한국학교수학회논문집 제 18 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 18, Number 1, 39-60, March 2015

van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 예비교사들의 수학 수업에서 탐구 활동의 활성화 방안 탐색[1)]

황석윤[2)] · 김익표[3)]

본 논문에서는 van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 예비교사들의 수학 수업에서 학생들을 지식 구성의 주체로 만드는 탐구 활동의 활성화 방안을 탐색하고자 한다. 이를 위하여 예비교사들의 수업 지도안과 수업 시연에서 van Hiele의 단계적 교수법의 정보 단계와 안내된 탐구단계에서의 교수 · 학습 상황을 분석한다. 이와 같은 교수 · 학습 상황에서 탐구학습 또는 발견학습의 활성화 가능성을 탐색한다. 특히, 본 연구에서 삼각형의 외심과 내심을 두 도형의 위치관계라는 개념구조 안에서 삼각형과 원의 위치관계를 출발점으로 설정하는 방안을 제안하고 이 제안에 대한 구체적인 실행 방법으로서 "사실1: 삼각형의 외접원은 유일하게 존재한다."와 "사실2: 삼각형의 내접원은 유일하게 존재한다."는 두 가지 사실의 도입과 증명을 van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 새로운 지도방법으로 제시하고자 한다.

주요용어: van Hiele의 단계적 교수법, 정보 단계, 안내된 탐구 단계, 탐구 활동

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

교수 · 학습 과정에서 학생들이 주체가 되어야 한다는 주장(NCTM, 2000)은 수학교육에 관여해 온 많은 사람들로부터 지지를 받아온 학교 현장에서의 핵심 이슈이다. 탐구학습(Freudenthal, 1991; van Hiele, 1986) 또는 발견학습(Bruner, 1960)은 학생들이 주도적으로 활동하면서 스스로 수학적 사실들을 발견하도록 안내하는 구체적인 방법이다. Goos(2004)는 수학적인 사실들이 발견 또는 창조되는 과정을 학생들이 경험할 수 있도록 하는 것이 오스트레일리아 수학교육 개혁주의자들이 추구하는 목표임을 강조했다. 우리나라 수학과 교육과정에서도 교수 · 학습 과정에서 수학의 개념, 원리, 법칙을 학생 스스로 발견하도록 지도하는 방법으로 구체적인 조작 활동과 탐구 활동을 제시하고 있다(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011). 이와 같은 활동들이 학생들의 입장에서 추측, 또는 발견 가능하면서 학생들이 기존에 가지고 있는 스키마(Skemp, 1987)에 쉽게 동화시킬 수 있는 방향으로 제시되어

1) 본 논문은 2010년 대구대학교 학술 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 대구대학교 수학교육과(syhwang@daegu.ac.kr)
3) 대구대학교 수학교육과(kimikpyo@daegu.ac.kr), 교신저자

야 할 것이다. 그러나 우리나라 중등학교의 교과서에 제시된 구체적인 조작 활동이나 탐구 활동들 중에는 개연성이 부족하여 교사의 안내가 없다면 출발이 불가능하다고 생각되는 활동들이 다수 제시되어 있었고, 이것이 본 연구를 수행하려고 작정한 결정적인 계기가 되었다. 연구를 진행하면서 참고한 미국의 교과서도 이 부분에 대해서는 예외가 아니었다. 학생들에게 수학적 지식의 전달보다는 구성 방법을 발견하도록 안내하는 것이 탐구학습 또는 발견학습의 궁극적인 목표이며, 이를 위해서는 교사의 개입을 최소화하는 방향으로 나아가는 것이 바람직할 것이다. 개입을 최소화하는 교사의 역할이 학생 중심의 수학교육을 정착시키는데 있어서 결정적인 역할을 한다는 가설을 바탕으로 학생들이 탐구 활동을 통하여 스스로 지식을 구성하도록 돕는 역할을 수행하기 위한 예비교사 양성교육의 필요성이라는 관점에서 본 연구를 출발하고자 한다. 학생 스스로 수학적 아이디어와 추측을 제시하고 방어하는 탐구-중심 수업의 활성화(Goos, 2004)와 안내된 재발명(Freudenthal, 1991)을 통하여 학생 스스로 수학적 사실을 발견 또는 창조하는 수업의 실현이 수학적 추론과 의사소통을 포함한 수학적 활동을 촉진시킴으로써 우리나라 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서 제시하는 미래 사회 구성원의 핵심 역량인 창의적인 사고 능력, 문제해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력을 함양시킬 수 있을 것이다. 그러나 교수 · 학습 과정에서 학생들이 주체가 되어야 한다는 주장을 뒷받침하는 많은 연구 결과들이 발표가 되더라도 예비교사 교육에서 이와 같은 인식들이 공감대가 형성되면서 확산되지 않는다면 학교현장에서 학생들이 주도적으로 활동하는 수업은 실현되지 않을 것이다. 본 연구에서는 먼저, van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 예비교사들의 수학 수업에서 학생들을 지식 구성의 주체로 만드는 탐구 활동의 활성화 방안을 탐색하고자 한다. 이를 위하여 예비교사들의 수업 지도안과 수업 시연에서 van Hiele의 단계적 교수법의 정보 단계와 안내된 탐구단계에서의 교수 · 학습 상황을 분석한다. 이 교수 · 학습 상황에서 탐구활동 또는 발견학습의 활성화 가능성을 탐색한다. 특히, 삼각형의 외심과 내심을 도형의 위치관계라는 개념구조 안에서, 삼각형과 원의 위치관계를 출발점으로 설정하는 도입을 제안한다. 이 제안에 대한 구체적인 실행 방법으로서 다음 사실의 도입과 증명을 van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 탐구활동으로 활용하는 새로운 지도방법을 제시한다.

사실1: 삼각형의 외접원은 유일하게 존재한다.
사실2: 삼각형의 내접원은 유일하게 존재한다.

실제로 사실1과 2는 강윤수 · 서은정(2009)이 분석활동을 활용한 외심과 내심의 지도 방법에서 언급하고 증명한 내용이다. 본 논문에서는 그들이 제시한 증명을 다소 단순화시킨 증명과 함께 다른 시각에서 외심과 내심의 도입을 제안한다. 이 방법은 삼각형의 외심과 내심에 대하여 교사의 도움 없이는 실행할 수 없는 구체적인 조작활동의 한계를 극복할 수 있는 대안이 될 것이다. 학교 현장에서 교사가 주도하는 수학교육이 아닌, 학생이 주도적이고 창조적으로 활동할 수 있는 수업의 진행은 학생 중심의 탐구 활동에 필수적이다.

2. 연구의 목적 및 연구 문제

본 연구의 방향은 교원양성기관의 예비교사 교육에서 학생이 주체가 되는 교수 · 학습 과

정의 구성에 있어서 van Hiele의 단계적 교수법의 활용을 통하여 탐구활동의 활성화 방안을 탐색하는 것이다. van Hiele(1986)는 기하학습에서 학생들의 수준을 1수준에서 5수준까지의 다섯 단계로 구분하면서 n수준에서 $n+1\,(n=1,2,3,4)$수준으로의 전환을 위한 학습 과정으로서 1단계는 정보(information) 단계로서 학생들이 학습 영역에 친숙해지는 단계이며, 2단계는 안내된 탐구(guided orientation[4]) 단계로서 형성해야 할 서로 다른 관계망을 가진 과제로 학생들을 안내하는 단계이며 3단계는 명료화(explicitation) 단계로서 학생들이 관계를 인식하고, 그것들을 언어로 표현하려고 시도하며, 학습 내용에 수반되는 전문어를 학습하는 단계이며, 4단계는 자유로운 탐구(free orientation) 단계로서 일반적인 과제를 사용하는 관계망에서 자신의 방법을 발견하는 단계이며, 마지막 5단계는 통합(integration) 단계로서 주제에 관해 배운 모든 것과, 자신의 의지대로 이용할 수 있게 된 새로운 관계망을 조망하는 단계이다(우정호 외, 2009 재인용). 이 단계들 중 1, 2단계에서의 교사의 역할이 나머지 단계의 학생 활동에 결정적인 영향을 미친다는 것은 자명하다. 본 논문의 주안점은 학생들을 교수 · 학습 활동의 주체로 만드는 교사의 역할이므로 van Hiele의 단계적 교수법에서 1, 2단계인 정보 단계와 안내된 탐구 단계에 주목하고자 한다. 이를 바탕으로 다음과 같은 연구 문제를 탐색한다.

(1) 예비교사들의 수업 지도안과 수업 시연에서 van Hiele의 단계적 교수법을 바탕으로 설정된 정보 단계와 안내된 탐구 단계를 분석한다. 이 과정에서 학생이 주체가 되는 교수 · 학습 활동이라는 관점에서 제기되는 문제점들을 탐색한다.

(2) 우리나라 교과서와 미국 교과서에 제시된 내용 전개 방식에서 학생들이 지식 구성의 주체가 되도록 돕는 관점에 기초한 공통점 및 차이점을 찾고, 이를 탐구활동의 활성화에 바탕을 둔, van Hiele의 단계적 교수법의 정보 단계와 안내된 탐구 단계에 근거한 교수 · 학습 활동의 구성에 미치는 영향을 분석한다.

(3) 연구 문제 (1)과 (2)의 탐색과 분석을 토대로 지식의 구성과정에서 교사의 개입을 최소화하는 탐구 활동의 활성화 방안을 제시한다.

