East Asian Math. J.
Vol. 31 (2015), No. 2, pp. 145-165
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2015.015

중고등학생의 대수적 추론 문제해결능력과 문제해결과정 분석

An Analysis on secondary school students' problem-solving ability and problem-solving process through algebraic reasoning

김 성 경[1] · 현 은 정[2] · 김 지 연

ABSTRACT. The purpose of this study is to suggest how to go about teaching and learning secondary school algebra by analyzing problem-solving ability and problem-solving process through algebraic reasoning. In doing this, 393 students' data were thoroughly analyzed after setting up the exam questions and analytic standards. As with the test conducted with technical school students, the students scored low achievement in the algebraic reasoning test and even worse the majority tried to answer the questions by substituting arbitrary numbers. The students with high problem-solving abilities tended to utilize conceptual strategies as well as procedural strategies, whereas those with low problem-solving abilities were more keen on utilizing procedural strategies. All the subject groups mentioned above frequently utilized equations in solving the questions, and when that utilization failed they were left with the unanswered questions. When solving algebraic reasoning questions, students need to be guided to utilize both strategies based on the questions.

I. 서론

대수적 추론은 수와 계산을 통한 구체적인 경험에서 일반화를 이끌어 내는 것, 기호를 의미 있게 조작하여 형식화하는 것, 수량 사이의 관계나 패턴을 분석하여 함수의 개념을 탐구하는 것을 포함한다. 이러한 대수적 추론 능력은 수학이나 다른 학문을 배우기 위한 토대가 될 뿐만 아니라 다양한 문제해결의 도구가 되는

1)제1저자
2)교신저자

Received September 16, 2014; Revised November 7, 2014; Accepted January 21, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D50
Key Words: algebraic reasoning, conceptual strategy, procedural strategy, problem solving

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

장점을 가지고 있다. 또한 문제를 해결하기 위해 문제 상황을 단순화하고 표상해봄으로써 문제의 구조를 볼 수 있고 더 나은 문제 해결자가 될 수 있다(Dobrynina & Tsankova, 2005).

NCTM(2000)은 대수교육에서 학생들이 대수 기호에 대한 의미를 알고 형식적인 대수학으로 전환할 수 있도록 지원하는 것을 강조하고, 이와 더불어 패턴 및 함수에 대한 이해를 개발하고, 수학적 상황을 분석하고 표현하며, 수학적 모델을 개발하고, 변화를 탐색할 수 있는 기회가 학생에게 주어져야 함을 강조한다. 기호의 의미를 이해하고 패턴을 일반화하고 수학적 모델을 개발할 수 있는 능력은 학교수학에서 뿐만 아니라 일상생활의 여러 문제 상황, 다양한 직업 분야에서도 요구되는 능력이기 때문에 학교수학에서 대수적 추론 능력에 대한 지속적인 개발이 필요하다.

Lannin(2003)은 학생들이 수와 관련된 상황을 일반화하고 정당화하기 위해 사용하는 다양한 전략을 검토하는 연구를 통해 얻은 학생들의 대수적 추론에 관한 교사의 지식은 학생들의 일반적인 오류를 확인하고 유용한 대수적 일반화를 학생들이 이해하도록 교사가 안내할 때에 도움이 된다고 하였다. 그러므로 교사들은 대수적 추론 과정에서 학생들의 문제해결과정에 주목함으로써 학생들의 대수적 추론에 대한 지식을 획득할 수 있고 또한 교사들은 이러한 지식을 바탕으로 학생들의 대수적 추론 능력을 향상시킬 수 있는 방향으로 안내할 수 있으므로 본 연구에서는 대수적 추론 문제의 해결 과정을 분석해 보고자 한다.

대수는 그 중요성에 비하여 학교수학에서 성공적이지 못하여 학생들의 수학적 사고력의 발판이 되기보다 오히려 높은 수준의 수학으로 발전하는 데 방해가 되는 어려움을 안고 있다(최지영, 2011). 또한 우리나라에서 최근 대수적 사고 또는 추론에 대한 연구는 주로 조기대수에 관한 연구(차현화, 홍혜경, 2005; 최지영, 방정숙, 2008)가 많고 상대적으로 중고등학생을 대상으로 한 대수적 추론에 대한 다양한 연구가 이루어지고 있지 않으며 특히 중고등학생들의 대수적 추론 문제해결 전략에 대한 연구는 드물다. 또한 대수적 추론 능력을 적절하게 활용하여 문제의 답을 구했는지, 개념과 원리에 대한 이해 없이 알고리즘만을 암기하여 기계적으로 답을 구했는지, 우연히 임의의 값을 대입하여 답을 구했는지는 답만으로 구별하는 데 한계가 있으므로 대수적 추론 문제의 해결 과정의 면밀한 확인과 분석을 통해 대수적 추론 능력의 정도를 파악하는 것이 필요하다.

따라서 본 연구는 중고등학생들이 대수적 추론 문제를 해결하는 정도와 문제해결과정에서 학생들이 선택하는 전략을 분석함으로써 학생들의 대수적 추론에 대해 탐색하여 중등교육에서 중요한 축을 이루고 있는 대수 교수·학습 방안에 시사점을 제공하고자 한다. 이를 위해 중고등학생들이 학년에 따라 대수적 추론 문제를 해결하는 정도를 살펴보고, 동일한 학년 내에서 문제해결 수준에 따라 학

생들이 선택하는 전략을 비교하며, 또한 문제에 따라 학생들이 대수적 추론 문제해결 전략을 어떻게 구사하는지 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 대수적 추론(Algebraic Reasoning)

대수적 추론은 학생들이 특별한 예에서 수학적 아이디어를 일반화하거나 논쟁이 있는 담화를 통해서 일반화를 이끌어 내는 것이고, 그러한 것들을 공식으로 점점 표현하고 나이에 적합한 방법으로 표현하는 것이다(Kaput & Blanton, 2005). 즉 학생들은 다양한 예를 통해 일반화를 시도하고 오류 과정을 거치면서 일반화에 접근하고, 이런 모든 과정을 수학적인 기호로 체계적으로 표현하는 경험을 통해 대수적 추론에 능숙해질 수 있다.

대수는 문화적 산물로서 매우 다양한 방법으로 교육체계에 내재되어 있다. 학교수학에서 대수는 다음과 같은 내용을 포함한다(Watson, 2009).

