East Asian Math. J.
Vol. 31 (2015), No. 2, pp. 167-188
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2015.016

사다리꼴 넓이 공식의 변환에 관한 연구

A study on the conversion of the formula for the area of a trapezoid

정 영 우

ABSTRACT. Formula for the area of a trapezoid is an educational material that can handle algebraic and geometric perspectives simultaneously. In this note, we will make up the expression equivalent algebraically to the formula for the area of a trapezoid, and deal with the conversion of a geometric point of view, in algebraic terms of translating and interpreting the expression geometrically. As a result, the geometric conversion model, the first algebraic model, the second algebraic model are obtained. Therefore, this problem is a good material to understand the advantages and disadvantages of the algebraic and geometric perspectives and to improve the mathematical insight through complementary activity. In addition, these activities can be used as material for enrichment and gifted education, because it helps cultivate a rich perspective on diverse and creative thinking and mathematical concepts.

Ⅰ. 서론

사다리꼴의 넓이 공식을 유도하는 문제는 심화학습을 위한 문제나 창의성 문제로 자주 다루어진다. 이 문제들은 주로 주어진 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 다양한 방법으로 찾으라거나, 공식을 주고 다양한 방법으로 이 공식을 유도하라는 것이다[1]. 이 경우 답안은 주로 그림으로 표현된 후, 식으로 번역되고, 식의 정리를 거쳐 사다리꼴 공식을 유도하게 된다. 즉, 사다리꼴의 변형이라는 기하학적인 상황에서 넓이 공식이 되는 대수적 동치식들을 찾는 것이다. 그런데 답안의 그림이 가

Received January 28, 2015; Accepted February 25, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification: 97C10
Key Words: the formula for the area of a trapezoid(사다리꼴 넓이 공식), the algebraically equivalent expression (대수적 동치식), the geometrical conversion(기하학적 변환)

1) 김정민(2008), http://www.knnedu.com 참고

©2015 The Youngnam Mathematical Society
(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

지는 의미나 사용된 수학적 개념 등에 대한 고찰 없이 결과론적으로 지도와 평가가 이루어지다 보니 문제 활용의 교육적 효과와 의의가 제대로 평가받지 못하고 있다.

한편, 中込雄治・黒木伸明(2003)은 기하학적 관점에서 넓이를 구하는 방법의 상관도를 만들기도 하였는데, 등적변환에 의해 사다리꼴이 변해가는 형태에 초점을 두고 있다. 이처럼 한 관점에서의 고찰은 나름의 의의가 있으나 이 문제가 가지는 또 다른 측면을 반영하지 못한다.

이 문제는 실제로 대수적 동치식과 기하학적 해석과의 관계에 대한 이해를 도와주므로 대수적 관점에서의 '식의 조작'과 기하학적 관점에서의 '공간의 조작'이라는 두 관점의 장・단점을 인식할 수 있는 소재이며, 나아가 두 관점의 상호작용도 경험할 수 있는 좋은 소재이다. 상급학년으로 올라갈수록 대수적 동치관계에 의해 맥락이 없는 수학을 다루게 되는데, 오늘날의 수학교육은 수학화나 스토리텔링 같이 맥락 속에서 수학적 개념을 본질적으로 이해하는 것이 강조되고 있다. 대수적 동치관계는 추상화나 현대수학의 이해에는 유용하지만, 실세계 문제의 해결에서는 맥락적 요소를 이해하는 것이 전제가 되므로 두 관점이 상호보완적으로 활용될 필요가 있다.

본 연구에서는 예비중등교사들을 대상으로 공식의 다양한 유도는 추구하나 결과론적인 해석만을 하던, 즉 기하학적 관점으로부터 대수적 관점으로의 흐름을 벗어나, 사다리꼴의 넓이 공식에 대한 대수적 동치식을 먼저 구성하고 그 식에 맞는 기하학적 상황들을 구현하고 이를 분석하게 하였다.

본 연구에서 예비교사를 대상으로 한 것은 수업의 설계자는 교사이며, 교사의 인식과 이해 수준이 교육의 질에 중요한 영향을 미치기 때문이다. 또한 교사는 다양한 수업소재를 활용하게 되는데, 그 소재를 직접 경험하고 분석하는 것이 실제적인 안내가 되기 때문이다.

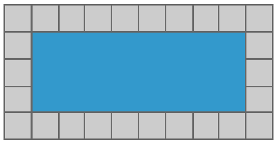
Ⅱ. 연구 내용과 결과

1. 연구 대상 및 방법

본 연구는 2011년부터 2014년까지 부산 소재 ○○대학교의 예비교사 69명을 대상으로 시행되었다. 이들에게는 NCTM(2000)의 다음 문제를 통해 대수적 동치식들이 갖는 맥락적・과정적 의미는 다를 수 있으며, 사용되어지는 수학적 개념이나 차원도 다를 수 있음을 인식시켰다. 그리고 두 관점의 이해는 학생들의 사고수준과 수학적 능력의 이해에 도움을 줄 수 있음을 이해하게 하여 다음에 주어질 활동의 동기를 부여하였다. 그러한 차이에 대한 이해는 수학이 가지는 맥

락적·과정적 측면과 추상적·형식적 측면 사이의 장·단점을 알게 하며, 그들 사이의 관계를 연결시켜 주어 수학의 본질과 효용에 대해 인식하게 한다. 또한 이러한 활동은 '창의적인 사고력을 길러 주는 교과(교육부, 1992)'로서의 수학을 경험시킨다.

문제. 직사각형 수영장이 세라믹 타일로 둘러싸여 있다. 둘레는 모두 폭이 1인 타일로 이루어져 있다. 가로와 세로에 필요한 타일의 개수를 수 또는 표를 이용하여 구하시오.



풀이 1.

수영장 세로 (W)	수영장 가로(L)	타일 개수(T)
1	1	8
2	1	10
3	1	12
3	2	14
3	3	16
3	4	18

$T=2(L+W)+4$

풀이 2. 위와 아래를 덮는데 똑같이 $L+2$개의 타일이 필요하다. 또한 왼쪽에 W개의 타일, 오른쪽에도 W개의 타일이 필요하다. $T=2(L+2)+2W$

풀이 3. 수영장 각 귀퉁이에 타일을 하나씩 놓는다. 다음으로 위를 덮고 아래를 덮는데 각각 L개의 타일이 필요하다. 양쪽에 W개의 타일이 필요하다. $T=4+2L+2W$

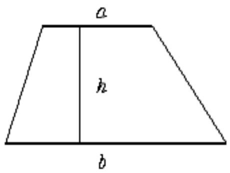
풀이 4. 수영장과 둘레를 이루는 부분의 넓이는 $(L+2)(W+2)$이다. 여기서 수영장 넓이만을 구하면 LW이다. 따라서 $T=(L+2)(W+2)-LW$이다.