본 연구에서 정의, 규칙, 알고리즘 등을 먼저 제시하는 교사 주도적인 교수 · 학습 상황으로부터 탈피해서 학생이 주체가 되는 수업의 구성을 위한 van Hiele의 단계적 교수법의 역할을 탐색한다. 수학자들이 새로운 수학적 지식을 창조하는 과정에서 느끼는 발견의 기쁨을 학생이 경험하도록 함으로써 미래 사회 구성원으로서의 학생들의 역량을 함양시킨다는 교육목표를 달성할 수 있을 것이다. 우리나라 교육과정(교육과학기술부, 2011)과 NCTM(1989, 2000)에서 제시하는 문제해결, 수학적 추론, 의사소통, 연결성 등의 수학적인 활동들의 중요성을 강조하는 것을 넘어 수학적 사실들을 탐구하는 과정들을 적절하게 설계해서 학생들에게 제시하는 과정에서 학생 주도적인 수학적인 활동이 이루어지도록 돕는 방법을 찾는 것이 수학교육에 관여해 온 또는 관여하고자 하는 모든 사람들의 궁극적인 목표들 중의 하나일 것이다. 이 목표의 달성에 조금이라도 기여하고자 하는 것이 본 연구의 궁극적인 목적이다.

4) 본 논문에서는 guided orientation을 학생 스스로 활동을 통하여 지식을 구성하도록 돕는 탐구 방향을 안내한다는 관점에서 안내된 탐구로 번역하고자 한다.

Ⅱ. 선행 연구의 고찰

1. van Hiele의 사고 수준 이론과 단계적 교수법

van Hiele 부부의 기하 학습 상황에 대한 연구는 사고 수준 이론이라는 결과로 나타났다. 그는 사고의 상위 수준의 달성을 어떤 조작을 새로운 대상에 적용할 수 있도록 사고의 명령을 수행할 수 있을 때로 정의했다(van Hiele, 1986). 한편, van Hiele(1986)는 사고 수준 이론에서 제1수준과 제2수준, 제2수준과 제3수준의 존재성 여부를 이 수준들 사이의 불연속성의 존재를 밝힘으로써 자신의 주장을 합리화했다. 특히, 제1수준에서 제2수준으로의 전이를 관계망이 없는 수준에서 관계망이 있는 수준으로의 전이로 규정하면서 잘 알려진 도형의 조작적 성질을 적용할 수 있을 때 제2수준에 도달한 것으로 정의했다. 또 제2수준에 도달한 예로서 마름모의 두 대각선이 직교한다는 사실을 통하여 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선이 직교한다는 결론에 이르는 것을 제시했다. 제3수준의 추론은 제2수준의 구조를 다루며, 제3수준에서의 결론은 제2수준의 관계망에서의 연결고리의 존재 또는 비존재에 따라 좌우되지 않음을 주장했다. 어떤 학생이 제3수준에 도달했다는 것은 도형들 사이의 알려진 관계를 조작할 수 있을 때와 도형 전체의 성질을 증명하기 위해 그 도형의 부분적인 성질을 이용할 수 있을 때로 표현했다(van Hiele, 1986). 이 이론에 근거한 국내외 후속 연구의 대부분이 학생들의 기하학적 인지발달 과정에 대한 van Hiele 이론의 입증 여부에 초점이 맞추어져 있다(최현호, 1990; 김남희, 1999; 박지혜, 2000; 이소진, 2001; Mayberry, 1983). 이와 같은 기하학적 사고 수준 이론에서 한 수준에서 다음 수준으로의 이행을 촉진시키기 위한 다섯 단계의 교수 · 학습 과정을 제시했는데, 이것이 앞에서 소개한 van Hiele의 단계적 교수법이다. van Hiele는 마름모의 학습과정을 통하여 자신의 단계적 교수법을 비교적 자세하게 소개하고 있다(van Hiele, 1986).

1단계는 어떤 도형이 제시되고, 그것을 마름모라고 부른다. 학생들에게 다른 도형이 제시되고, 그것이 마름모인지를 묻는다. 2단계에서는 마름모를 대칭축을 중심으로 접는다. 대각선과 각에 관련된 사실들을 인지한다. 3단계에서는 학생들이 마름모의 성질에 대한 자신들의 아이디어를 서로 교환한다. 4단계에서는 마름모의 꼭짓점과 변의 일부가 제시되면 학생들은 마름모를 완성한다. 5단계에서는 마름모의 성질들을 요약하고 기억한다.

앞의 예에서처럼 van Hiele는 상위수준으로의 전환을 위한 방법으로 단계적 교수법을 주로 도입했다. 본 연구에서 van Hiele의 단계적 교수법에 주목한 이유는 첫째, 이 방법이 다양한 수준의 아동들을 지도하는데 있어서 구체적인 방법을 제시하고 있고, 둘째, 예비교사의 입장에서 학생이 지식 구성에 있어서 주체적인 역할을 하도록 돕는 조력자로서의 역할에 바탕을 둔 탐구 활동을 설정하는데 있어서 필요한 방법뿐만 아니라 이론적인 근거를 제시해주기 때문이다. van Hiele가 주장하고 예시한 마름모의 예처럼 반사의 개념을 도입함으로써 다양한 방향으로의 학생 활동이 가능해진다. 명료화 단계에서는 아이디어의 교환을 제시하고 있는데, 이 활동이 의사소통의 개념임은 명백하다. 이와 같이 사고 수준의 상승을 위한 van Hiele의 단계적 교수법은 예비교사들의 탐구 활동 구성에 있어서 지침으로서 기능할 수 있는 이론이다. van Hiele 자신도 지적한 것처럼 안내된 탐구 단계에서 가장 중요한 부분을

차지하는 것이 교사의 역할이다(van Hiele, 1986). 이 단계에서 교사에 의해 제시되는 안내 방법이 학생들의 사고 수준의 상승으로 나타나도록 구성하는 것이 필수적이다. 이것이 본 연구에서 안내된 탐구 단계에서 예비교사에 의하여 제시되는 탐구방법의 탐색에 주목하는 이유이다. 앞에서 제시한 van Hiele의 사고수준 이론이 예비교사에 의하여 학생들에게 제시되는 탐구 활동의 방향을 제시해주는데, 그것은 기존의 알고 있는 수학적 지식들의 관계망을 새로운 수학적 지식의 탐구에 활용하는 것이다.

2. 탐구 또는 발견 학습

본 논문에서는 수업에 관계되는 모든 활동, 즉 지식 구성의 주체가 학생이면서 조력자 또는 안내자로서 교사의 역할이 강조된 학습의 형태를 탐구학습 또는 발견학습으로 정의하면서 지금부터 탐구학습 또는 발견학습과 같이 두 가지 용어로 사용한 것을 탐구학습으로 통일하여 사용하기로 한다. Silver(1993)는 교사와 교과서로부터 자유로우며 교사와 학생이 중심이 되는 수업을 탐구-중심 수업으로 정의하면서 학생들이 제작한 교과서를 수업에 활용하는 몇 가지 사례를 제시했다. Van den Brink(1987)는 초등학교 1학년 학생들의 문제설정 사례를, Streefland(1987, 1991)는 현실적인 수학교육의 사례를, Healy(1993)는 중학교 학생들이 스스로 발견한 기하적인 사실들을 바탕으로 교과서를 구성한 사례들을 제시했다. 본 연구에서는 수업의 운영이라는 측면에 주목하면서 학생들을 탐구학습의 장으로 안내하는 역할에 집중하고자 한다. 다양한 활동을 통하여 학생들 스스로 문제해결에 도달하도록 안내하는 방법을 찾는 것이 앞에서 소개한 사례들과 본 연구의 차이점이다. Elber(2003)는 초등학교 학생들을 대상으로 수직적 수학화의 과정을 경험할 수 있는 탐구 과제를 통하여 제시된 문제를 변형하고 새로운 해결 방법을 제시하도록 안내하는 과정에 참여하는 교사의 역할에 대하여 소개했다. Goos(2004)는 탐구 문화가 형성된 교실의 정의를 학생들 스스로 토론을 통하여 추측을 제시하고 그 추측을 설명하는 활동, 오류의 지적과 수정 활동, 학생들 사이의 수학적인 토론에 의하여 수학적인 사고가 생산되고 검증되는 활동 등이 활성화된 교실로 규정했다. 본 연구에서는 앞에서 제시된 탐구 학습의 사례 및 탐구 문화가 형성되도록 안내하는 예비교사의 역할을 설정하기 위하여 van Hiele의 단계적 교수법의 정보 단계와 안내된 탐구 단계의 활용을 탐색한다.