- 기호적인 문장의 조작과 변환
- 수와 패턴의 규칙에 대한 일반화
- 계산과 관계로부터 추상화된 구조와 체계에 관한 연구
- 방정식의 변환과 해결을 위한 법칙
- 변수, 함수, 그리고 변화와 관계의 표현에 대한 학습
- 수학 안팎의 상황에서 수학적 구조의 모델링

학교 대수에서 대수적 추론을 개발하는 것은 절차, 과정/개념, 일반화된 연산, 평가 과정을 표현하고 조작함에 있어서 공리 대수로 이동하는 과정이다(Thomas & Tall, 2001). 그리고 대수적 사고는 수 또는 어떤 모델화된 상황에 집중하면서 문제를 해결하는 과정에서 개발되고, 더 나아가 일반적인 구조 연구에서 구조를 발견하고 표현하면서 발달된다(Lins, 1990). 어떤 상황을 기호로 표현하거나 조작할 수 있고, 수 또는 관계에서 일반적인 구조를 발견할 수 있는 대수적 사고가 발달하면 학생들은 더 높은 수준에서 전체를 조망할 수 있게 되고 중요한 수학적 발견, 더 높은 수준의 수학적 사고, 문제해결의 핵심 아이디어를 발견할 수 있게 된다.

대수적 추론은 근본적으로 인간이 세상과 소통하는 방법이기 때문에 모든 사람은 대수적으로 사고하는 능력을 가지고 있고(Ontario Ministry of Education, 2013), 사람들은 학교 대수에서 뿐만 아니라 일상생활에서도 구조를 발견하고 패턴을 찾으며 중요한 부분에 집중하여 일반화한다. 예를 들면 자신에게 유리한 핸

드폰 요금제를 결정하거나, 운전할 때 시간과 거리를 결정하는 등 우리 삶의 많은 곳에 대수적 추론이 존재한다. 또한 건축가들은 건축할 건물의 재료를 결정하고 디자인할 때, 소프트웨어 개발자들은 부호를 만들 때, 은행원들은 대출금이나 금리를 계산할 때, 과학자들은 거의 모든 분야에서 대수적 추론을 사용하며 이외에도 다양한 직업 분야에서 사람들은 대수적 추론을 사용한다(Ontario Ministry of Education, 2013). 따라서 학교수학을 잘 이해하기 위해서 뿐만 아니라 나아가 일상생활과 다양한 직업 분야에서 성공하기 위해서 대수적 추론을 중요하게 다루어야 한다.

Ontario Ministry of Education(2013)은 대수적 추론 능력을 향상시킬 수 있는 방법으로 연산의 일반화와 함수적 사고를 제안한다. 첫 번째 방법은 연산의 일반화이다. 연산의 일반화는 수와 관련된 조작과 성질에 대한 추론이다(Carpenter, Franke, & Levi, 2003). 연산의 일반화는 특정한 수들을 단순히 연산하는 수준을 넘어 수들을 연산하는 과정에서 발견한 패턴을 인식하고 연산의 수학적 구조에 대하여 생각하는 것으로 이동하는 것이다. 학생들은 속성과 관계 탐색하기, 수량 사이의 관계로서 등호 탐색하기, 변수로서 문자를 포함하여 기호 사용하기 등의 연산의 일반화 과정을 통해서 대수적 추론을 개발할 수 있다.

두 번째 방법은 함수적 사고이다. 함수적 사고는 두 집합 사이의 관계와 변화를 인식하는 패턴을 분석하는 것이다(Beatty & Bruce, 2012). 이러한 접근은 어떤 수량들이 어떻게 관계되었는지를 탐구하거나 다른 수량으로 변화되거나 변형되는 방법을 탐구하는 것을 포함한다. 함수적 사고는 일반화의 또 다른 형태로 두 집합 사이의 관계이다. 연산에서 시각적인 패턴은 계산을 넘어 수량 사이의 관계를 생각할 수 있는 기회를 제공한다. 학생들은 패턴의 일반화, 역연산 등을 통하여 함수적 사고를 발전시킬 수 있다.

학생들이 대수적 추론 능력을 향상시키기 위해 연산의 일반화와 함수적 사고를 경험할 수 있는 장은 바로 문제해결과정이다. 문제해결은 학생들이 일반화하는 능력을 개발하고 패턴을 찾고 수 사이의 관계를 깊이 생각할 수 있는 기회를 제공한다. 즉 학생들은 문제해결과정에서 추측하기, 정당화하기, 예측하기, 증명하기를 경험함으로써 대수적 추론 능력이 향상될 수 있다(Ontario Ministry of Education, 2013).

2. 개념적 지식과 절차적 지식

개념적 지식은 사실, 일반화, 원리에 대한 지식 및 이해를 포함하고 절차적 지식은 알고리즘, 전략, 전술을 포함하는 행동의 특별한 과정에 대한 지식이다(Baroody, Feil, & Johnson, 2007; Kim, 2012). Star(2005)는 개념적 지식은 개념

에 관한 지식뿐만 아니라 풍부한 연결을 통한 개념을 알 수 있는 방법을 포함하고 절차적 지식은 절차에 관한 지식뿐만 아니라 풍부한 연결 없이 단순히 절차만을 알게 된 방법을 포함한다고 했다.

Piaget(1965)는 개념이 발달하기 전에 절차적이고 형식적인 교육을 해서는 안된다고 주장하였고, Gelman과 Meck(1983)은 학생은 수영역에서 더 많은 능력과 지식을 가지고 있으므로 절차적인 교육을 강조하였다. 한편 Putnam, deBettencourt, Leinhardt(1990)의 연구에서는 개념적 지식이 절차적 지식의 발달에 영향을 미친다는 것을 확실히 알 수 없다는 결과를 보여 주었다. 개념적 지식과 절차적 지식의 관련성에 대한 학자들 사이의 의견이 일치하지는 않는다.

학생들은 수학 문제를 해결하는 과정에서 개념적 지식과 절차적 지식을 사용한다. 학생들은 새로운 수학 문제 상황을 해결하려고 할 때 이전에 자신이 알고 있는 지식과 연결하여 해결하고자 하기 때문에 수학적인 원리나 내용, 관계에 관한 개념적 지식은 문제해결에 도움이 되고, 또한 특정한 문제 상황과 관련된 알고리즘을 포함한 절차적 지식을 알고 있으면 문제를 쉽게 해결할 수 있기 때문에 절차적 지식도 문제해결에서 중요한 역할을 한다.