물음. $T=2(L+W+1)+2$의 사고는?

이 문제에서 필요한 타일의 총 개수를 구하는 식은 모두 대수적으로 동치관계이다. 그러나 타일의 총 개수를 구하는 과정은 다르며, 식의 유도 과정에서 길이 개념이나 넓이 개념 등의 수학적 개념도 다르게 나타나고 있다. 결과론적으로 구한 식은 모두 같지만, 내용적·과정적인 면에서는 다른 내용이다.

본 연구에서는 이러한 중요성을 예비교사가 이해하고, 향후 자신들의 수업활동에 활용하도록 하기 위한 목적으로 다음 과제를 수행하게 하였다.

<과제>



다음 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식과 동치인 식을 가능한 한 많이 제시하고, 그 식에 맞는 기하학적 그림을 그린 후, 상황을 설명하시오.

본 연구에서는 기존의 흐름과는 달리 대수적인 관점으로부터 기하학적 관점으로의 변환을 요구하였다. 이 과제의 핵심은 구성된 식을 기하학적으로 해석하고, 주어진 사다리꼴로부터 그에 맞는 기하학적 상황을 만들어내는 것으로, 주어진 사다리꼴과 동치식과의 관계를 재해석하는 것이다. 여기서는 이러한 흐름을 ‘기하학적 변환 모델’이라 부르며, 기존의 기하학적 관점으로부터 대수적 관점으로의 변환을 ‘대수적 변환 모델’이라 부르기로 한다.

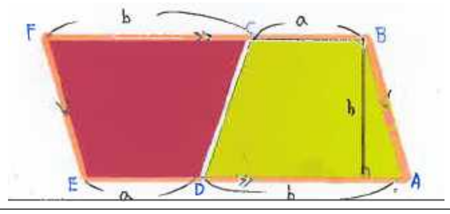
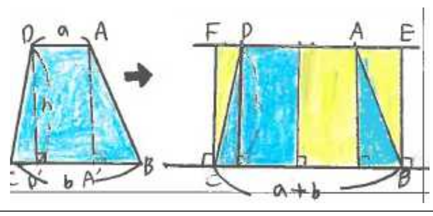
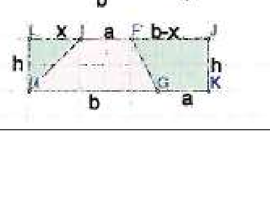
2. 연구 결과

가. 기하학적 변환 모델의 답안

구성된 식을 적절한 도형으로 해석하고, 그 도형에 맞는 기하학적 상황을 사다리꼴로부터 만들어내는 사고활동이 이루어진다.

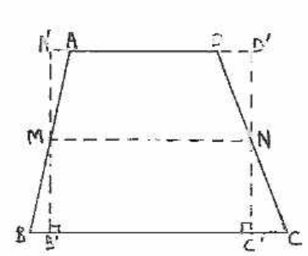
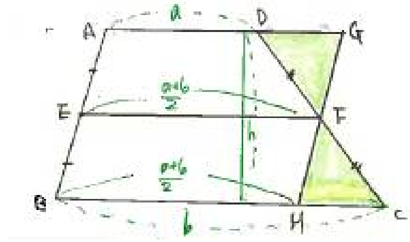
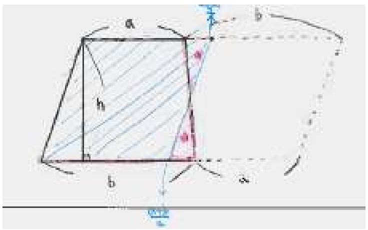
(1) $S=\dfrac{(a+b)h}{2}$: 밑변이 $a+b$, 높이가 h인 사각형 넓이의 반으로 해석하였다.

답안예시:

	
같은 도형을 붙여 평행사변형을 구성하였다.	같은 도형의 분할을 통해 직사각형을 구성하였다.
	같은 도형을 붙이고 등적변환을 통해 직사각형을 구성하였다.

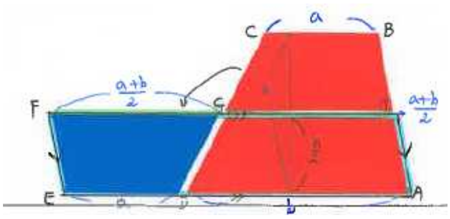
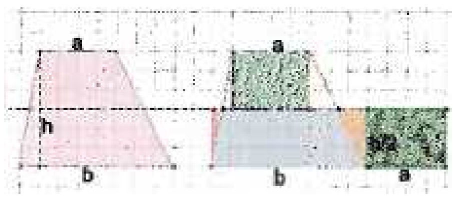
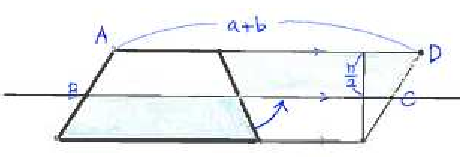
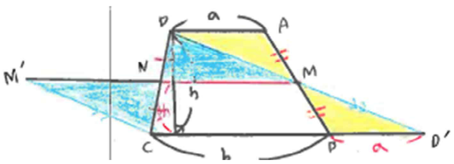
(2) $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$: 밑변이 $\frac{a+b}{2}$, 높이가 h인 사각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

	
중점연결정리와 등적변환으로 직사각형을 구성하였다.	중점연결정리와 등적변환으로 평행사변형을 구성하였다.
	같은 도형을 붙이고 중점을 연결하여 평행사변형을 구성하였다.

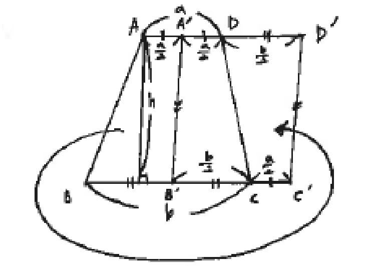
(3) $S=(a+b)\cdot\frac{h}{2}$: 밑변이 $a+b$, 높이가 $\frac{h}{2}$인 사각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

	
등적변환으로 평행사변형을 구성했다.	등적변환으로 직사각형을 구성하였다.
	
같은 도형을 붙이고 분할하여 평행사변형을 구성하였다.	등적변환으로 평행사변형을 구성하였다.