Ⅲ. 연구 설계 및 방법

1. 연구 대상 및 연구 방법

본 연구에서 예비교사들의 구체적인 조작 활동 및 탐구 활동에 대한 인식 및 설정을 분석하기 위하여 경상북도 소재 D대학교 사범대학 수학교육과 3학년 학생 46명을 연구 대상으로 선정하였다. 이들을 앞에서와 같이 예비교사로 부르기로 한다. 예비교사들은 중등교사 자격 취득을 위한 기본이수과목 중에서 조합및그래프이론을 제외한 교과내용학의 모든 학점을 취득한 상태로 2013년 10월초부터 12월말까지 약 3개월을 연구 기간으로 설정하였다. 본 연구자가 수학교육론을 수강하는 46명을 대상으로 van Hiele의 사고 수준 이론 및 단계적 교

수법을 지도한 후, 각자가 자유롭게 선택한 주제로 van Hiele의 단계적 교수법을 활용한 수업에 대한 1차 지도안을 작성하게 했다. 그 다음 본 연구자와 예비교사 각자가 작성한 지도안에 대한 토론을 진행했다. 토론을 진행한 이유는 작성된 지도안에 제시된 내용만으로는 학생들의 탐구 활동과 관련된 전반적인 상황들을 파악할 수 없었기 때문이다. 또 토론을 통하여 수정을 필요로 하는 경우 수정 사항이 반영된 2차 수업 지도안을 작성하게 한 다음, 수업행동분석실에서 20분 동안의 수업을 실시하도록 했다. 수업 시간을 20분으로 제한한 것은, 수업 실행에 관한 전반적인 내용보다는 예비교사들의 탐구 활동에 대한 인식 및 설정을 확인하는 것이 중요하다고 판단했기 때문이었다. 수업 지도안 작성에서 도입 부분인 전시학습과 동기 유발 부분을 정보 단계로, 전개 부분을 안내된 탐구 단계로 설정하도록 했다. 예비교사들에게 특히 강조한 내용은 수업에서 적절한 탐구 활동의 설정을 통하여 학생들이 주도적인 역할을 하고 교사는 조력자로서 역할을 하는 수업 지도안의 작성이었다. 구체적인 조작 활동 또는 탐구 활동을 설정한 예비교사들 중에서 같은 주제인 외심과 내심을 다룬 3명의 예비교사들을 선정하였다. 이들 3명의 예비교사들에 대해서는 수업 지도안과 수업 시연을 통하여 나타난 동기 유발, 탐구 활동을 위한 교사의 역할 수행 등과 관련된 전반적인 상황들을 파악하기 위하여 인터뷰를 실시했다. 교사의 역할 수행에 대한 인터뷰에서 질문 내용은 우리나라 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서 제시된 교수 · 학습 방법과 NCTM(2000) 교육과정에서 제시된 6학년에서 12학년 규준에서의 교사의 역할을 주로 참고로 하였다.

2. 수업 지도안 작성 및 분석

예비교사들은 수업 지도안 작성에 대한 구체적인 지도를 받은 경험이 없었기 때문에 모두에게 중등학교 현장에서 주로 사용하는 일반적인 수업 지도안 예시를 배부했다. 배부된 수업지도안 형식을 바탕으로 van Hiele의 단계적 교수법을 활용한 1차 수업 지도안 작성을 안내하는 수업을 1시간 동안 실시하면서 질문과 토론을 통해 예비교사들의 지도안 작성에 대한 이해를 도왔다. 수업 내용은 중등학교 수학교과 내용 중에서 자유롭게 선택하도록 했다. 1차 지도안 작성 결과 예비교사들 대부분이 지식을 구성하는 과정에 학생들이 주도적으로 참여하며 활동하도록 하는 설정에 대한 수업 활동을 지도안에 나타내지 못했다. van Hiele의 단계적 교수법에 대한 설명과 예시들을 제시하고 설명하면서 정보 단계와 안내된 탐구 단계에 대한 세부적인 설명을 했지만 대부분의 예비교사들의 지도안에는 자신이 선택한 주제를 교과서에 제시된 내용 그대로 전달하는 패턴을 보였다. 학생들이 현재 가지고 있는 수학적 지식을 이용한 탐구 활동을 통하여 수학적인 사실들을 추측하고, 자신의 추측을 정당화하기 위한 아이디어를 찾을 수 있도록 설정된 탐구 활동을 거의 찾아 볼 수 없었다. 이것은 예비교사들을 대상으로 학생들이 현재 가지고 있는 수학적 아이디어를 바탕으로 새로운 아이디어를 개발하도록 돕는 교사의 역할(NCTM, 2000)에 대한 교육이 절실함을 느끼게 하는 부분이었다. <표 Ⅲ-1>은 46명의 연구 대상 학생 중 수업 지도안 작성에서 탐구 활동의 내용이 학생들이 활동할 수 있도록 설정한 7명에 대하여, 그 수업 주제와 탐구 활동 방법을 간략하게 나타낸 것이다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상 학생들의 수업 주제 선정 및 탐구 활동

수업 주제	인원수	탐구 활동 방법
삼각형의 중점연결정리	1	·모눈종이 위에 밑변 $\overline{BC}$의 길이는 고정시키고 점 A는 다르게 선택한 삼각형들의 두 변의 중점을 직접 연결하는 활동을 제시함.
삼각형의 내심과 외심	3	·삼각형 모양의 종이를 이용하여 세 변의 수직이등분선과 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 확인하는 활동을 제시함.
부채꼴의 중심각과 호의 길이 및 넓이와의 관계	2	·주어진 원 모양의 종이에서 중심각이 일정한 부채꼴 모양을 접는 활동을 통하여 중심각의 크기와 호의 길이 및 부채꼴의 넓이와의 관계를 알도록 함.
닮음비를 이용하여 닮은 도형의 넓이와 부피 구하기	1	·주어진 두 닮은 삼각형을 제시해서 닮음비와 넓이의 비 사이의 관계를 추측하도록 활동을 제시함. ·주어진 두 닮은 직육면체를 제시해서 닮음비와 부피의 비 사이의 관계를 추측하도록 활동을 제시함.

7명의 지도안에 제시된 탐구 활동의 대부분은 구체적인 조작 활동이 주를 이루고 있었고, 교사가 탐구방법을 일방적으로 제시하고 결과를 확인하는 방식이기 때문에 학생이 여러 가지 탐구 방법을 확인하고 연결함으로써 새로운 수학적 사실을 얻게 되었을 때의 통찰이나 기쁨을 느끼게 하는 역할에 대해서는 제한적일 수밖에 없을 것이다. 한편 <표 Ⅲ-1>의 예비교사들 중에서 가장 많은 수인 3명이 삼각형의 내심과 외심을 수업 주제로 선정했고, 지금부터 이 학생들의 수업지도안을 중점적으로 분석하기로 하였다. <표 Ⅲ-2, 3>은 손**의 수업 지도안 중에서 동기유발과 탐구활동 부분만 발췌한 것이다.

<표 Ⅲ-2 > 손**의 수업 지도안 중 동기유발 부분

단계 (시간)		수업 요항	교수 · 학습 활동		수업 형태 및 자료	도달점 및 지도상의 유의점
			교사	학생		
도입	3분	동기유발	·삼각형의 내심과 관련된 동영상을 시각적으로 제시하여 삼각형의 내심에 대한 흥미를 유발한다. ▶(동영상 내용) 지도의 세 지점에서 같은 거리에 있는 보물을 찾는 방법	·동영상을 보고 삼각형의 내심의 존재성과 필요성에 대해서 생각한다.	동영상 문답식 PPT#3	·동영상과 사진을 통해 내심의 존재를 알 수 있도록 지도한다.

탐구학습에서의 동기유발은 정보 단계로서 흥미를 넘어 탐구 활동의 설정에 관계되는 정보를 제공하거나 교사로부터 제시되는 탐구 활동이 예측 또는 납득이 되는 방식으로 설정되어야 하는데 <표 Ⅲ-2>의 지도안에서의 동기유발은 탐구 활동과 연결되지 않을 뿐만 아니라 내심에 대한 내용도 아니었다.

<표 Ⅲ-3 > 손**의 수업 지도안 중 탐구 활동 부분

전개	7분	탐구 학습 <활동하기>	· <활동하기>의 색종이를 접고 탐구하는 동안 학생들을 순회하면서 지도하고 학생들이 내심의 성질을 알 수 있도록 지도한다. ▶<본문내용, 활동하기> 색종이를 잘라 예각삼각형 AB C를 만들고 다음과 같이 활동한다. ① 변 AB와 변 AC가 겹치도록 접었다가 펼쳐서 각 A의 이등분선을 만든다. ② 변 AB와 변 BC가 겹치도록 접었다가 펼쳐서 각 B의 이등분선을 만든다. ③ 두 이등분선의 교점을 I라고 하자.	· 삼각형 모양의 색종이를 접어보면서 내심의 존재성을 확인하고, 두 내각의 이등분선의 교점에서 각 변에 이르는 거리가 같음을 탐구한다. · 다양한 교구들을 활용해서 다양한 특징들을 탐구한다.	활동식 및 문답식 색종이, 가위, 자, 직각 삼각자, 컴퍼스 PPT#4	· 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 확인하게 해서 내심의 성질을 추측 해 볼 수 있게 한다.

교사는 현재의 수학적 지식 또는 아이디어를 토대로 새로운 지식 또는 아이디어를 개발하도록 도와주는 역할을 해야 한다는 NCTM(2000) 교육과정의 주장에 따르면 동기유발이 탐구 활동을 자연스럽게 유도하는 방식으로 안내되어야 한다. 또 교사는 현재의 수학적 개념 또는 아이디어를 새로운 수학적 지식과 연결시키려는 의도를 가지고 전시 학습과 동기유발을 제시하여야 한다. 교육과정 전반에 걸쳐있는 수학적 개념과 아이디어를 연결해서 하나의 스키마(Skemp, 1987)가 형성되도록 도와줌으로써 학생 개개인의 스키마가 자연스럽게 성장할 수 있도록 역할을 해야 할 것이다. <표 Ⅲ-3>의 지도안에 제시된 탐구 활동은 학생 입장에서는 영문도 모르고 종이를 접는 활동을 해야만 하는 상황이다. 이와 같은 탐구 활동은 안내된 탐구 단계의 활동으로서는 역할을 할 수는 있지만 이와 관련된 자유로운 탐구 단계로의 확장은 학생들 입장에서는 쉬운 문제가 아니다. 내심과 외심을 주제로 선택한 다른 3명의 예비교사들도 손**가 제시한 것과 거의 같은 탐구 활동을 제시하고 있었다<부록 1 참고>. 물론 학생들을 탐구하도록 자극하고, 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 향상시킬 수 있는 과제를 제시하는 방식으로 탐구 활동을 설정하는 것은 쉬운 일이 아닐 것이다. 실제로 예비교사들 대부분이 우리나라 교과서에서 제시하고 있는 동기 유발을 탐구 활동으로 제시하고 있었다. <표 Ⅲ-4>는 이들 중 1명의 지도안에서 탐구 활동 부분을 발췌한 것이다.