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, Stephens(2005)는 동치와 변수라는 중요한 대수적 아이디어에 대한 중학생의 이해 및 이와 관련된 문제해결에 관한 연구에서 학생의 이해는 문제해결에서의 성공, 문제해결과정에서 사용하는 전략, 정당화에 영향을 준다고 주장하였다. 대수적 아이디어에 대한 학생들의 이해는 문제해결과 문제해결과정에서 사용하는 전략에 영향을 준다.

본 연구에서는 대수적 추론 문제해결과정에서 사용하는 전략을 분석하기 위해 개념적 이해를 포함한 개념적 지식을 이용한 문제해결 전략을 개념적 전략으로 정의하고, 구체적인 규칙이나 알고리즘과 같은 절차적 기술 및 절차적 지식을 이용한 문제해결 전략을 절차적 전략으로 정의하고자 한다.

III. 연구 방법

본 연구는 중학교 2학년, 중학교 3학년, 전문계고 1학년, 일반계고 1학년 학생들이 대수적 추론 문제를 해결하는 정도와 문제해결과정에서 선택하는 전략을 분석하기 위해 검사 도구를 이용하는 조사연구방법을 선택하였다.

1. 연구 대상

본 연구의 검사를 위해 D광역시 소재의 중학교 2개교, 전문계 고등학교 1개교, 일반계 고등학교 1개교를 연구 대상으로 하였다. A, B중학교에서 각각 2학년 2

개 반, 3학년 2개 반을 연구 대상으로 하였고, C전문계고에서 1학년 2개 반, D일반계고에서 1학년 3개 반을 연구 대상으로 하였다. C전문계고는 D광역시의 전문계고 중에서 중간 정도의 학력수준이고, 또한 2개의 중학교와 1개의 일반계고등학교도 D광역시에서 중간 정도의 학력수준에 속하는 학교이다. 검사 도구에서 사용하는 문제의 특성을 고려하여 학교교육과정에서 연립방정식을 배운 이후 학년인 중학교 2학년부터 수열을 배우기 이전인 고등학교 1학년까지를 연구 대상으로 하였다. <표 III-1>과 같이 검사를 통해 398명의 자료를 수집하였으나 이 중에서 검사지를 백지로 제출한 학생 5명의 자료를 제외하고 393명을 분석 대상으로 하였다.

<표 III-1> 연구 대상

학년	학교	검사 인원	분석 대상 인원	합계
중학교 2학년	A	46	46	108
	B	62	62	
중학교 3학년	A	51	51	115
	B	65	64	
전문계고 1학년	C	74	70	70
일반계고 1학년	D	100	100	100
합 계		398	393	393

2. 검사 도구

연산의 일반화와 함수적 사고를 통해 대수적 추론 능력이 향상될 수 있으므로 (Ontario Ministry of Education, 2013) 본 연구에서는 이 두 요소를 포함한 문제를 검사 도구로 선정하고자 하였다. 대수적 추론과 관련된 여러 문헌을 고찰하면서 연구자들의 논의를 통해 문항을 선정하였다.

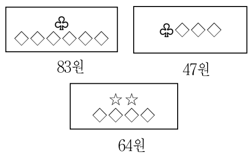
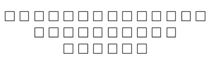
Chrysostomou, Pitta-Pantazi, Tsingi, Cleanthous, Christou(2013)는 수감각과 대수적 추론 문제해결과정을 개념적 전략과 절차적 전략으로 분석하는 연구를 하였고, 본 연구에서는 그 중에서 3개의 문제를 선택하여 검사 문항으로 사용하였다. 속성과 관계 탐색하기, 수량 사이의 관계로서 등호 탐색하기, 변수로서 문자를 포함하여 기호 사용하기 등의 연산의 일반화 과정을 포함한 문항인 문제1과 문제2를 선정하였다. 특정한 수의 연산에서 발견한 패턴을 인식하고 수학적 구조를 생각하는 연산의 일반화를 포함한 문항인 문제3도 선정하였다. 그리고 우정호와 김성준(2007)의 연구에서 대수적 사고 요소를 분석하기 위한 문항 중 1개의 문제를 선택하여 본 검사 도구의 마지막 검사 문항으로 사용하였다. 두 집합

사이의 관계, 수량 사이의 관계, 역연산 등을 통한 함수적 사고를 포함한 문항인 문제4를 마지막으로 선정하였다.

이와 같이 대수적 추론 문제해결과정을 분석하기 위해 4개의 문항으로 검사도구를 구성하였다. 첫 번째와 두 번째 문제는 수 또는 어떤 상황에 집중하면서 변수를 이용하여 상황을 표현하고 문제를 해결하는 과정 등 방정식의 변환과 그 해결을 위한 과정을 볼 수 있는 문항이다. 세 번째 문제는 특정한 수들을 단순히 연산하는 수준을 넘어 연산하는 과정에서 발견한 패턴을 인식하고 연산의 수학적 구조에 대하여 생각할 뿐만 아니라 변수로서 문자를 포함하여 기호 사용하기 등의 연산의 일반화 과정을 볼 수 있는 문항이며, 마지막 문제는 수학 안팎의 상황에서 수학적 구조를 모델링하고 어떤 수량들이 어떻게 관계되었는지를 탐구하거나 다른 수량으로 변화되거나 변형되는 방법을 탐구하는 것을 포함하는 문장제 문제를 표상하고 해결하는 능력과 관련된 문제이다. 학교수학에서의 대수영역을 포함하고 대수적 추론 능력의 향상을 위해 필요한 요소를 담은 문항으로 판단하여 선행연구에서 이 문항들을 선택하였다.

학생들의 문제해결과정을 정확히 분석하기 위해서 선다형 문제가 아닌 단답형 문제를 제시하였고 문제해결과정과 답을 함께 작성하도록 하였다. <표 III-2>는 대수적 추론을 검사하기 위한 문항이다.