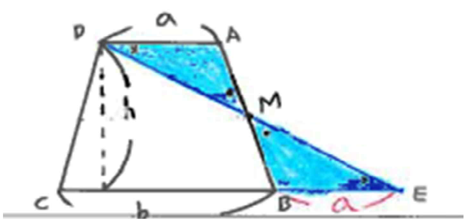
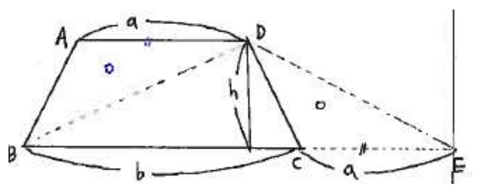
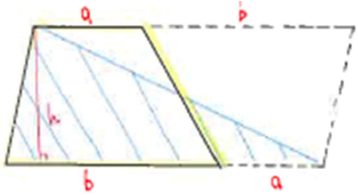
(4) $S=\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)h$: 밑변이 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}$, 높이가 h로 하는 사각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td>
</td><td>각 변의 중점을 잡아 등적변환(역 붙임)으로 사각형을 구성하였다.</td></tr>
</table>

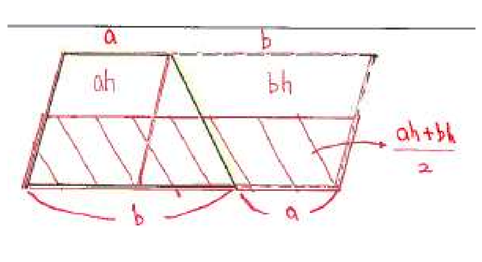
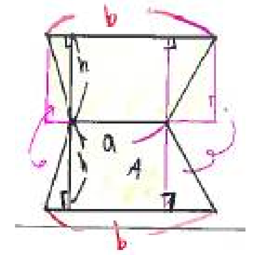
(5) $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h$: 밑변이 $a+b$, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">등적변환으로 삼각형을 구성하였다.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>같은 도형을 붙이고 분할을 하여 삼각형을 구성하였다.</td></tr>
</table>

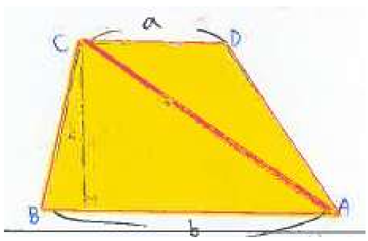
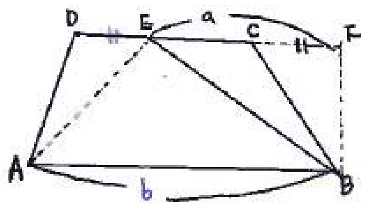
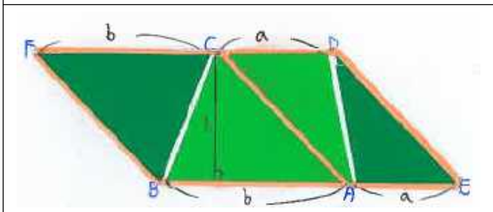
(6) $S=\dfrac{1}{2}(ah+bh)$: ah와 bh를 넓이로 가지는 사각형의 넓이 합의 반으로 해석하였다.

답안예시:

	
두 개의 평행사변형을 구성하였다.	같은 도형을 붙이고, 등적변환으로 밑변이 각각 a, b이고 높이가 h인 직사각형 두 개를 구성하였다.

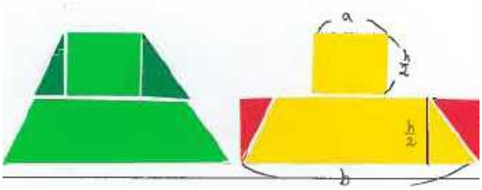
(7) $S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$: 밑변이 a, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 b, 높이가 h인 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다. 한편, 세 번째의 경우는 식을 두 평행사변형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

	
분할로 삼각형 두 개를 구성하였다.	등적변환으로 삼각형 두 개를 구성하였다.
	분할된 도형과 합동인 도형을 붙여 두 개의 평행사변형을 구성하였다.

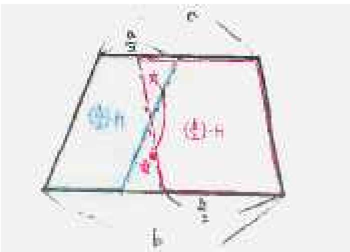
(8) $S=a\left(\frac{h}{2}\right)+b\left(\frac{h}{2}\right)$: 밑변이 a, 높이가 $\frac{h}{2}$인 직사각형과 밑변이 b, 높이가 $\frac{h}{2}$인 직사각형의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

	등적변환으로 두 개의 직사각형을 구성하였다.

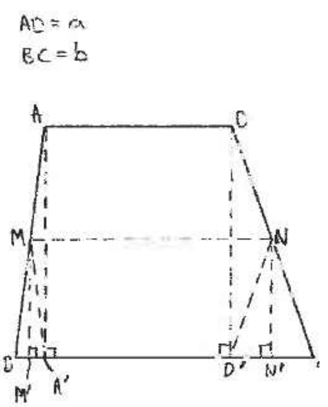
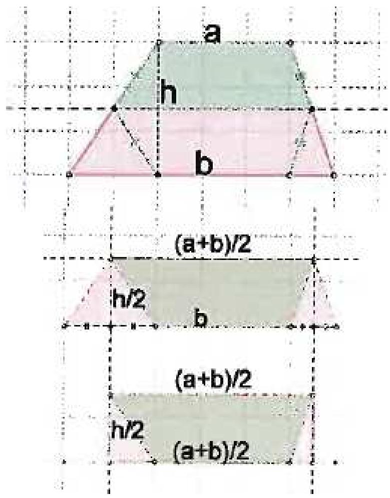
(9) $S=\left(\frac{a}{2}\right)h+\left(\frac{b}{2}\right)h$: 밑변이 $\frac{a}{2}$와 $\frac{b}{2}$, 높이가 각각 h인 사각형들의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

	두 평행사변형을 구성하고, 등적변환으로 과、소부분을 소거하였다.

(10) $S=\frac{a+b}{2}\frac{h}{2}2$: 밑변이 $\frac{a+b}{2}$, 높이가 $\frac{h}{2}$인 사각형 넓이의 두 배로 해석하였다.

답안예시:

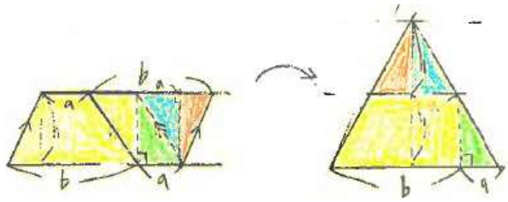
	

사다리꼴$ABCD$와 구성된 직사각형 $MNN'M'$의 넓이 관계를 이용하고 있다.	종이접기를 통하여 사다리꼴을 겹쳐진 두 직사각형으로 구성하였다.