<표 Ⅲ-4 > 최**의 수업 지도안 중 탐구 활동 부분

단계 (시간)		수업 요항	교수 · 학습 활동		수업 형태 및 자료	도달점 및 지도상의 유의점
			교사	학생		
전개	7분	탐구 학습 <활동하기>	· 종이를 잘라서 삼각형 모양을 만들게 한 후 추와 클립에 연결된 실을 여러 부분에 연결시켜 차례로 매달아 보고 만나는 점을 찍어보는 활동을 시킨다.  · 삼각형에 대해서도 만들어 보고 GSP로 확인해 본다.	· 각자 만든 모양으로 활동한 후 만나는 점을 손가락으로 중심을 잡아 본다. 이 현상에 대해서 서로 이야기 나누어 본다.	활동식 및 문답식 색종이, 가위, 자, 직각삼각자, 컴퍼스 PPT#4	· 세 변의 이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 확인하게 해서 무게중심의 성질을 추측해 볼 수 있게 한다.

이 탐구 활동은 학생들을 대상으로 놀이를 통한 흥미를 일으킬 수는 있겠지만 현재의 수학적 지식을 바탕으로 탐구하면서 다양한 발견 전략들을 찾고 추측하면서 자신의 주장을 입증하는 방식이라고 보기는 어렵다. 그리고 이와 같은 방식의 탐구 활동은 학생들을 자유로운 탐구 단계로 안내하는 역할을 할 수 없을 뿐만 아니라, 관계되는 자유로운 탐구 단계로 안내하더라도 학생 스스로 탐구하면서 해결책을 찾도록 하는 것은 힘들 것이다. 무게중심은 삼각형에만 국한되는 문제는 아니다. 삼각형에서 시작하기 전에 밀도가 일정한 길이를 가진 가는 막대에서 무게중심을 찾도록 안내하는 것에서 시작해야 할 것이다. 그 다음 무게중심과 관련된 다양하고 중요한 실생활 사례들을 제시함으로써 동기유발을 한 다음 얇은 삼각형 모양의 판에서 무게중심을 찾도록 안내한다면 학생들은 삼각형뿐만 아니라 다양한 모양의 도형에 대한 무게중심에 대해서 생각하기 시작할 것이다. 이제 밀도가 일정한 길이를 가진 가는 막대에서 무게중심을 이용하여 삼각형의 무게중심을 찾도록 탐구 활동을 설정한다면 학생들은 이 과제를 해결하기 위해 활동하는 것은 물론이고 사각형, 오각형, 나아가 입체도형으로 무게중심의 개념을 확장하려는 시도가 자연스럽게 이루어질 것이다.

Ⅳ. 연구 결과

1. van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 예비교사들의 수업 지도안과 수업 시연 분석

1차 수업 지도안을 작성하게 한 결과 van Hiele의 단계적 교수법을 활용한 탐구 수업이라는 개념 자체를 인식하지 못했을 뿐만 아니라 학생 스스로 탐구하도록 유도하는 조력자로서

의 역할에 대해서도 접근조차 못하는 예비교사들이 대부분이었다. 예비교사들의 수업 지도안 및 수업 시연에서 탐구활동은 주로 개념 설명을 위한 간단한 활동으로 제시되고 있었다. 모든 예비교사들의 지도안이 일반적인 전체수업의 틀을 유지하면서 작성되었고 탐구 활동 시간으로 5분에서 10분 사이를 배정했다. 시간 배정만 참고하더라도 예비교사들의 탐구 활동에 대한 인식 수준을 파악할 수 있었다. 예비교사들은 Bruner(1960)와 Freudenthal(1991)의 발견학습 또는 안내된 재발명과 같은 수학교육 이론들을 배우고 경험했지만 학생들을 대상으로 하는 수업에서는 일반적이면서 중 · 고등학교 시절에 경험했던 수업 방식으로 돌아가는 또는 수학교육 이론을 실제 수업에 적용하지 못하는 경향을 보였다. 1차 수업 지도안 작성 후, 보충 설명과 토론을 통한 자세한 안내를 했음에도 불구하고, 개연성이 부족한 탐구활동의 설정으로 학생 스스로 지식을 구성한다는 목표에는 도달 할 수 없는 2차 수업 지도안이 제출되었다. 특히, 내심과 외심을 주제로 선택한 3명의 예비교사들의 2차 수업 지도안에서의 탐구 활동은 1차 수업 지도안에서의 탐구 활동과 거의 변화가 없었다. 이제 삼각형의 내심과 외심을 탐구 주제로 선택한 3명의 예비교사들과의 인터뷰 내용을 소개하고자 한다.

다음은 본 연구자(T로 표기)와 예비교사들 3명과의 인터뷰 내용을 발췌한 것이다. 여기에 소개되는 인터뷰는 본 연구자가 교육과정 관련 문헌들(NCTM, 2000)에 명시된 교사의 역할에 대한 충분한 토론을 거친 후 실시하였다. 이를 통하여 예비교사들 대부분이 전형적으로 가지고 있는 탐구 활동에 대한 인식을 알 수 있었다.

T: 본인이 작성한 지도안 및 수업 시연에서의 동기 유발 및 탐구 활동의 구성에 대하여 느낀 점이나 소감을 교육과정 관련 문헌들(NCTM, 2000)에 명시된 다음의 교사의 역할 1에서 5까지와 관련하여 이야기 해주세요.

역할 1: 학생들이 주어진 과제의 해결을 반성하는 과정을 통하여 그 과제를 변형, 정교화, 합리화, 또는 명확화 하는 방법을 생각하도록 구성해야 한다.

역할 2: 학생 스스로 수학적인 사실을 추측하게 하고 그 추측을 입증 또는 반박하도록, 자료를 일반화하고 조직할 수 있는 과제를 제시해야 한다.

역할 3: 주제들 사이의 수학적 아이디어와 교육과정 전체에 산재해 있는 수학적 아이디어를 연결하도록 과제를 제시해야 한다.

역할 4: 현재의 수학적 지식을 바탕으로 새로운 수학적 지식을 능동적으로 구성하도록 안내해야 한다.

역할 5: 수학적 추론, 의사소통, 연결성 등의 수학적 활동이 활발하게 일어나도록 수학적으로 가치 있는 과제 및 탐구 활동을 설정해야 한다.

손**: 먼저, 수업 지도안을 작성하기 위해 참고로 했던 교과서의 틀을 깬다는 것이 부담스러웠습니다. 그리고 기존 교과서에 맞춘 지도안만 접해보았으므로 새로운 탐구를 한다는 의미를 충분히 이해를 못했고 교육과정에 대한 심층적인 공부가 부족해 수학의 전체를 보는 안목이 충분히 길러지지 못한 것 같습니다. 그러다보니 단원과 단원, 내용과 내용의 연계성을 생각하지 못했습니다. 또 사범대학에서 수강한 대부분의 전공과목 수업 형태가 정리, 증명, 문제풀이 순으로 진행되고, 임용고사라는 시험을 위한 공부를 하다 보니 탐구 활동의 필요성을 느끼지 못했습니다.

권**: 저희가 중고등학교를 다닐 때의 수업은 탐구 활동은 건너뛰고 본시 수업에서 배워야할 이론만을 다뤘던 수업이 많아서 탐구 활동의 중요성을 잘 몰랐습니다. 그러나 잘 구성

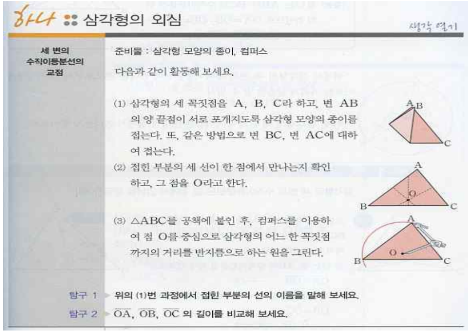
된 탐구 활동은 전시 수업에서 배웠던 내용을 활용하여 본시 수업에서 배워야 할 내용의 원리를 이해할 수 있고, 원리를 통하여 내용을 배우므로 학생들의 학습에 큰 영향을 미칠 것이라는 생각이 들었습니다.

박**: 4년 동안 전공 수학을 배웠지만 그 배운 내용이 중학교, 고등학교 수학과 별개라 생각해서 중등교육과정의 수학을 하나로 통합하기 어려운 것 같습니다. 또한 수업 시연은 교사용 지도서에 나와 있는 대로 하는 것이 가장 정석이라 생각해 새로운 방법을 연구하려 하지 않았습니다. 그리고 현실적으로 학교에서 너무 많은 탐구 활동 시간을 주는 것이 불가능하다고 생각해 교사와 같이 하는 활동으로 바꾸었습니다. 일단, 전공수학과 중ㆍ고등학교 수학이 별개가 아닌 연결된 부분임을 알고, 중등수학의 연결성에 더 많은 시간을 할애하도록 노력해야 할 것 같습니다.