<표 III-2> 대수적 추론 검사 문항

번호	문제
1	엄마의 나이는 딸의 나이보다 7배 많다. 그리고 두 사람 나이의 차이는 24살이다. 이때, 엄마의 나이와 딸의 나이는 각각 얼마인가?(Chrysostomou et al., 2013)
2	별 하나의 가격은 얼마인가? (Chrysostomou et al., 2013에서 재인용) 
3	극장의 첫째 줄에 6개의 의자가 있다. 다음 줄의 의자 개수는 앞줄의 의자 개수보다 4개가 더 많다. n번째 줄의 의자는 몇 개인가? (Chrysostomou et al., 2013에서 재인용) 
4	현서는 친구를 만날 때마다 자신의 사과 바구니에서 전체 사과의 반에 한 개를 더한 개수만큼을 친구에게 건네준다. 세 명의 친구를 만난 다음, 현서의 사과 바구니에는 1개의 사과가 남아있었다. 처음 현서의 사과 바구니에는 몇 개의 사과가 있었겠는가?(우정호, 김성준, 2007)

3. 자료 수집 및 분석

가. 자료 수집

연구자들은 검사를 위해 연구 대상 학교의 수학교과 담당교사를 직접 만나거나 전화로 검사의 의도를 설명하였고 학생들이 답과 함께 풀이과정 또는 자신의 생각을 답안지에 상세히 적을 수 있도록 지도해 줄 것을 요청하였다. 검사는 1학기 기말고사 이후인 여름 방학 대략 일주일 전에 이루어졌고, 각 학교의 수학교과 담당교사가 답안 작성에 대한 설명을 충분히 한 후 수업시간을 이용하여 30분 동안 실시하였다. 검사 실시 후 검사지는 연구자들이 직접 회수하였다.

나. 채점 기준

본 검사는 단답형 문제로 학생들에게 답과 답에 대한 이유를 반드시 함께 작성하도록 요구하였다. 본 연구는 학생들의 문제해결과정에 초점이 있으므로 답은 맞았으나 답에 대한 이유를 작성하지 않았거나 그 이유가 타당하지 않은 경우는 오답(0점)으로 채점하였다. 문제의 답과 답에 대한 이유를 모두 바르게 작성한 경우에만 정답(1점)으로 채점하였다. 즉, 전략을 사용하여 정답을 도출하는 과정까지 드러나는 경우에 정답으로 분류하였다. 대수적 추론 문제에 관한 채점 기준은 <표 III-3>과 같다.

〈표 Ⅲ-3〉 대수적 추론 문제 채점 기준

구분	채점 기준	점수
정답	· 답과 답에 대한 타당한 이유를 작성한 경우	1
오답	· 답은 맞았으나 답에 대한 이유를 작성하지 않은 경우 · 답은 맞았으나 답에 대한 이유가 타당하지 않은 경우 · 답이 틀린 경우 · 문제해결을 시도하지 않은 경우	0

다. 문제해결 전략

본 연구에서는 앞에서 정의한 개념적 전략(Conceptual Strategy)과 절차적 전략(Procedural Strategy)을 구체적으로 적용하기 위해서 Chrysostomou 등(2013)의 문제해결 전략 분류법을 바탕으로 하였다. Chrysostomou 등(2013)은 초등 예비교사들의 문제해결 전략을 개념적 전략과 절차적 전략으로 분류하였다. 개념적 전략은 학습한 개념 또는 수와 기호 사이의 관계와 관련된 통찰력을 보여주는 전략으로, 수학적으로 판단하는 능력 또는 더 융통성 있는 전략을 사용하는 능력과 관련 있다. 절차적 전략은 공식, 법칙, 순차적인 절차를 기억하고 적용하는 전략과 일련의 암기나 무분별한 행동도 포함한다.

Chrysostomou 등(2013)의 절차적 전략은 공식, 법칙, 순차적인 절차를 기억하

고 적용하는 전략과 함께 임의의 수를 무작정 대입하는 무분별한 행동도 포함하지만, 본 연구에서는 절차적 전략을 다시 두 가지로 세분하였다. 먼저 절차적 전략1은 특별한 공식이나 법칙을 적용하지 않고 무계획적인 행동을 시도하여 답을 도출하는 경우이고 절차적 전략2는 공식, 법칙, 순차적인 절차를 기억하고 적용하는 경우이다. 선행연구에서 절차적 전략의 범위가 광범위하므로 우연히 임의의 값을 대입하여 해결하는 경우처럼 무계획적 또는 무의도적으로 전략을 사용한 경우와 공식, 법칙 등을 알고 적용하는 경우는 구분이 필요하다는 판단에서 절차적 전략을 2가지로 세분화하여 정의하였다. <표 Ⅲ-4>는 본 연구에서 사용하는 대수적 추론 문제해결 전략에 대한 정의이다.

문제해결과정에서 문제에 있는 수 또는 기호 사이의 관계에 먼저 초점을 두고 문제를 해결하는 경우는 개념적 전략으로 분류하고, 그런 관계보다 먼저 미지수를 정하고 식을 세워서 문제를 해결하는 경우는 절차적 전략2로 분류하였다. 문제가 복잡한 경우에는 한 문제 안에서도 여러 가지 전략을 사용할 수 있지만, 본 연구의 검사 문항은 간단한 문제이므로 문제해결과정에서 사용한 전략을 한 가지로만 분류하였다. 어떤 문제의 풀이과정을 정답으로 채점하면, 그 풀이과정을 전략 유형 중 하나로 분류하였다.

〈표 Ⅲ-4〉 대수적 추론 문제해결 전략 정의

전략	문제해결 전략
개념적 전략	학습한 개념 또는 수와 기호 사이의 관계와 관련된 통찰력을 보여주는 경우
절차적 전략1	특별한 공식이나 법칙을 적용하지 않고 무계획적인 행동을 시도하여 답을 도출한 경우
절차적 전략2	공식, 법칙, 순차적인 절차를 기억하고 적용하는 경우

라. 채점 및 자료 분석

3명의 연구자는 각자 30명의 답안을 검토한 후 문항에 따른 채점의 세부기준 및 문제해결 전략의 유형을 다시 논의하였다. 그리고 2명의 연구자가 각각 중학교 1개교와 고등학교 1개교의 답안을 채점하였으며 논의가 필요한 경우는 다시 협의 과정을 거쳐서 채점하였다.