종이접기를 이용한 것도 창의적인 사고이지만, 사각형 넓이의 두 배를 겹쳐진 두 사각형으로 생각한 것은 매우 흥미롭다.

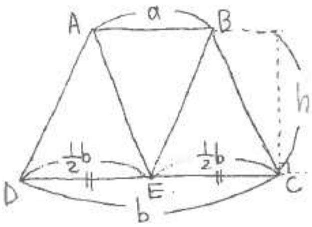
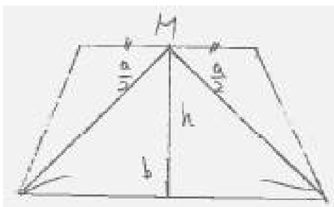
(11) $S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}2h(a+b)\right\}$: 밑변이 $a+b$, 높이가 $2h$인 삼각형 넓이의 반으로 해석하였다.

답안예시:

	등적변환으로 삼각형을 구성하였다.

(12) $S=\frac{ah}{2}+\frac{1}{2}\frac{b}{2}h+\frac{1}{2}\frac{b}{2}h$, $S=\frac{bh}{2}+\frac{1}{2}\frac{a}{2}h+\frac{1}{2}\frac{a}{2}h$: 밑변이 각각 a, $\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, 높이가 h인 세 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다. 오른쪽 그림은 밑변이 각각 b, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, 높이가 h인 세 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다.

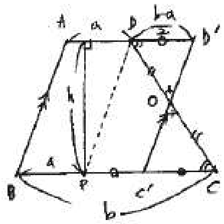
답안예시:

	
분할로 세 개의 삼각형을 구성하였다.	

이 답안에서는 중점을 잡아 분할을 하고 있는데, 임의 분할의 경우는 다른 변수의 사용을 필요로 하며, 이 경우는 동치식을 구성하기가 어렵다. 따라서 일반화에는 기하학적 관점에서 대수적 관점으로의 흐름이 필요하다.

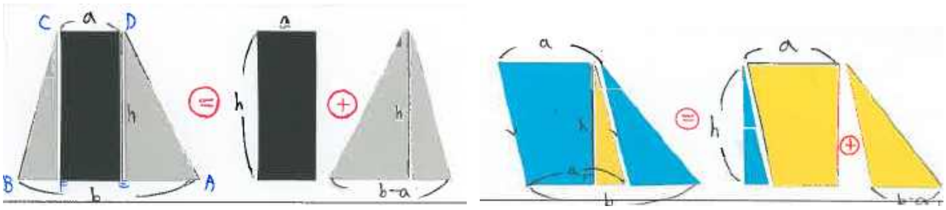
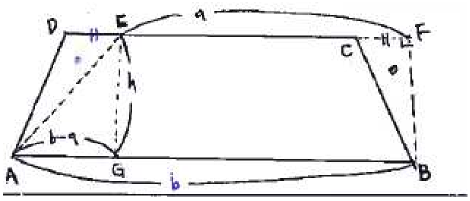
(13) $S=\left\{a+\frac{1}{2}(b-a)\right\}h$: 밑변이 $a+\frac{1}{2}(b-a)$, 높이가 h인 사각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

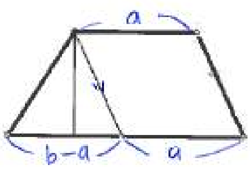
	등적변환으로 평행사변형을 구성하였다.

(14) $S=ah+\frac{1}{2}(b-a)h$: 밑변이 a, 높이가 h인 사각형과 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

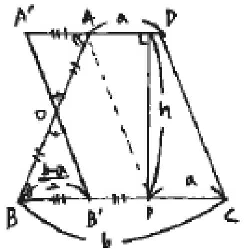
<table>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">분할과 등적변환으로 사각형과 삼각형을 구성하였다.</td></tr>
<tr><td></td><td>등적변환과 분할로 사각형과 삼각형을 구성하였다.</td></tr>
</table>

이 경우는 등변사다리꼴에서만 성립하지만, 응답자는 이 점을 인식하지 못하고 있다. 이에 대한 일반적이고 간단한 예시가 다음이다.

	분할로 평행사변형과 삼각형을 구성하였다.

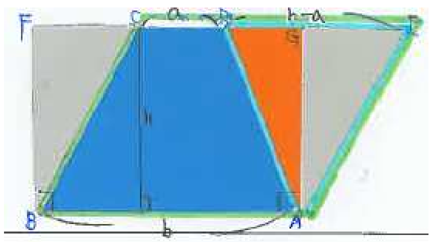
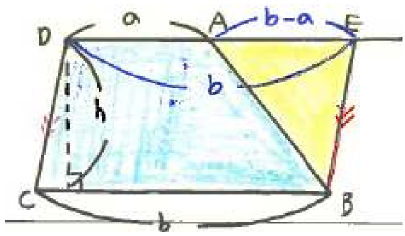
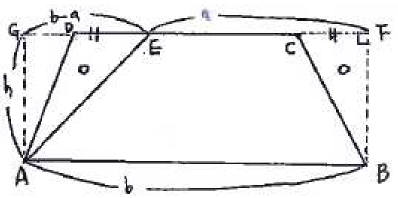
(15) $S=\left\{b-\frac{1}{2}(b-a)\right\}h$: 밑변이 $b-\frac{1}{2}(b-a)$, 높이가 h인 사각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

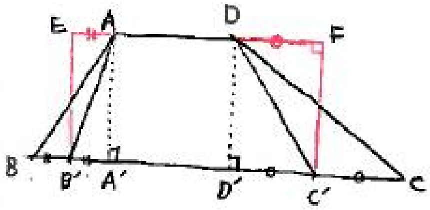
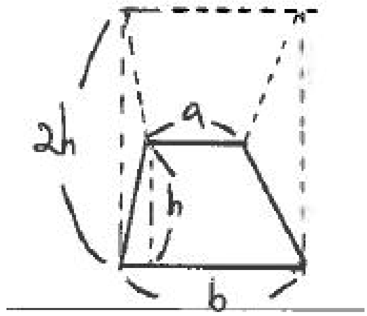
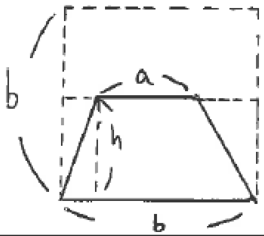
	평행이동과 등적변환으로 평행사변형을 구성하였다.