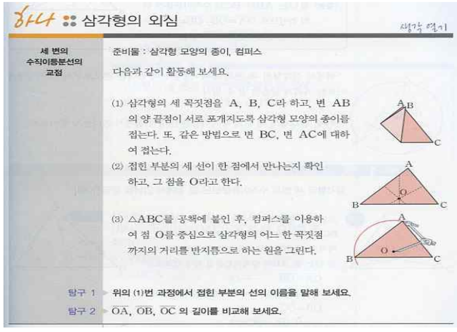
인터뷰를 한 3명의 예비교사들의 공통된 의견은 참고로 한 교과서 또는 교사용 지도서에 있는 내용과 범위를 초월하여 수업을 진행한다는 생각을 할 수 없었으며, 중ㆍ고등학교, 심지어 사범대학에서도 학생들 스스로 지식을 구성하는 탐구 활동이 바탕이 된 수업을 받아본 적이 거의 없을 뿐만 아니라, 여러 가지 이유로 인하여 그 수업을 통하여 수학적 추론, 의사소통, 연결성 등의 수학적 활동의 활성화를 안내하는 역할에 대하여 고민할 여유가 없었음을 밝혔다. 스스로 지식을 구성하는 경험을 하지 못한 예비교사가 현장에서 학생들을 지도할 때, 학생 스스로 지식을 구성하도록 하는 수업의 설정에 소극적일 것이라는 것은 당연하다. 지금까지 예비교사들의 지도안 및 수업시연 분석에서 나타난 특징은 첫째, 대부분의 예비교사들이 탐구학습 또는 발견학습이라는 용어와 교육과정에서 구체적 조작이나 탐구 활동이라는 용어를 들어왔지만 중ㆍ고등학교 학생들을 대상으로 하는 수업에서는 교과서에 제시된 내용을 효과적으로 전달하는데 집중하는 경향을 보였다. 둘째, 현재의 수학적 지식을 새로운 수학적 지식과 연결하는 방식으로 과제 또는 탐구활동을 구성함으로써 현재의 수학적 지식을 바탕으로 새로운 수학적 지식을 탐구할 수 있도록 하는 조력자로서의 역할 구현을 위한 구체적인 방법에 대한 접근 및 인식이 부족했다. 셋째, 주어진 자료를 조직하고 일반화하도록 하며, 귀납적 추론뿐만 아니라 연역적 추론까지 다양한 방식으로 추측하고 그에 대한 정당성을 입증하거나 반박을 요구하도록 탐구활동이 구성되어야 한다(NCTM, 2000)는 사실에 대한 인식에서도 부족한 점이 많았다. 넷째, 수업에 참여하는 학생들이 스스로 탐구활동을 구성하도록 역할을 하는 경우는 전혀 찾아볼 수 없었다. 교사에 의존적인 학생들이 스스로 지식을 구성한다는 것은 어려울 것이다. 스스로 탐구방법 또는 전략을 결정하는 과정에서 의사소통, 추론, 문제해결과 같은 수학적 활동이 활발하게 일어날 수 있을 것이며 이를 통한 문제의 해결은 새로운 통찰과 진정한 발견의 기쁨으로 학생들을 안내할 것이다.

2. 우리나라와 미국 교과서의 비교 분석

3명의 예비교사들이 제시한 내심과 외심의 탐구 활동은 우리나라 교과서에 제시된 탐구 활동과 거의 유사한 형태였다.

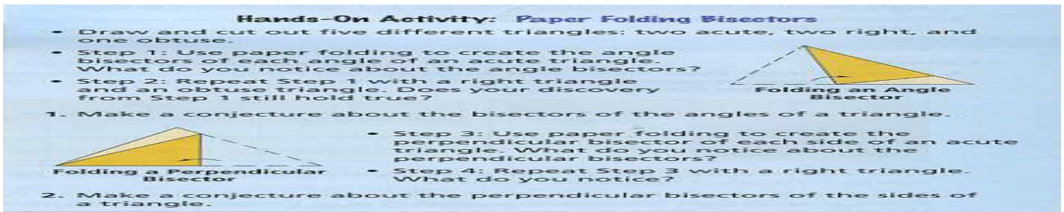


<그림 Ⅳ-1 > 외심에 관한 탐구 활동 예시



<그림 Ⅳ-2 > 내심에 관한 탐구 활동 예시

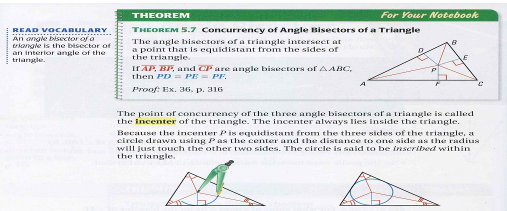
실제로 분석 대상 2007년 개정 수학과 중학교 2학년 교과서 16종(강신덕 외 5인, 2010; 김원경 외 6인, 2010; 김홍종 외 3인, 2010; 박규홍 외 4인, 2010; 박영훈 외 5인, 2010; 박윤범 외 3인, 2010; 박종률 외 5인, 2010; 신항균 외 3인, 2010; 이강섭 외 4인, 2010; 이준열 외 5인, 2010; 송근화 외 5인, 2010; 유희찬 외 7인, 2010; 윤성식 외 5인, 2010; 정창현 외 4인, 2010; 정상권 외 6인, 2010; 최용준 외 5인, 2010) 모두 예비교사들이 설정한 탐구 활동과 같이 삼각형 모양의 종이를 접는 활동을 통하여 내심과 외심을 도입하고 있었다. <그림 Ⅳ-1>과 <그림 Ⅳ-2>는 분석 대상 우리나라 교과서 중 내심과 외심에 대한 탐구 활동 내용 일부를 발췌한 것이다. 이 탐구 활동들은 교사의 안내를 통해서만 활동이 이루어지도록 설계되어 있었다. 심지어 나중에 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 증명하기 위해 이용해야하는 방법까지도 제공해 주고 있다. 너무 많은 사실들이 미리 제공됨으로써 학생들의 수학적 활동인 수학적 추론, 의사소통, 문제해결 등이 원천적으로 차단되는 결과를 초래할 수 있을 것이다. Prentice Hall Mathematics course 1, 2, 3(Charles, R et al., 2008) 등과 같은 미국의 중학교 교과서에서는 내심과 외심을 다루지 않고 있었다. 분석 대상 3종 미국 고등학교 교과서 중 Prentice Hall Mathematics Geometry(Bass et al., 2009) 교과서는 우리나라 대부분 교과서에서 도입하고 있는 삼각형 모양의 종이를 접는 활동을 통하여 외심과 내심을 도입하고 있었다.



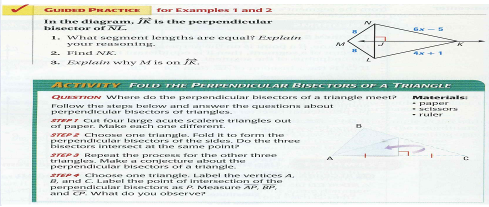
<그림 Ⅳ-3 > Prentice Hall Mathematics Geometry에 제시된 탐구 활동 예시

McDougal Littell Geometry (Larson et al., 2007) 교과서는 삼각형의 세 변의 수직이등분선과 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 사실에 주목하면서 주어진 삼각형의 외접원과 내접원을 소개했다. Glencoe McGraw-Hill Mathematics Geometry (Cummins et. al., 2008) 교과서는 삼각형의 세 변의 수직 이등분선, 중선, 수선, 세 내각의 이등분선과의 관계

를 찾아보도록 함으로써 내심과 외심에 대하여 탐구하도록 설정하였다. <그림 Ⅳ-3>은 Prentice Hall Mathematics Geometry에 제시된 내심과 외심에 대한 탐구 활동의 예시이다. Prentice Hall Mathematics Geometry에 제시된 탐구 활동에서도 세 변의 수직 이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 추측하도록 유도하고 있기는 하지만 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 추측하는 것이 목적인 상황에서 그 목적을 이루도록 하는 방법의 제시가 근거 없이 일방적으로 제시되는 방식은 학생들에게 발견의 기쁨이나 희열을 주지 못한다. <그림 Ⅳ-4>와 <그림 Ⅳ-5>는 McDougal Littell Geometry 교과서에 제시된 내심과 외심에 대한 탐구 활동 일부를 발췌한 것이다.

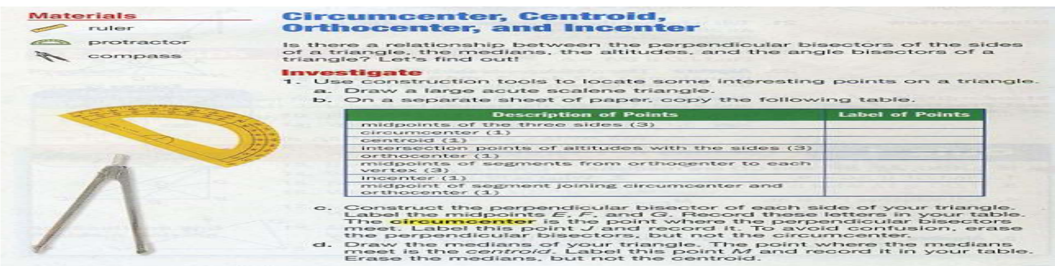


<그림 Ⅳ-4 > McDougal Littell Geometry에 제시된 내심 탐구 활동 예시



<그림 Ⅳ-5 > McDougal Littell Geometry에 제시된 외심 탐구 활동 예시

<그림 Ⅳ-6>은 Glencoe McGraw-Hill Mathematics Geometry(Cummins, 2008) 교과서에 제시된 외심과 내심에 대한 탐구활동 내용 일부를 발췌한 것이다. McDougal Littell Geometry 교과서에 제시된 외심 관련 내용은 우리나라 교과서와 Prentice Hall Mathematics Geometry에 제시된 탐구 활동과 유사했다. 내심은 각의 이등분선에 대한 내용을 제시한 후 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 증명하는 방법으로 제시되고 있었다. 외심에 대한 탐구활동은 앞에서 소개한 우리나라 교과서에서 채택하고 있는 방법과 마찬가지로 주로 삼각형 모양의 종이를 접는 활동을 탐구 활동으로 제시 하고 있었다. 그러나 Prentice Hall Geometry 교과서와 McDougal Littell Geometry 교과서에서는 내심에 대한 개념 설명을 한 후 문제를 풀이하는 방식을 채택하고 있었다. Glencoe McGraw-Hill Mathematics Geometry 교과서는 삼각형의 세 변의 수직 이등분선, 중선, 수선, 세 내각의 이등분선과의 관계를 찾아보도록 함으로써 내심과 외심에 대하여 탐구하도록 설정하였다.