본 연구의 연구 대상은 중학교 2학년, 중학교 3학년, 전문계고 1학년, 일반계고 1학년으로 4개의 집단이다. 이 4개의 집단에 대해서 대수적 추론 검사의 점수에 대한 집단 간 차이를 알아보기 위해 일원분산분석(one-way ANOVA)을 실시하였다. 또한 동일한 학년 내에서 문제해결 수준에 따라 선택하는 전략을 비교하기 위해 집단의 평균을 기준으로 각 집단의 평균보다 높은 경우와 평균보다 낮은 경우로 나누었다. 그리고 학년에 따른 문제해결 전략의 빈도를 비교하고 동일한

학년 내에서 문제해결 수준이 높은 학생들(상집단)과 낮은 학생들(하집단)이 사용하는 전략을 비교하고 분석하였다. 마지막으로 대수적 추론 문제에 따라 학생들이 구사하는 문제해결 전략을 분석하였다.

IV. 연구 결과

다음에서는 집단(중학교 2학년, 중학교 3학년, 전문계고 1학년, 일반계고 1학년)에 따른 대수적 추론 검사 결과를 살펴보고 문제해결 전략을 분석하고자 한다.

1. 대수적 추론 검사 점수 분석

<표 IV-1>은 대수적 추론 검사 점수에 대한 기술통계이다. 먼저 집단별 평균을 살펴보면 4점 만점에 중학교 2학년의 경우 1.70점, 중학교 3학년의 경우 1.88점, 전문계고 1학년의 경우 0.90점, 일반계고 1학년의 경우 3.15점이었다. 중학생들은 4문제 중 약 2문제, 일반계고 1학년 학생들은 3문제를 맞춘 반면, 전문계고 1학년 학생들은 약 1문제를 맞추어 현저히 낮은 성취를 보였다.

〈표 Ⅳ-1〉 대수적 추론 검사에 대한 기술통계

학년	사례수	평균	표준편차
중학교 2학년	108	1.70	1.052
중학교 3학년	115	1.88	1.133
전문계고 1학년	70	0.90	1.009
일반계고 1학년	100	3.15	0.845

집단에 따라 대수적 추론 검사 점수에 차이가 있는지 알아보기 위하여 일원분산분석을 실시한 결과는 <표 IV-2>와 같다. 네 집단의 대수적 추론 검사 점수에 대한 평균은 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

〈표 Ⅳ-2〉 집단에 따른 대수적 추론 검사에 대한 일원분산분석 결과

집단	제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
집단간	227.973	3	75.991	72.833^{***}	.000
집단내	405.864	389	1.043		
합계	633.837	392			

$^{***}p<.001$

집단에 따른 대수적 추론 검사의 점수에 대한 사후분석을 하였고, 그 결과

<표 Ⅳ-3>과 같이 전체 4개의 집단은 3개의 부집단으로 분류되었다. 중학교 2학년과 중학교 3학년 집단의 대수적 추론 검사 점수의 평균은 통계적으로 유의미한 차이가 없었다. 그러나 전문계고 1학년 집단은 나머지 세 집단과 대수적 추론 검사 점수에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 분석되었다. 그리고 일반계고 1학년 집단도 나머지 세 집단과 대수적 추론 검사 점수에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 분석되었다.

전문계고 1학년 학생들은 중학교 2학년 학생들보다 학교수학을 2년을 더 학습했지만, 대수적 추론 문제해결에서는 오히려 낮은 성취를 보였다. 전문계고 학생들에 대한 적절한 보정이 이루어지지 않으면 이 학생들은 아주 간단한 방정식 문제해결에도 어려움을 가진 채로 중등교육을 마치게 된다.

〈표 Ⅳ-3〉 사후분석에 따른 부집단

학년	사례수	유의수준 .05에 대한 부집단		
		1	2	3
전문계고 1학년	70	.90		
중학교 2학년	108		1.70	
중학교 3학년	115		1.88	
일반계고 1학년	100			3.15
유의확률		1.000	.710	1.000

2. 대수적 추론 문제해결 전략 분석

대수적 추론 검사 결과에서 중학교 2학년과 3학년이 동질집단으로 분석되어서 문제해결 전략을 분석할 때는 3개의 집단인 중학교 집단, 전문계고 집단, 일반계고 집단으로 나누어 분석하였다.

가. 집단에 따른 문제해결 전략 분석

<표 Ⅳ-4>는 집단에 따른 문제해결 전략을 사용하는 빈도를 나타낸 표이다. 세 집단 모두 개념적 전략보다 절차적 전략을 더 많이 사용하였다. 특히 절차적 전략1을 사용하는 빈도를 살펴보면 중학교 집단은 전체 전략 중 약 8%, 전문계고 집단은 약 56%, 일반계고 집단은 약 3%를 사용하였다. 이는 대수적 추론 문제해결에서 성취가 낮았던 전문계고 집단은 문제해결과정에서 식을 세워 해를 찾거나 개념적으로 접근하기보다 무계획적인 행동을 시도하여 답을 도출하는 빈약한 전략을 주로 사용함을 알 수 있다.

〈표 Ⅳ-4〉 집단에 따른 문제해결 전략 사용 빈도

집단	사례수	전체 전략 빈도	개념적 전략 빈도(%)	절차적 전략1 빈도(%)	절차적 전략2 빈도(%)
중학교	223	400	150(37.50)	33(8.25)	217(54.25)
전문계고	70	63	23(36.51)	35(55.56)	5(7.94)
일반계고	100	315	88(27.94)	9(2.86)	218(69.21)

중학교, 전문계고, 일반계고 집단에 대하여 각 집단의 평균보다 높은 경우와 평균보다 낮은 경우로 나누어서 분석하였다. 중학교 집단의 경우 평균이 1.79점이므로 2점 이상인 경우는 상집단, 1점 이하인 경우는 하집단으로 분류하였다. 일반계고 집단의 경우 평균이 3.15점이므로 4점 이상인 경우 상집단, 3점 이하인 경우 하집단으로 분류하였다. 그러나 전문계고 집단의 평균은 0.90점이므로 평균보다 낮은 하집단은 모두 0점을 받은 경우로 사용한 전략이 없으므로 상집단과 하집단으로 분류하지 않았다.

<표 IV-5>는 상집단과 하집단의 문제해결 전략 사용 빈도를 나타낸 표이다. 상집단과 하집단 모두 절차적 전략의 사용 빈도가 개념적 전략의 사용 빈도보다 높았다. 그러나 상집단에 속한 학생들은 하집단에 속한 학생들보다 절차적 전략뿐만 아니라 개념적 전략도 많이 사용하였다. 이는 상집단의 학생들이 하집단의 학생들보다 문제의 상황에 맞는 다양한 전략을 구사하는 것으로 볼 수 있다.