(16) $S=bh-\frac{1}{2}(b-a)h$: 밑변이 b, 높이가 h인 사각형과 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 삼각형의 넓이의 차로 해석하였다.

답안예시:

	
직사각형을 구성한 후, 등적변환으로 평행사변형과 삼각형을 구성하였다.	평행사변형을 구성한 후, 삼각형을 분할하였다.
	직사각형을 구성한 후, $\overline{CF}=\overline{DE}$인 E를 잡고, 등적변환으로 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 삼각형을 구성하였다.

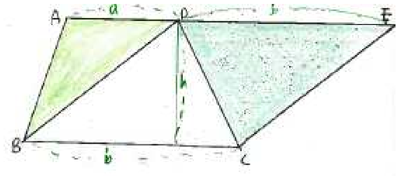
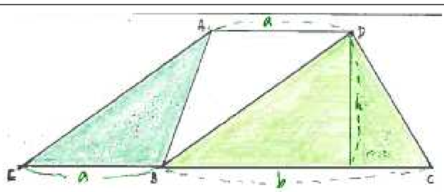
세 번째 그림의 경우, 양쪽으로 나누어진 두 삼각형을 식에서의 의미인 하나의 삼각형으로 변환시키는 아이디어가 흥미롭다. 이러한 아이디어를 낸 다른 답안도 있었으나, 이 부분을 처리하지 못하고 대수적 관점으로 돌아가 동치관계를 이용하여 해결하고 있다.

<table>
<tr><td>$S=\left\{b-\frac{1}{2}(b-a)\right\}h$</td><td>$S=\left[2bh-\left\{2h\frac{b-a}{2}\frac{1}{2}2\right\}\right]\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b에서 $\frac{1}{2}(b-a)$를 빼는 과정이 식으로 제시되어야 하나 결과론적인 양을 빼고 있다.</td><td>$2h$와 b를 변으로 하는 직사각형의 넓이에서 좌、우의 삼각형의 넓이를 빼고 $\frac{1}{2}$배 하는 것으로 해석하였다. 하지만 각각의 삼각형을 따로 빼지 않는 오류를 보이고 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S=b^2-\left\{b(b-h)+\frac{(b-a)h}{2}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

한 변의 길이가 b인 정사각형과 두 변이 b, $b-h$인 직사각형 그리고 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 삼각형으로 해석하였으나 양 끝의 삼각형의 넓이가 잘못 처리되었다.</td></tr>
</table>

(17) $S=bh+\frac{1}{2}ah-\frac{1}{2}bh$, $S=ah+\frac{1}{2}bh-\frac{1}{2}ah$: 밑변이 b, 높이가 h인 평행사변형과 밑변이 b, 높이가 h인 삼각형, 밑변이 a, 높이가 h인 삼각형의 넓이 관계로 해석하였다.

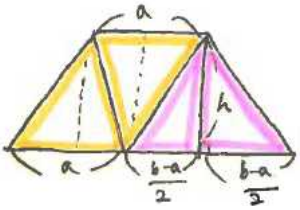
답안예시:

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

평행사변형과 삼각형을 구성한 후 여분의 삼각형을 분할했다.

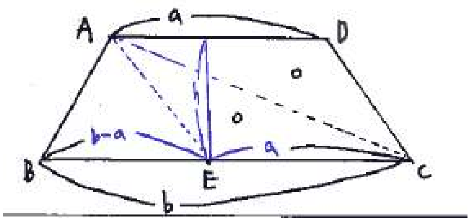
(18) $S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}h+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}h$: 밑변이 a, 높이가 h인 두 개의 삼각형과 밑변이 $\frac{b-a}{2}$, 높이가 h인 두 개의 삼각형의 넓이 합으로 구성하였다.

답안예시:

	분할로 네 개의 삼각형을 구성하였다.

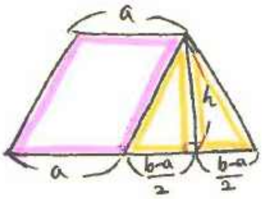
(19) $S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}(b-a)h$: 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 a, 높이가 h인 두 개의 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

	분할로 세 개의 삼각형을 구성하였다.

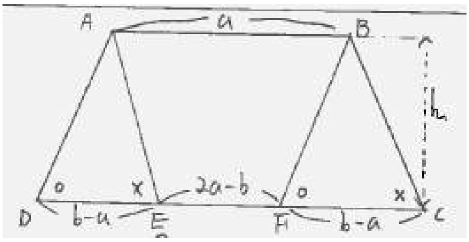
(20) $S=ah+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}h+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}h$: 밑변이 a, 높이가 h인 평행사변형과 밑변이 $\frac{b-a}{2}$, 높이가 h인 두 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

	분할로 평행사변형과 두 삼각형을 구성하였다.

(21) $S=2\left(\frac{1}{2}(b-a)h\right)+\frac{1}{2}(2a-b+a)h$: 밑변이 $b-a$, 높이가 h인 두 개의 삼각형과 아랫변과 윗변이 $2a-b$, a인 사다리꼴의 넓이 합으로 해석하였다.

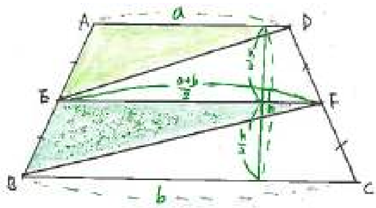
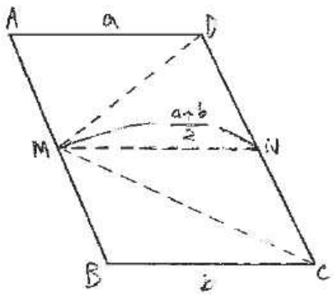
답안예시:

<table>
<tr><td>
</td><td>분할로 두 개의 합동인 삼각형과 사다리꼴을 구성하였다.</td></tr>
</table>

이 경우 또 다른 사다리꼴을 사용하고 있지만, 문제의 의도가 사다리꼴 공식을 유도하는 것이 아니므로 정당하다. 오히려 문제에 대한 이해도나 사고의 독창성이 높은 것으로 평가된다. 그러나 $2a>b$이라는 조건이 필요함에도 이 사실을 간과하고 있다.