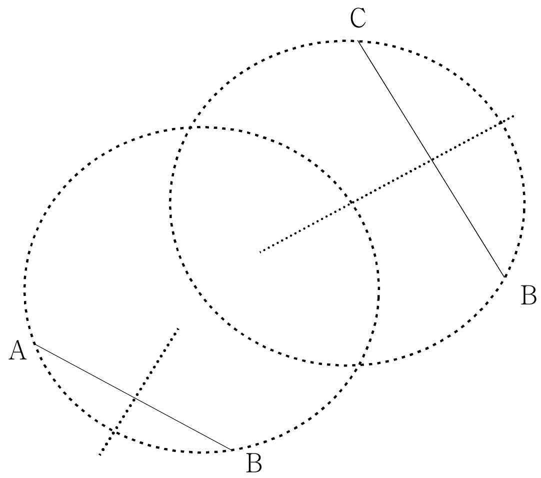
<그림 Ⅳ-6 > Glencoe McGraw-Hill Mathematics Geometry에 제시된 탐구 활동

3. van Hiele의 단계적 교수법에 근거한 교수 · 학습 상황에서 탐구활동의 활성화 방안

학생들에게 기존에 배웠던 수학적 개념과 아이디어들을 확장함으로써 가능하면 스스로 새로운 탐구 주제를 찾을 수 있도록 지도한다는 견지에서 본 연구자는 전영배 외(2011)가 제시한 의미에 초점을 맞춘 외심과 내심의 정의를 바탕으로 두 도형의 위치 관계에서 출발하는 접근을 제안하고자 한다. 2007년 개정 중학교 1학년 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에서 두 도형의 위치 관계, 즉 두 직선의 위치 관계, 원과 직선의 위치 관계, 두 원의 위치 관계를 가르칠 것을 명시하고 있다. 두 도형의 위치 관계라는 큰 틀에서 원과 삼각형의 위치 관계를 출발점으로 설정해서 시작한다면 학생들은 향후 위치 관계라는 큰 틀에서 지금까지 배운 다양한 도형들을 도입하여 새로운 탐구 주제를 찾는 시도를 할 수 있을 것이다. 이와 같은 시도는 수학을 연결된 전체로 이해하도록 하는 이점뿐만 아니라 삼각형의 세 변의 수직이등분선과 세 내각의 이등분선 개념이 학생 스스로 발견할 수 있는 주제가 되도록 안내할 수 있고 삼각형의 세 변의 수직이등분선 또는 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 학생 스스로 추측할 수 있도록 안내할 수 있다. 실제로, 삼각형과 이 삼각형의 외접원이 두 도형의 위치 관계라는 큰 틀 안에서 제시되면 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 사실을 학생이 직관적으로 이해할 수 있다. 다음 사실들을 정리 1, 2로 부르기로 하자.

정리1. 삼각형의 외접원은 유일하게 존재한다.

증명. 삼각형 ABC의 인접하는 두 변 AB, BC를 현으로 가지는 원에 대하여 생각한다. 현 AB의 수직이등분선 위의 모든 점은 선분 $\overline{AB}$를 현으로 가지는 원의 중심이다. 마찬가지로 현 BC의 수직이등분선 위의 모든 점도 선분 $\overline{BC}$를 현으로 가지는 원의 중심이다.

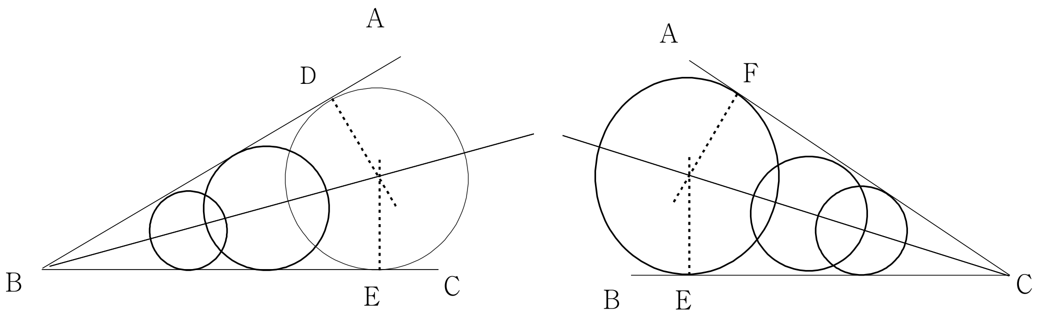


<그림 Ⅳ-7> 현의 수직이등분선

이제, 현 AB의 수직이등분선과 현 BC의 수직이등분선의 교점을 O라 하면 O는 선분 $\overline{AB}$를 현으로 가지는 원의 중심이면서 선분 $\overline{BC}$를 현으로 가지는 원의 중심이 된다. 그런데 이 두 원의 반지름의 길이는 $\overline{OB}$로 서로 같다. 따라서 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OB}$인 원은 두 선분 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 현으로 가지는 유일한 원이다. 즉, 삼각형 ABC의 외접원은 유일하게 존재한다.

정리2. 삼각형의 내접원은 유일하게 존재한다.

증명. 삼각형 ABC에서 ∠ABC의 이등분선 위의 모든 점은 두 변 AB와 BC에 접하는 원의 중심이고 ∠BCA의 이등분선 위의 모든 점은 두 변 BC와 CA에 접하는 원의 중심이다<그림 Ⅳ-8>. 따라서 ∠ABC의 이등분선과 ∠BCA의 이등분선의 교점을 I라고 하면 I는 두 변 AB와 BC에 접하는 원의 중심인 동시에 두 변 BC, CA에 접하는 원의 중심이다. 즉, 중심이 점 I이고 반지름의 길이가 점 I에서 BC에 이르는 거리인 원은 삼각형 ABC의 세 변에 동시에 접하는 유일한 원이다.



<그림 Ⅳ-8> 각의 이등분선

예비교사들은 현의 수직이등분선이 원의 중심을 지난다는 사실과 각의 이등분선 위의 점에서 각 변에 이르는 거리가 같다는 사실을 바탕으로 정리1과 정리2를 van Hiele의 단계적 교수법을 활용하여 탐구하도록 학생들을 안내할 수 있다. 이와 같은 탐구활동 과정에서 외심과 내심은 자연스럽게 도입되는 개념이다. 우리나라 중학교 1학년 기하 영역에서 선분의 수직이등분선 위의 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 서로 같음을 이용하여 주어진 선분의 수직이등분선을 작도하도록 제시하고 있다. 2007 개정 수학과 교육과정 교과서에서는 중학교 3학년에서 현의 수직이등분선에 관한 내용을 다루고 있다. 그러나 중학교 1학년에서 직선과 원의 위치 관계와 삼각형의 합동을 다루고 있기 때문에 수학을 연결된 전체로 이해한다는 측면에서는 현의 수직이등분선 개념을 1학년에서 다룰 때, 단점보다는 장점이 많을 것이다. 내심에 관한 내용도 우리나라는 중학교 1학년에서 각의 이등분선 위의 점에서 각의 두 변에 이르는 거리가 같음을 배운다. 따라서 삼각형의 두 각의 이등분선의 교점에서 세 변에 이르는 거리가 같다. 그러므로 정리2와 같이 이 교점을 원의 중심으로 하고 세 변에 이르는 거리를 반지름으로 하는 원이 주어진 삼각형의 내접원이 된다는 사실을 추측하도록

안내할 수 있을 것이다. 삼각형과 원의 위치 관계에서 삼각형의 내접원과 외접원을 도입하여 두 원의 중심과 삼각형의 세 변의 수직 이등분선, 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점과의 관계를 찾아보도록 안내하는 과정에서 내심과 외심에 대하여 탐구하도록 설정하는 방식은 학생이 교수 · 학습 상황에서 주도적으로 활동할 수 있는 설정의 한 예가 될 수 있을 것이다. 지금까지의 논의를 바탕으로 본 연구자는 학생이 지식의 구성 과정에서 주체적으로 활동할 수 있도록 설계된 내심, 외심과 관련된 동기 유발과 탐구 활동을 제안하고자 한다. <표 Ⅳ-1>는 동기유발 부분에 대한 내용이다.