〈표 IV-5〉 상집단과 하집단의 문제해결 전략 사용 빈도

집단	사례수	전체 전략 빈도	개념적 전략 빈도(%)	절차적 전략1 빈도(%)	절차적 전략2 빈도(%)
중학교 (상)	132	338	137(40.53)	22(6.51)	179(52.96)
중학교 (하)	91	62	13(20.97)	11(17.74)	38(61.29)
일반계고 (상)	40	160	52(32.50)	5(3.13)	103(64.38)
일반계고 (하)	60	155	36(23.23)	4(2.58)	115(74.19)

나. 문항에 따른 문제해결 전략 분석

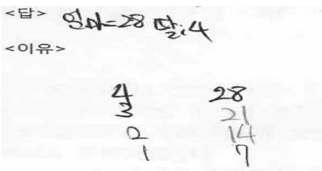
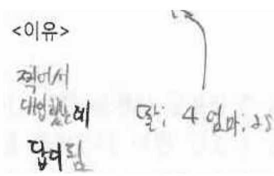
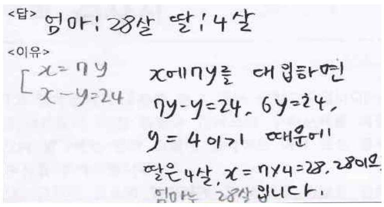
<표 IV-6>은 대수적 추론 문제1의 문제해결 전략을 분석한 표이다. 이 문제는 방정식 단원에서 전형적으로 다루는 문제이기 때문에 중학교 집단과 일반계고 집단의 경우 정답률이 80%이상으로 높았다. 중학교, 일반계고 집단의 경우 절차적 전략2에 대한 사용 빈도가 높았다. 전문계고 집단도 다른 문제에 비해 정답률이 높았지만, 학생들은 임의의 수를 무계획적으로 계속 대입해 보는 전략인 절차적 전략1을 주로 사용하였다. 이는 전문계고 집단의 학생들이 간단한 방정식을 세워 문제를 해결하는 데도 어려움을 겪고 있음을 보여준다.

〈표 IV-6〉 대수적 추론 문제1의 문제해결 전략 분석

문제해결 전략유형	문제해결 전략	중학교 빈도(%)	전문계고 빈도(%)	일반계고 빈도(%)	정답률
개념적 전략	엄마 나이가 딸의 나이의 7배임을 이용해서 두 사람의 나이의 차이가 24살인 답을 찾거나 나이 차이를 먼저 고려하고 그 중에 두 사람의 나이가 7배가 되는 경우를 찾는다.	14(7.69)	7(21.21)	4(4.17)	중학교 :81.61%
절차적 전략1	임의의 수를 대입하여 문제의 상황에 맞는 답을 찾는다.	24(13.19)	23(69.70)	3(3.13)	전문계고 :47.14%
절차적 전략2	방정식을 세워서 계산한 후 엄마의 나이 28살, 딸의 나이 4살을 찾는다.	144(79.12)	3(9.09)	89(92.71)	일반계고 :96.00%

<표 IV-7>은 대수적 추론 문제1의 학생 답안 예시이다. 예시에서 개념적 전략을 사용한 학생은 엄마 나이가 딸의 나이의 7배임을 먼저 고려하고 두 사람의 나이 차이가 24인 경우를 찾았다. 이런 경우 주어진 문제에 포함되어 있는 수 사이의 관계에 관심을 가진 것으로 보고 개념적 전략으로 분류하였다. 절차적 전략1을 사용한 학생들은 문제 주변에 임의의 수를 대입하여 계산한 흔적을 많이 보였다. 절차적 전략2를 사용한 학생들은 대부분 이 예시와 같이 연립방정식을 이용하여 문제를 해결하였다. 이런 경우는 문제에 포함된 관계에 주목하기보다 미지수를 정하고 주어진 문제를 식으로 바꾸는 방법적인 면에 더 초점을 맞춘 것으로 보고 절차적 전략으로 분류하였다.

<표 IV-7> 대수적 추론 문제1의 학생 답안 예시

개념적 전략	절차적 전략1	절차적 전략2
		

<표 IV-8>은 대수적 추론 문제2의 문제해결 전략을 분석한 표이다. 이 문제는 문제1과 유사한 형태이지만 문제 상황이 더 복잡해진 경우로 문제1에 비하여 정답률이 낮았다. 여전히 절차적 전략을 사용하는 빈도가 높았지만, 문제1과 비교하여 개념적 전략과 절차적 전략의 사용 빈도에 있어 그 차이가 줄었다. 세 집단 모두 개념적 전략의 사용 빈도가 문제1에 비하여 높아졌음을 알 수 있다. 이 문제는 변수가 3개이므로 임의의 값을 대입하거나 방정식을 세워서 해결하기 어려운 학생들의 경우 개념적 전략을 시도하여 해결한 것으로 볼 수 있다.

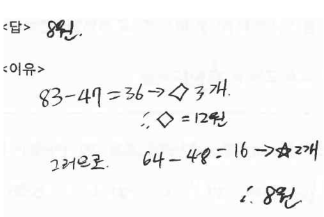
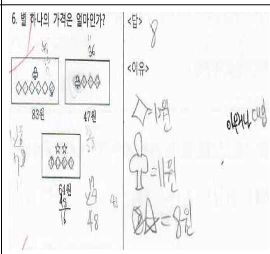
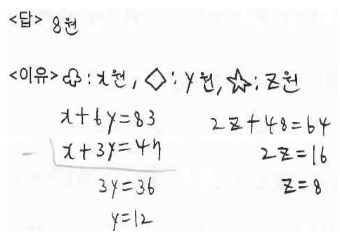
중학생들은 문제1에서는 방정식을 세워서 해결하는 절차적 전략2를 많이 선택한 반면, 이 문제에서는 개념적 전략과 절차적 전략을 비슷하게 사용하였다. 절차를 처리하는 데 익숙하지 않은 문제에서 학생들은 문제에 포함된 개념에 더 집중하는 현상을 보였다. 전문계고 학생들은 절차적 전략1을 많이 사용하고 있으나 문제1에 비해서 개념적 전략을 많이 사용하였다. 이들은 임의의 수를 대입해보는 전략으로 쉽게 해결이 되지 않으므로 그림에 내포된 관계에 더 집중하는 현상을 보였다. 반면에 일반계고 학생들의 경우 미지수가 3개인 연립방정식을 해결하는 것이 어렵지 않으므로 절차적 전략2를 많이 선택하였다.