(22) $S=\frac{1}{2}a\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}\frac{h}{2}+\frac{1}{2}b\frac{h}{2}$: 밑변이 $\frac{a+b}{2}$, 높이가 $\frac{h}{2}$인 두 개의 삼각형과 밑변이 a, 높이가 $\frac{h}{2}$인 삼각형 그리고 밑변이 b, 높이가 $\frac{h}{2}$인 삼각형의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">중점연결정리를 사용하여 분할로 네 개의 삼각형을 구성하였다. 오른쪽은 평행사변형인 특수한 경우이다.</td></tr>
</table>

사다리꼴을 평행사변형으로 생각하는 것은 전형적이고 일반적인 예가 아니라 수학적 관점에서는 가치가 떨어지지만, 사고적인 측면에서는 독창적 사고를 통하

여 ‘사다리꼴’이란 용어에서 전형적인 모양 대신에 평행사변형을 연상하고 있다.

나. 대수적 변환 모델의 답안

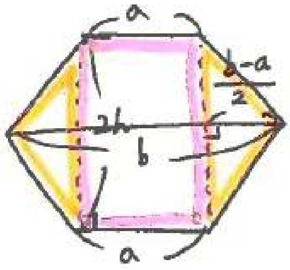
주어진 과제에 대해서는 오답이지만, 이 오답을 통해 기하학적 모델의 한계와 대수적 모델의 장점을 인식할 수 있다. 따라서 대수적 관점과 기하학적 관점이 가지는 장점과 단점을 비교할 수 있는 자료로서의 의미가 있다.

대수적 변환 모델은 두 가지 유형으로 다시 나눌 수 있는데, 첫 번째는 구성된 기하학적 상황을 그대로 대수식으로 번역하여 사다리꼴의 넓이 공식과 동치인 식을 얻는 것이다. 또 하나는 임의의 분할을 하는 상황에서 나오는데, 변수 사용이 필연적인 경우들로 기하학적 상황에서 대수적 식이 얻어지지만, 그대로는 넓이 공식과 동치식이 될 수 없다. 따라서 식은 계산을 통해 변수 x나 y가 소거되어야만 한다. 전자를 ‘1차 대수적 변환 모델’, 후자를 ‘2차 대수적 변환 모델’이라 한다.

<유형 1> 1차 대수적 변환 모델

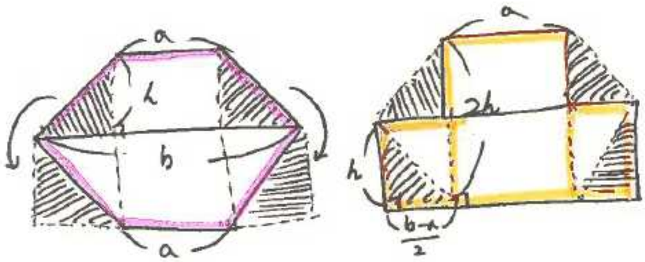
(1) $S=\left[2ah+\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}2h\right)\times 2\right\}\right]\div 2$: a와 $2h$를 두 변으로 하는 직사각형과 밑변을 $2h$, 높이를 $\frac{b-a}{2}$로 하는 삼각형 두 개의 넓이 합으로 해석하였다. 하지만 이 등식은 등변사다리꼴에만 성립할 뿐, 일반화되지 않는다.

답안예시:

	합동인 사다리꼴을 붙이고 분할하였다.

(2) $S=\left[2ah+\left\{\left(\frac{b-a}{2}\right)h\times 2\right\}\right]\div 2$: a와 $2h$를 두 변으로 하는 직사각형과 $\frac{b-a}{2}$와 h를 두 변으로 하는 직사각형 두 개의 넓이 합으로 해석하였다.

답안예시:

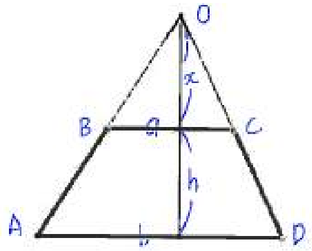


합동인 사다리꼴을 붙인 후 등적변환으로 사각형 두 개를 구성하였다.

이 경우는 앞의 (1)을 찾고 나면, 동치식을 구성하여 기하학적 상황을 유도할 수 있다. 실제로 이 응답자는 그렇게 구하고 있으나 다른 응답자는 기하학적 상황에서 바로 동치식을 구하고 있다.

(3) $S=\dfrac{1}{2}b\left(\dfrac{a}{b-a}h+h\right)-\dfrac{1}{2}a\dfrac{a}{b-a}h$: 밑변이 b, 높이가 $\dfrac{a}{b-a}h+h$인 삼각형과 밑변이 a, 높이가 $\dfrac{a}{b-a}h$인 삼각형의 넓이 차로 해석하였다.

답안예시:

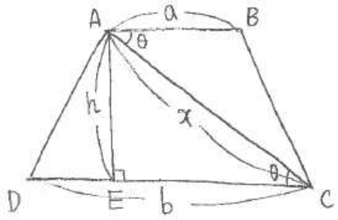
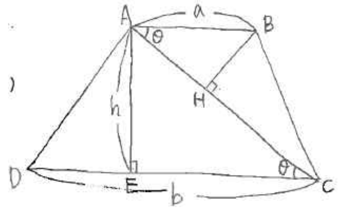


사다리꼴의 연장선의 교점을 잡아 닮음인 두 개의 삼각형을 구성하였다.

이 경우는 닮음인 두 삼각형의 관계를 먼저 생각하여야 식이 구성된다.

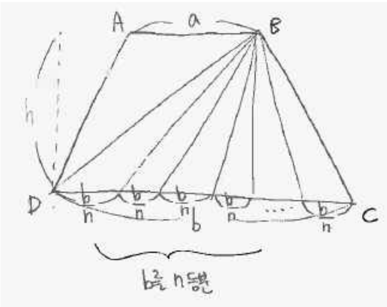
(4) $S=\dfrac{1}{2}ax\sin\theta+\dfrac{1}{2}bx\sin\theta$: 밑변이 a, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 b, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">분할로 두 개의 삼각형을 구성하였다. 그리고 높이를 삼각비를 도입하여 a, b에 관한 식으로 표현하였다.</td></tr>
</table>

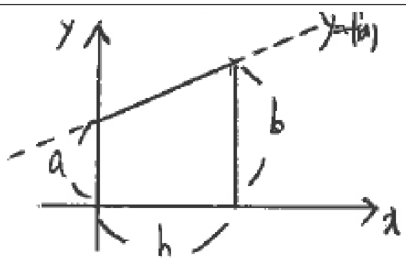
(5) $S=\dfrac{1}{2}ah+\dfrac{1}{2}\dfrac{b}{n}h\times n\ (n\in\mathbb{N})$: 밑변이 a, 높이가 h인 삼각형과 n개의 밑변이 $\dfrac{b}{n}$, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td></td><td>b에 대한 n등분할로 삼각형을 구성하였다.</td></tr>
</table>

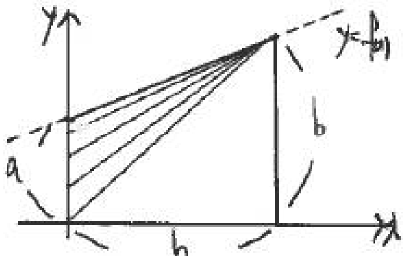
(6) $S=\displaystyle\int_0^h\left\{\left(\frac{b-a}{h}\right)x+a\right\}dx$: 함수 $f(x)=\left(\dfrac{b-a}{h}\right)x+a$와 $x=a$, $x=b$ 그리고 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이로 해석하였다.