<표 Ⅳ-1 > 수업 지도안 동기유발 부분

단계 (시간)		수업 요항	교수 · 학습 활동		수업 형태 및 자료	도달점 및 지도상의 유의점
			교사	학생		
도입	2분	동기 유발	·1학년 과정에서 배운 원과 직선의 위치관계, 두 원의 위치관계를 상기시키면서 다양한 원과 삼각형의 위치관계에 서 원의 중심과 삼각형의 세 변 또는 세 꼭짓점 사이의 관계를 찾도록 하는 과정에서 탐구 활동을 자극 한다. 이는 향후 다양한 도형의 위치관계에 대한 탐구 주제를 학생들이 찾도록 하는 부분이다. ·삼각형 모양의 시계를 만드는 활동, 깨진 둥근 모양의 접시를 복원하는 문제, 어떤 지역에서 원 모양의 도형 위에 위치 한 집들과 같은 거리에 있도록 소방서를 설치하는 실생활 문제를 내용을 탐구하는 과정에서 해결 할 수 있다고 학생들의 동기를 유발시킨다.	·수업 내용에 흥미를 가지며, 삼각형과 원의 위치 관계에 대하여 관심을 가진다.	문답식 PPT#3	· 학생들이 수업내용에 흥미를 가질 수 있도록 지도한다.

1학년 과정에서 배운 원과 직선의 위치관계, 두 원의 위치관계를 상기시키면서 원과 삼각형의 위치 관계에 대한 탐구 활동 자극한다. 좀 더 시간 여유가 있다면 학생들 스스로 다양한 두 도형의 위치 관계를 탐색하는 과정에 원과 삼각형의 위치 관계를 주제로 선정하도록 하는 것이 바람직 할 것이다. 다양한 두 도형의 위치 관계를 찾으면서 삼각형과 원의 위치 관계를 생각하는 동안 문제해결, 수학적 추론, 의사소통과 같은 수학적 활동들은 자연스럽게 이루어질 것이다. 학생들 스스로 현재의 수학적 개념 및 아이디어와 새로운 수학적 개념을 연결하도록 의도된 동기 유발을 제시함으로써 탐구 활동을 하는 과정에 새로운 수학적 개념을 인지하도록 설계했다. 삼각형의 내접원과 외접원을 원과 삼각형의 위치 관계라는 관점으로 해석함으로써 도형들 사이의 위치 관계라는 개념 구조(Skemp, 1987)가 형성된다. 이를 통하여 새로운 수학적 개념이 탐구 활동을 통한 학생들의 창조적인 결과물인 동시에 기존

지식이 학생들의 탐구 활동에 활용되는 강력한 수학적 힘을 학생들이 경험하게 될 것이다. 한편 이와 같은 탐구 활동을 통하여 얻은 결과들을 활용하여 실생활 문제를 해결하게 함으로써 서로 다른 수학적 개념들의 연결성이 가져오는 수학적 문제해결의 힘을 학생들이 경험하는 것은 향후 수학 학습에 있어서 긍정적인 부분이 될 것이다. 즉, 원과 삼각형의 연결을 통하여 다양한 현실적인 문제들의 해결을 경험한 학생들은 서로 다른 수학적 개념과 아이디어들을 연결하려고 노력할 것이다. <표 Ⅳ-2>은 탐구 활동 부분에 대한 내용이다. 교사가 학생 스스로 지식을 구성하도록 조력자로서의 역할을 한다는 것은 다양한 상황에 대한 효율적인 대처 능력을 가지고 있어야 한다. 본 연구자가 제시한 수업 지도안(<표 Ⅳ-2>)은 탐구 주제를 다소 제한한 부분이 있다.

<표 Ⅳ-2 > 수업 지도안 탐구 활동 부분

단계 (시간)		수업 요항	교수 · 학습 활동		수업 형태 및 자료	도달점 및 지도상의 유의점
			교사	학생		
전개	7분	탐구 활동	·두 원의 위치 관계에서는 원의 중심이라는 기준점이 존재했다는 사실을 상기시키면서 삼각형과 원의 위치 관계에서 삼각형은 어떤 점을 기준점으로 잡아야 할지 생각하게 한다. 필요하다면 다음의 순서대로 탐구하도록 안내할 수도 있다. ① 한 원에서 현의 수직이등분 위의 점들과 각의 이등분선 위의 점들이 가지는 특징을 탐색하게 한다. ② 삼각형의 각 변을 현으로 가지는 원으로부터 세 변을 동시에 현으로 가지는 원의 존재성에 대하여 탐구하도록 안내한다. 각의 이등분선 위의 점에서 각의 두 변에 접하는 원으로부터 삼각형의 세 변에 내접하는 원의 존재성에 대하여 탐구하도록 안내한다.	·주어진 삼각형의 각 변을 현으로 가지는 원으로부터 세 변을 동시에 현으로 가지는 원의 존재성과 각의 이등분선 위의 점에서 각의 두 변에 접하는 원으로부터 삼각형의 세 변에 내접하는 원의 존재성을 구체적인 조작 활동(삼각형 모양의 종이접기 또는 GSP와 같은 소프트웨어를 이용한 탐색)을 통하여 추측한다. ·학생들은 구체적인 조작활동을 상기하면서 증명 방법을 찾는다. ·원의 중심과 외심, 내심을 바탕으로 두 도형의 위치 관계에서 얻을 수 있는 결과들을 탐구한다.	개별 활동 및 탐구 학습지	·자유롭게 탐구하도록 학생들에게 충분한 시간을 주면서, 학생활동에 대한조언을 자제한다.

좀 더 열린 주제로 시작한다면 다양한 탐구 주제로 발전시킬 수 있을 것이다. 이를테면 원과 사각형의 위치 관계, 더 나아가 두 도형의 위치 관계가 아니라 세 도형 이상의 위치 관계에 대한 탐구 주제로 확장시킬 수 있을 것이다. 특히, 본 연구자들이 제시한 외심과 내심의 도입 방법과 강윤수 · 서은정(2009)이 제시한 분석적 방법과의 차이점은 선분의 수직이

등분선과 각의 이등분선을 다루는데 있다. 선분의 수직이등분선과 각의 이등분선은 중학교 1학년 과정에서 충분히 다루고, 외심과 내심의 도입과정에 이를 활용하는 방법과 외심과 내심을 도입하는 과정에 현의 수직이등분선과 각의 이등분선을 발생적 원리에서 분석적으로 도입하는 방법이 학생지도에 미치는 영향의 비교 분석은 후속 연구를 통하여 수행되어야 할 것이다.

Ⅳ. 결 론

수학교육에 관여해 온 많은 사람들로부터 지지를 받아온 주장이 교수 · 학습 과정에서 학생이 주체가 되어야 한다는 것이다. 이것이 우리나라 교육과정과 미국의 교육과정 관련 문헌들(NCTM, 1989, 2000)에서 주장하는 수학적 힘을 느끼게 하는 수학교육의 목표 달성에 필수적인 부분이라고 생각한다. 본 연구는 연구 대상 예비교사들 46명의 수업에서 탐구활동에 대한 설정 및 인식을 탐색하기 위하여 자유롭게 선택한 주제로 van Hiele의 단계적 교수법에 바탕으로 둔 수업을 실시하도록 하였다. 이 과정에서 대부분의 예비교사들의 탐구 활동에 대한 인식 및 운영은 본 연구자가 생각한 탐구 활동과 차이가 있었다. 특히, 삼각형의 내심과 외심을 주제로 선택한 3명의 인터뷰 결과는 많은 시사점을 제공해 주었다. 예비교사들은 교과서에 있는 내용을 어떻게 하면 학생들에게 잘 전달할 수 있을지에 대해서 주로 관심을 가졌고, 학생 스스로 탐구 하면서 지식을 구성하는 것에 대한 의미를 제대로 파악하지 못하는 학생들이 대부분이었다. 실제로 예비교사들이 설정한 탐구 활동 대부분이 중 · 고등학교 교과서에서 특정 주제의 도입을 염두에 둔 동기 유발 내용을 그대로 제시했다. 그리고 이와 같이 제시된 탐구 활동도 주로 교사의 주도적인 통제에 기반을 둔 활동이다. 교사의 통제에 기초한 활동과정에서 학생들 스스로 자료를 찾고 추론하고 추측하며, 의사소통과 협력을 포함한 수학적 활동이 활발하게 일어나도록 기대하기는 어려울 것이다. 또 이것은 교사에 의하여 탐구 활동의 방향이 정해지고 학생들은 정해진 방향에 따라 활동하면서 탐구 활동의 결과를 확인하는 과정이므로 학생 주도적인 수학적 활동을 기대하기는 어려운 구조적인 문제점을 가지고 있다고 볼 수 있다. 이와 같은 문제점들의 해결책으로 Skemp(1976)가 제안한 개념 구조인 스키마 이론에 바탕을 둔 수학적 개념들 사이의 광범위한 연결성의 구축을 제안하고자 한다. 이 연결성의 구축과정에 van Hiele의 단계적 교수법이 기능하도록 설정하고, 탐구 활동을 통하여 전체적인 연결성을 학생들이 조망할 수 있도록 교실 수업이 설계되어져야 할 것이다. 이것은 학생들에게 수학을 연결된 전체로 이해하게 하는 결정적인 방법이다. 이 주장의 구체적인 예시를 제시하기 위한 주제로 삼각형의 내심과 외심을 선택했다. 우리나라 중학교 2학년 교과서와 미국 고등학교 교과서에 제시된 삼각형의 내심과 외심 개념이 다른 수학적 개념과 다소 분리된 주제로 다루어지고 있었다. 따라서 본 연구자는 삼각형의 내심과 외심에 대한 동기 유발과 탐구 활동을 도형의 위치 관계라는 큰 틀에서 출발할 것을 제안했다. 이 제안은 우리나라 교육과정에 산재해 있으면서 서로 분리된 개념들인 것처럼 소개되어지고 있는 많은 수학적 개념들을 묶어 하나의 큰 개념 구조를 형성하게 할뿐만 아니라, 이를 통하여 발전적인 내용으로의 탐구를 유도하는 이점이 있다. 도형의 위치 관계에서 출발해서 삼각형과 원의 위치 관계라는 주제를 바탕으로 삼각형의 내심과 외심 개념을 찾기까지의 과정에는 수학적 추론, 의사소통, 연결성 등 많은 수학적 활동들이 포함되어 있다. 오랜 세월 학교 현장에서 미래 구성원들과 함께할 예비교사들에게 앞에서 소개한 창의적인 사고 능력, 문제 해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등은 필수적이다. 이와 같은 역량의 함양을 위한 효과적인 교육을 위하여 교사의 역할과 수학 교육의 목표 달성