<표 Ⅳ-8> 대수적 추론 문제2의 문제해결 전략 분석

문제해결 전략유형	문제해결 전략	중학교 빈도(%)	전문계고 빈도(%)	일반계고 빈도(%)	정답률
개념적 전략	방정식을 직접 세우지 않고 위의 2개의 그림을 이용하여 ♧ 또는 ◇의 가격을 구한 후 마지막 그림을 이용하여 별 하나의 가격이 8원 임을 찾는다.	59(45.38)	9(40.91)	20(20.62)	중학교 :58.30%
절차적 전략1	임의의 수를 대입하여 문제의 상황에 맞는 답을 찾는다.	5(3.85)	11(50.00)	0(0)	전문계고 :31.43%
절차적 전략2	방정식을 세워서 별 하나의 가격이 8원 임을 찾는다.	66(50.77)	2(9.09)	77(79.38)	일반계고 :97.00%

<표 Ⅳ-9>는 대수적 추론 문제2의 문제해결 전략 유형에 따른 학생 답안 예시이다. 개념적 전략을 사용한 이 학생은 위의 두 그림을 관찰하여 관계를 발견하고 ◇의 가격을 손쉽게 구했다. 위의 두 그림의 관계를 파악하면 미지수 3개인 연립방정식을 세우지 않고 문제를 쉽게 해결할 수 있는 융통성 있는 전략이므로 개념적 전략으로 분류하였다. 절차적 전략1을 사용한 학생은 문제1보다 상황이 복잡하지만 위의 두 그림에 임의의 값을 대입하여 ◇의 가격을 찾은 경우이다.

<표 Ⅳ-9> 대수적 추론 문제2의 학생 답안 예시

개념적 전략	절차적 전략1	절차적 전략2
		

절차적 전략2를 선택한 이 학생은 위의 두 그림이 어떤 관계가 있는지에 관심

을 가지기보다 미지수를 정한 다음 방정식을 세워서 순차적으로 계산하는 데 집중하는 경향을 보였다. 이와 같이 주어진 문제에 포함된 그림의 관계보다 미지수를 정하여 방정식 풀이에 집중하는 전략은 절차적 전략2로 분류하였다.

<표 IV-10>은 대수적 추론 문제3의 문제해결 전략이다. 이 문제는 문제1, 2에 비하여 개념적 전략의 사용 빈도가 많이 증가했다. 중학교 집단과 전문계고 집단의 경우 개념과 관계에 집중하는 개념적 전략으로 대부분 해결하였다. 전문계고 학생들은 앞의 방정식 문제에서 30%이상의 정답률을 보였는데 비해 일반화와 관련된 문제에서는 정답률이 4%로 아주 낮았다. 전문계고 학생들은 문제를 풀려고 시도하였으나 일반화에 실패하는 경우가 많았다. 이 학생들은 앞의 문제에서 절차적 전략1을 많이 사용하였으나 이 문제에서는 그 전략으로 쉽게 해결할 수 없어서 정답률이 낮았던 것으로 보인다. 중학생 집단에서도 방정식 문제보다 낮은 정답률인 24%정도의 학생들이 일반화에 성공했다. 반면 일반계고 집단은 첫째항과 공차를 구하여 등차수열의 일반항 공식에 대입하는 절차적 전략2를 사용하는 학생이 많았다. 이는 일반계고 1학년 2학기 교육과정에 등차수열 단원이 있으므로 미리 개념과 공식을 학습한 학생이 다수 있는 것으로 보인다.

세 집단의 학생들은 일반화하는 과정에서 세 가지 유형의 오답을 많이 보였다. 첫째는 의자가 4개씩 많아지므로 $n+4$라고 답하는 경우, 다음은 처음의 의자가 6개이고 4개씩 많아지므로 $4n+6$이라고 답하는 경우, 마지막으로 n번째가 아닌 특정한 줄의 의자 개수를 구하는 경우이다. 일반화는 대수에서 중요한 요소이므로 일반화하는 과정에서 학생들이 가지는 오개념에 대한 면밀한 분석과 함께 적절한 처방으로 일반화에 성공할 수 있도록 지도해야 한다. 그리고 학생들이 일반화 과정을 많이 경험할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

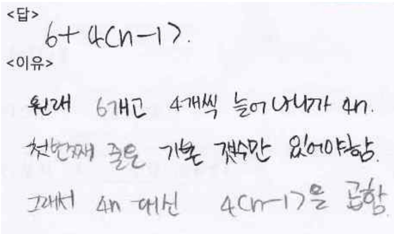
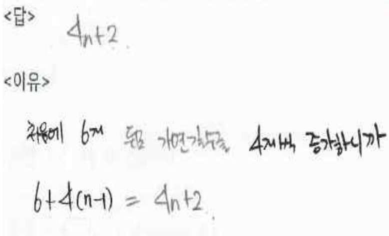
〈표 Ⅳ-10〉 대수적 추론 문제3의 문제해결 전략 분석

문제해결 전략유형	문제해결 전략	중학교 빈도(%)	전문계고 빈도(%)	일반계고 빈도(%)	정답률
개념적 전략	첫째 줄의 6개에서 4개씩 의자가 많아지는 규칙을 이용해서 $6+4(n-1)$ 또는 $4n+2$를 찾는다.	52(96.30)	3(100)	41(57.75)	중학교 :24.22% 전문계고 :4.29% 일반계고 :71.00%
절차적 전략2	등차수열의 일반항 공식을 이용한다.	2(3.70)	0(0)	30(42.25)	

<표 IV-11>은 대수적 추론 문제3의 학생 답안 예시이다. 개념적 전략을 사용한 학생 답안 예시를 보면 첫째 줄의 의자 개수에서 4개씩 늘어나지만 $4n$이 아니고 $4(n-1)$임을 알고 일반화에 성공한다. 일부 학생들은 처음에는 $6+4n$이라고

답을 생각했다가 첫째 줄의 의자의 개수가 6개이고 둘째 줄의 의자의 개수가 10개가 되려면 $4n+2$가 되어야 한다고 처음에 생각했던 답을 정정하기도 했다. 이 문제에서는 절차적 전략1을 사용하여 문제해결에 성공한 학생은 없었다. 문제해결에 실패한 학생들 중 일부는 임의의 수를 대입해 보거나 의미 없는 식을 세우는 시도를 하는 경우가 있었다. 그러나 이런 학생들은 일반화에 성공하지 못했다. 절차적 전략2를 사용한 학생의 경우 등차수열의 일반항 공식을 이용하여 문제를 해결하였다.

