamiltonians, *Cont. Math.* 196 (1996), 133–143.
10. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores* 6 (1827), 99–146.
11. M. Giovanelli, The forgotten tradition: how the logical empiricists missed the philosophical significance of the work of Riemann, Christoffel and Ricci, *Erkenntnis* 78 (2013), 1219–1257.

18) 이 논문에서 D. Struik은 본 논문에서 다룬 텐서 미분학의 Ricci와 Levi-Civita에 의한 발전과 대비되는 J. Schouten에 의한 발전의 역사를 개인적인 체험을 포함하여 생생하게 서술하고 있다. D. Struik은 J. Schouten의 학생이다.

12. A. Guerraggio, P. Nastasi, *Italian Mathematics between the two World Wars*, Birkhäuser, 2005.
13. Han G., A Historical Note on Riemann's life and Achievement, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(2) (2011), 61–70. 한길준, 리이만의 생애와 그의 업적에 대한 역사적 소고, 한국수학사학회지 24(2) (2011), 61–70.
14. Kim Y.-W. and Jin Y. , Élie Cartan and Riemannian Geometry of 20th Century, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(2) (2009), 13–26. 김영욱, Yuzi Jin, 엘리 카르탕과 20세기 리만기하학, 한국수학사학회지 22(2) (2009), 13–26.
15. D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826–1866: turning points in the conception of Mathematics*, Birkhäuser, 1997.
16. T. Levi-Civita, Sulle trasformazioni delle equazioni Dinamiche, *Annali di Matematica* 24 (1896), 255–300.
17. T. Levi-Civita, G. Ricci, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Math. Ann.* 54 (1900), 125–201.
18. T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque et conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 42 (1917), 173–205.
19. T. Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, Dover, 1977.
20. P. Nastasi, R. Tazzioli, Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873–1941), *Historia Mathematica* 32 (2005), 203–236.
21. Park C. K. , Lobachevsky's Philosophy of Mathematics and Non-Euclidean Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 21–31. 박창균, 로바체프스키의 수리철학과 비유클리드기하, 한국수학사학회지 24(4) (2011), 21–31.
22. G. Ricci, Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche, *Annali di Matematica pura ed applicata (2)* 12 (1884), 135–167.
23. G. Ricci, Le calcul différentiel absolu, *Bulletin des science mathématiques* 16 (1892), 135–167.
24. G. Ricci, Di alcune applicazioni del Calcolo differenziale assoluto alla teoria delle forme differenziali quadratiche binarie e dei sistemi a due variabili', *Atti dell'Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti* 7 (1893), 167–189.
25. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1867), 1–15.
26. D. Struik, Schouten, Levi-Civita, and the emergence of Tensor Calculus, *The History of Modern Mathematics*, Academic Press, (1989), 99–105.
27. The MacTutor History of Mathematics Archive. 맥튜터 수학사 기록 보관소`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies`.
28. 수학 계보 프로젝트 (Mathematics Genealogy Project) `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php`.
29. H. Weyl in the homepage of the Institute for Advanced Study. 미국 프린스턴 고등연구소 (Institute for Advanced Study) 의 홈페이지의 바일 소개 `https://www.ias.edu/people/weyl`.
30. Wikipedia `http://en.wikipedia.org/wiki`.