답안예시:

<table>
<tr><td></td><td>좌표평면을 도입하고 함수식을 구성하였다.</td></tr>
</table>

(7) $S=\int_{0}^{h}\left\{\lim_{p\to a}\left(\frac{b-p}{h}\right)x+p\right\}dx$: 함수 $f(x)=\lim_{p\to a}\left\{\left(\frac{b-p}{h}\right)x+p\right\}$와 $x=a$, $x=b$ 그리고 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이로 해석하였다.

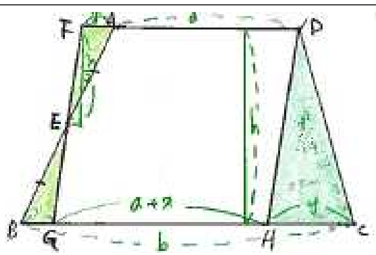
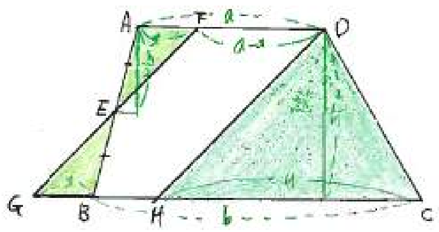
답안예시:

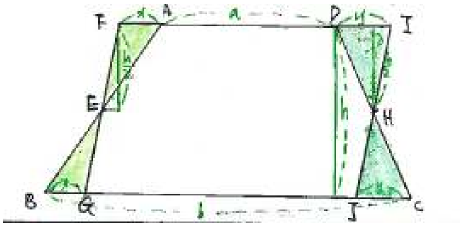
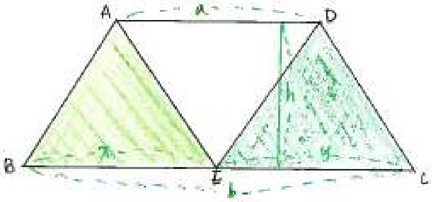
	좌표평면을 도입하여 함수식을 구성하였다.

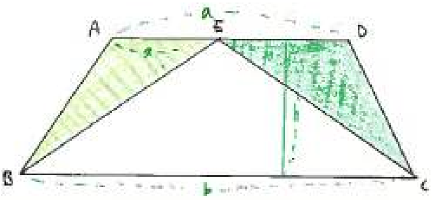
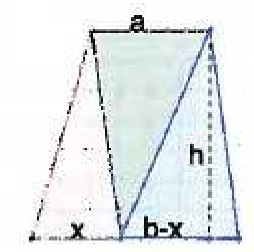
이 경우 함수식 $f(x)=\lim_{p\to a}\left\{\left(\frac{b-p}{h}\right)x+p\right\}$가 바른 표기이지만, 아이디어적으로는 상당히 흥미롭다.

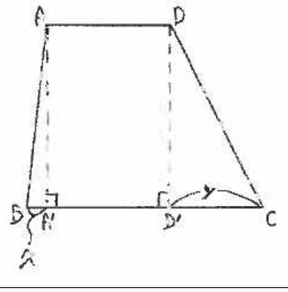
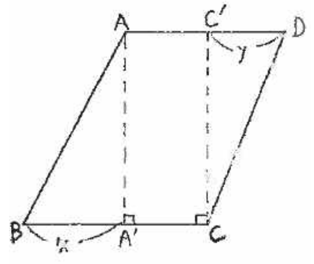
(4)에서 (7)까지의 답안은 기존의 사례에서 소개되지 않은 새로운 답안으로, 기존의 기하학적 조작이나 대수적 조작에 해석기하학적 관점이 더해짐으로써 보다 답안이 풍부해졌다. 하지만 기하학적 관점에서 출발하고 있다.

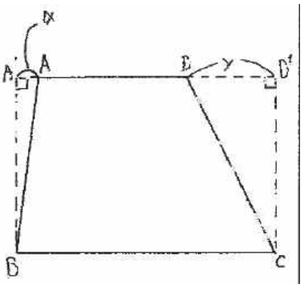
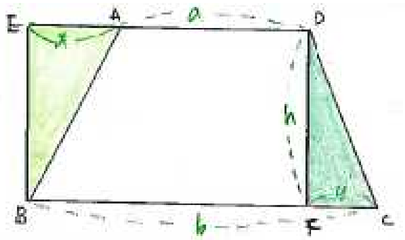
<유형 2> 2차 대수적 변환 모델

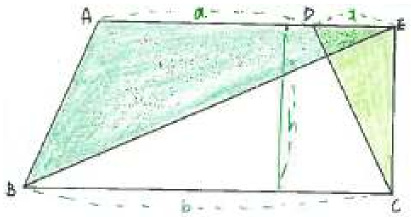
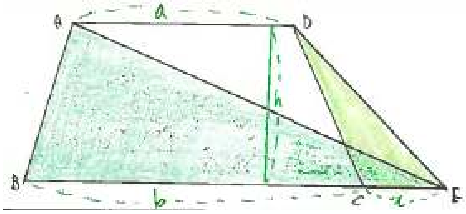
$(a+x)h+\frac{1}{2}yh$	$(a-x)h+\frac{1}{2}yh$
	
밑변이 $a+x$, 높이가 h인 평행사변형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.	밑변이 $a-x$, 높이가 h인 평행사변형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.

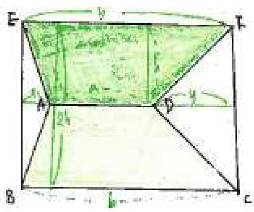
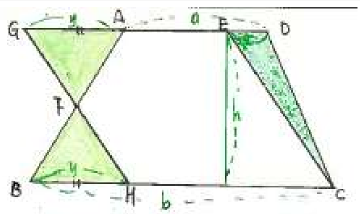
$(x+a+y)h$	$\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}yh+\frac{1}{2}bh$
	
밑변이 $x+a+y$, 높이가 h인 평행사변형의 넓이로 해석하였다.	가-(12)의 일반화이다.