에 대한 더 많은 연구와 적극적인 관심이 필요할 것이다. 이와 더불어 중ㆍ고등학교 교과서도 수업에 참여하는 교사와 학생이 열린 사고를 가지고 탐구하며, 도전적이며 발전적인 과제를 찾을 수 있도록 개선이 필요하다. 수학을 연결된 전체로 이해시키는 활동으로 수학 수업이 자리 잡을 수 있도록 단원 내에 있는 주제들끼리의 연결뿐만 아니라 단원과 단원에 걸쳐있는 수학적 개념 또는 아이디어들을 연결시킴으로써 새로운 수학적 사실들이 발견되고, 이 과정에서 수학적 추론, 의사소통, 문제해결과 같은 수학적 활동이 자연스럽게 발현되도록 안내할 수 있는 교과서가 필요할 것이다.

참고 문헌

강신덕ㆍ홍인숙ㆍ김영우ㆍ이재순ㆍ전민정ㆍ나미영 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 교학사.

강윤수ㆍ서은정 (2009). 삼각형의 내ㆍ외심 지도 방법. 학교수학 12(3), 171-188.

교육인적자원부 (2007). (http:/www.moe.go.kr). 2007개정 수학과 교육과정.

교육과학기술부 (2011). (http:/www.moe.go.kr). 2009개정 수학과 교육과정.

김남희 (1999). Van Hiele 이론을 기초로 한 중학교 기하학습에 관한 연구. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

김원경ㆍ조민식ㆍ김영주ㆍ김윤희ㆍ방환선ㆍ윤기원ㆍ이춘신 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 비유와 상징.

김홍종ㆍ계승혁ㆍ오지은ㆍ원애경 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 성지출판.

박규홍ㆍ최병철ㆍ안숙영ㆍ김준식ㆍ유미경 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 동화사.

박영훈ㆍ여태경ㆍ심성아ㆍ김선화ㆍ이태림ㆍ김수미 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.

박윤범ㆍ남상이ㆍ최소희ㆍ홍유미 (2010). 중학교 수학 2. 경기도: 웅진싱크빅.

박종률ㆍ유종광ㆍ이창주ㆍ오혜정ㆍ이미라ㆍ박진호 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 도서출판 디딤돌.

박지혜 (2000). Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하인지 수준과 교재 선정에 관한 연구. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

송근화ㆍ정윤석ㆍ유기종ㆍ우종목ㆍ이홍기ㆍ이용경 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 새롬교육.

신항균ㆍ이광연ㆍ윤혜영ㆍ이지현 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 지학사.

유희찬ㆍ류성림ㆍ한혜정ㆍ강순모ㆍ제수연ㆍ김명수ㆍ천태선ㆍ김민정 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 미래엔 컬처그룹.

윤성식ㆍ조난숙ㆍ김화영ㆍ조준모ㆍ장홍월ㆍ김해경 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 더텍스트.

이강섭ㆍ왕규채ㆍ송교식ㆍ이강희1ㆍ안인숙 (2010) 중학교 수학 2. 서울: 도서출판 지학사.

이소진 (2001). 반 힐 모형에 따른 교과서의 재구성 및 그에 따른 학습효과. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

이준열ㆍ최부림ㆍ김동재ㆍ송영준ㆍ윤상호ㆍ황선미 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 천재교육.

전영배ㆍ강정기ㆍ노은환 (2011). 삼각형의 외심, 내심의 정의에 관한 고찰. 학교수학14(3), 355-375.

정상권ㆍ이재학ㆍ박혜숙ㆍ홍진곤ㆍ서혜숙ㆍ박부성ㆍ강은주 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 금성출판사.

정창현ㆍ김창동ㆍ이치형ㆍ민정범ㆍ김지용 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 대교.

최용준 · 한대희 · 박진교 · 김강은 · 신태양 · 배명주 (2010). 중학교 수학 2. 서울: 천재문화.
최현호 (1990). Van Hiele의 기하인지 발달이론과 증명능력에 관한 기초 연구. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.
Van Hiele, P.M., 우정호, 박교식, 남진영, 강현영, 임재훈, 권석일, 박선용, 최지선 역 (2009). 구조와 통찰/ 피에르 마리 판 힐러 지음. 서울: 경문사.
Bass, L. E., Charles, R. I., Hall, B., Johnson, A., & Kennedy, D. (2009). Geometry. New Jersey: Pearson.
Bruner, J. (1960). The Process of Education. New York: The Harvard University Press.
Charles, R. I., Illingworth, M., McNemar, B., Mills, D., Ramirez, A., & Reeves, A. (2008). Mathematics Course 1, 2, 3. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
Cummins, J., Kanold T., Kenney, M., Malloy, C., & Mojica, Y. (2008). Geometry: Concepts and App;ications. New York: Glencoe.
Elbers, E. (2003). Classroom Interaction as Reflection: Learning and Teaching Mathematics in a Community of Inquiry. Educational studies in mathematics, 54, 77-99.
Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Kluwer: Dordrecht.
Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. Journal for Research in Mathematics Education, 35(4), 258-291.
Healy, C. C. (1993). Creating miracles: A story of student discovery. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
Larson, R., Boswell, L., Kanold, T. D., & Stiff, L. (2007). Geometry. Boston: McDougal Littell.
Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1), 58-69.
NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards For School Mathematics. Reston, VA: Author.
NCTM (2000). Principles and Standards For School Mathematics. Reston, VA: Author.
Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi; N. Nohda; K. Shigematsu; F.-L. Lin (Eds.), Proceedings of the 17th PME Conference Vol. I (pp. 66-85). University of Tsukuba, Tsukuba.
Skemp, R. R. (1987). The psychology of learning mathematics: Expanded American Edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Streefland, L. (1987). Free production of fraction monographs-In: J. C. Bergeron; N. Herscovics; C. Kieran (Eds.), Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume I (pp. 405-410). Montreal: Canada.
Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
Van den Brink, J. F. (1987). Children as arithmetic book authors. For the learning of mathematics 7 (2), 44-48.
Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press, Inc.

Activation method of inquiry activity for students playing a leading role in teaching and learning by applying the van Hiele's learning process by stages in undergraduate pre-service teachers' mathematics class[5)]

Hwang Seok-Yoon[6)] · Kim, Ik-Pyo[7)]

Abstract

It is one of the fundamental issues that students in teaching and learning process should take a proactive role in school mathematics. Inquiry or discovery learning in school mathematics is the specific method for students to participate in lessons on their own initiative, which is supported by many scholars in mathematics education. In this paper, we investigate pre-service teachers' perspectives of Inquiry or discovery learning by intensively analyzing information and guided orientation in teaching practice. From this, we find the direction of the pre-service teacher training program for carrying out pre-service teachers' role to help students to take a proactive role in school mathematics.

Key Words : van Hiele's learning process by stages, information, guided orientation, inquiry activity

Received February 24, 2015
Revised March 22, 2015
Accepted March 28, 2015

5) This research was supported by the Daegu University Research Grant 2010.
6) Daegu University(syhwang@daegu.ac.kr)
7) Daegu University(kimikpyo@daegu.ac.kr), Corresponding author

<부록 1>

<표 Ⅳ-1 > 권**의 1차 수업 지도안 일부

단계 (시간)		수업 요항	교수 · 학습 활동		수업 형태 및 자료	도달점 및 지도상의 유의점
			교사	학생		
도입	2분	동기유발	·보름달 만들기  ·가려진 부분을 찾기 위해서 외심과 외접원이 필요함을 인지시키고, 오늘 수업을 하고 난 뒤 외형을 직접 복원해 보자고 말한다.	·수업 내용에 흥미를 가지며, 외심과 외접원의 쓰임에 대해 관심을 가진다.	문답식 PPT #3	·학생들이 수업내용에 흥미를 가질 수 있도록 지도한다.
전개	7분	탐구활동	·삼각형의 외심과 외접원은 어떻게 구할 수 있는지 알아보자고 말한 후 색종이 활동을 시작한다. ▶삼각형 모양의 색종이의 두 꼭짓점이 만나도록 접었다 펴는 과정을 3번 반복하게 한다. ▶색종이 위의 선이 모두 한 점에서 만남을 확인하게 한 뒤 그 점에서 삼각형의 꼭짓점까지의 거리를 컴퍼스로 재보도록 한다.	·교사의 지도대로 색종이를 접는다. ·세 선이 모두 한 점에서 만나는 것, 그 점에서 삼각형의 꼭짓점까지의 거리가 모두 같은 것에 흥미를 느끼고, 왜 그렇게 되는지 호기심을 갖는다. ·활동지의 문제에 답하며 여러 가지 사실을 알게 된다.	개별 활동 및 탐구 탐구 학습지	·색종이 접기를 통하여 외심의 성질을 시각적으로 확인한다.