$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}yh$	$\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}(b-x)h$
	
가-(12)의 일반화이다.	가-(12)의 일반화이다.

$\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}yh+ah\ (x+y=b-a)$	$\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}yh+\frac{1}{2}(a-y)h\ (x-y=b-a)$
	
밑변이 x, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형 그리고 밑변이 a, 높이가 h인 사각형의 넓이 관계로 해석하였다.	밑변이 x, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형 그리고 밑변이 $a-y$, 높이가 h인 사각형의 넓이 관계로 해석하였다.

$bh-\frac{1}{2}xh-\frac{1}{2}yh\ (x+y=b-a)$	$(a+x)h+\frac{1}{2}yh-\frac{1}{2}xh$
	
밑변이 b, 높이가 h인 사각형과 밑변이 x, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형의 넓이 관계로 해석하였다.	밑변이 $a+x$, 높이가 h인 사각형과 밑변이 y, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 x, 높이가 h인 삼각형의 넓이 관계로 해석하였다

$\frac{1}{2}(a+x)h+\frac{1}{2}bh-\frac{1}{2}xh$	$\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}(b+x)h-\frac{1}{2}xh$
	
밑변이 $a+x$, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 b, 높이가 h인 삼각형 그리고 밑변이 x, 높이가 h인 삼각형의 넓이 관계로 해석하였다.	밑변이 a, 높이가 h인 삼각형과 밑변이 $b+x$, 높이가 h인 삼각형 그리고 밑변이 x, 높이가 h인 삼각형의 넓이 관계로 해석하였다.

$\left\{b\cdot 2h-\frac{1}{2}\cdot 2h\cdot x-\frac{1}{2}\cdot 2h\cdot y\right\}\cdot\frac{1}{2}$	$(b-y)h+\frac{1}{2}xh$
	

b와 $2h$를 두 변으로 하는 직사각형에서 밑변이 h, 높이가 x인 삼각형과 밑변이 h, 높이가 y인 삼각형의 넓이를 뺀 것으로 해석하였다.	밑변이 $b-y$, 높이가 h인 평행사변형과 밑변이 x, 높이가 h인 삼각형의 넓이로 해석하였다.

Ⅲ. 결론 및 제언

수학적 개념을 이해하기 위해서는 대수적 사고, 해석적 사고, 기하학적 사고 등 다양한 관점에서의 사고 능력과 조작 능력이 필요하다. 사다리꼴의 넓이 공식의 변환문제는 이러한 능력들과 관련한 교육소재로 특히, 대수적 사고와 기하학적 사고를 필요로 한다. 기존의 연구 및 교육적 활용에서는 주로 기하학적 상황의 변환을 통해 대수적 동치식들을 구하고 있으나(대수적 변환 모델), 본 연구에서는 가역적 활동으로 대수적 동치식을 먼저 구성하고 이에 맞는 기하학적 상황으로 번역하게(기하학적 변환 모델)하였다. 이 활동에서 중요한 것은 구성된 식을 기하학적으로 해석하고, 주어진 사다리꼴을 조작하여 해석에 맞는 도형을 유도하는 것이다. 그 결과 목적에 맞는 많은 답안들이 나왔지만, 답안의 다양성을 추구하는 과정에서 기하학적 상황에서 유추하여 동치식을 구성한 것(대수적 변환 모델)들이 있었으며, 주어진 사다리꼴에서 도형을 유도할 때 비약을 하거나 두 관점이 혼용되는 경우가 있었다.

본 연구의 의의 및 시사점은 다음과 같다.

① 사다리꼴 넓이 공식의 변환문제는 대수적 관점과 기하학적 관점의 유용성을 경험할 수 있을 뿐만 아니라, 이 두 관점이 수학적 활동에서는 상호보완적일 필요가 있음을 경험하게 하는 교육소재이다.

② 기존의 답안 이외에도 종이접기를 활용한 사례, 삼각비를 활용한 사례, 미적분학의 지식을 적용한 사례 등의 새로운 답안이 추가되었다.

③ 대수적 동치식은 넓이 개념으로 해석되었으며, 비교적 넓이를 구하기 쉬운 사각형이나 삼각형으로 해석되었다. 원의 개념을 도입하려는 시도는 있었으나 실패하였다.

④ 기하학적으로 변환할 때에 분할, 등적변환, 중점연결정리, 합동, 닮음, 대칭이동, 회전이동 등 다양한 수학적 개념이 활용되었다.

⑤ 특수한 경우에만 대수적 관점에서 기하학적 관점으로의 변환이 가능하고, 임의의 경우로 일반화하려면 기하학적 관점에서 대수적 관점으로의 사고를 하여야 하는 경우가 있었다. 이때의 대수적 관점은 기하학적 상황에 대한 번역만이 아닌 식 조작에 의한 동치관계의 증명과정이 필요했다.

⑥ 사다리꼴 넓이 공식의 변환문제는 기하학적 변환 모델과 대수적 변환 모델에서 작용하는 사고와 답안이 다르며, 따라서 두 흐름을 상호보완적으로 적절히 활용할 수 있는 수업설계에 대한 연구가 필요하다.

본 연구의 목적은 예비교사들이 이러한 활동을 통하여 대수적 관점과 기하학적 관점 - 다시 말해, 추상적·형식적 관점과 맥락적·과정적 관점 - 의 장·단점을 이해하고, 이를 수업활동에 적절히 반영하게 하려는 것이었다. 연구 결과에서와 같이 교사는 두 가지 접근법을 적절히 시행함으로써 대수적 관점과 기하학적 관점을 고르게 경험할 수 있게 하여야 한다. 그러한 수단으로써 기하학적 모델과 대수적 모델을 사용할 수 있다. 그럼으로써 학생들은 다양한 수학적 관점을 그것도 하나의 소재로부터 습득하게 되는 경험을 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] 교육부(1991), 제6차 수학과 교육과정, http://ncic.re.kr.
[2] 김정민(2008), 학교수학에서의 open-ended 문항개발에 관한 연구, 부산대학교 대학원 석사학위논문.
[3] NCTM(2000). Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.
[4] http://www.knnedu.com
[5] 中込雄治、黒木伸明(2003), 四角形の面積と等積変形, Proceeding of the 7^{th} T^3 Japan Annual Meeting, pp.154-157.

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 608-736, Republic of Korea
e-mail : nahime02@ks.ac.kr