<표 Ⅳ-11> 대수적 추론 문제3의 학생 답안 예시

개념적 전략	절차적 전략2
 <답> 6+4(n-1). <이유> 원래 6개고 4개씩 늘어나니까 4n. 첫번째 줄은 기본 갯수만 있어야 함. 그래서 4n 대신 4(n-1)을 곱함	 <답> 4n+2. <이유> 처음에 6개 … 4개씩 증가하니까 6+4(n-1) = 4n+2.

<표 Ⅳ-12>는 대수적 추론 문제4의 문제해결 전략을 분석한 표이다. 이 문제에서 중학교 집단과 전문계고 집단의 경우 개념적 전략을 사용하는 빈도가 높았고, 일반계고 집단의 경우 절차적 전략을 사용하는 빈도가 높았다. 또한 이 문제는 중학교 집단과 일반계고 집단 모두에서 가장 낮은 정답률을 보인 문제이다. 그러나 전문계고 집단은 일반화와 관련된 문제3보다 정답률이 조금 높았다.

<표 Ⅳ-12> 대수적 추론 문제4의 문제해결 전략 분석

문제해결 전략유형	문제해결 전략	중학교 빈도(%)	전문계고 빈도(%)	일반계고 빈도(%)	정답률
개념적 전략	거꾸로 풀어서 1개, 4개, 10개, 22개를 찾는다.	25(73.53)	4(80.00)	23(45.10)	중학교 :15.25%
절차적 전략1	임의의 수를 대입하여 문제의 상황에 맞는 답을 찾는다.	4(11.76)	1(20.00)	6(11.76)	전문계고 :7.14%
절차적 전략2	방정식을 세워서 처음에 현서가 가진 사과가 22개임을 찾는다.	5(14.71)	0(0)	22(43.14)	일반계고 :51.00%

전문계고 학생들은 일반화하는 문제보다 구체적인 수를 이용해서 어떤 전략이라도 시도할 수 있는 문제에서 조금 더 높은 성취를 보였다. 일반계고 집단의 정답률이 다른 문제에 비하여 현저히 낮았는데, 오답자 중 상당수가 방정식을 세워서 해를 구하는 전략을 시도하다가 문제해결에 실패하였다. 학생들이 문장제 문

제를 해결할 때, 무조건 먼저 식을 세워서 접근하지 않고 다양한 전략을 고려할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

<표 Ⅳ-13>은 대수적 추론 문제4의 문제해결 전략 유형에 따른 학생 답안 예시이다. 개념적 전략을 사용한 학생은 방정식을 세우기보다 거꾸로 풀기로 문제에 접근하는 통찰력을 보여주었다. 절차적 전략1에 대한 예시는 일반계고 학생의 답안으로 이 학생은 전체 사과 개수는 짝수일 것이라고 예측하고 수를 대입하지만, 절차적 전략1을 사용한 대부분의 학생들은 짝수일 것이라는 예측 없이 임의의 수를 대입하여 문제를 해결하였다. 절차적 전략2를 사용한 학생은 다소 복잡하지만 일차방정식을 세워서 문제를 해결하였다.

<표 Ⅳ-13> 대수적 추론 문제4의 학생 답안 예시

개념적 전략	절차적 전략1	절차적 전략2
<답> 22개 <이유> 거꾸로 생각하면 하나를 더하고 두배를 하면된다. 마지막 친구를 만나기 전에는 4개, 그 전친구를 만나기 전에는 10개, 그 전에는 22개가 된다.	<답> 22개 <이유> 전체사과를 나눠줬으니 전체사과는 짝수개일 것이다. 그래서 적당히 짝수 넣어보다가 10을 넣으니 두번만에 1개가 되길래 친구한테 반 +1을 주고 남은 수가 10인걸 찾음	> 22개 유> 전체 사과 : a 첫번째 친구를 만난후 바구니안사과 : $\frac{1}{2}a-1$ 두번째 〃 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a-1)-1$ 세번째 〃 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a-1)-1)-1=1$ $\therefore a=22$

Ⅴ. 결론

본 연구는 중고등학생들이 대수적 추론 문제를 해결하는 정도와 문제해결과정에서 어떤 전략을 구사하는지 분석함으로써 중등교육에서 중요한 영역인 대수 교수·학습 방안에 시사점을 제공하고자 하였다.

이를 위해 대수적 추론 검사 도구와 분석 기준을 마련한 다음, 393명의 자료를 분석하였다. 중학교 2학년, 중학교 3학년, 전문계고 1학년, 일반계고 1학년인 네 집단에 따라 대수적 추론 문제를 해결하는 정도를 분석하였고, 또한 동일한 학년에서 상집단과 하집단의 학생들이 선택하는 전략을 비교·분석하였으며, 문항에 따른 문제해결 전략을 분석하였다. 연구 결과를 바탕으로 다음과 같이 몇 가지 시사점을 도출하였다.

첫째, 전문계고 학생들은 대수적 추론 문제해결에서 중학생과 비교하여 매우 낮은 성취를 보일 뿐만 아니라 문제해결과정에서 임의의 수를 무계획적으로 대입하는 아주 빈약한 전략을 주로 구사하였다. 전문계고 학생들은 4문제 중 평균적으로 약 1문제를 해결하는 정도였다. 이는 동일한 학년인 일반계고 학생뿐만

아니라 중학생들과 비교할 때도 낮은 성취이다. 또한 중학생들과 일반계고 학생들은 방정식과 관련된 문제1, 2에서 방정식을 세워서 문제를 해결하는 절차적 전략2를 많이 선택하는 반면 전문계고 학생들은 무계획적으로 수를 대입하는 절차적 전략1을 더 많이 구사하였다. 전문계고 학생들은 절차적 전략1을 구사하기 어려운 일반화와 관련된 문제에서는 정답률이 4%로 아주 낮았다. 문제 상황을 단순화하거나 일반화하는 능력은 학교수학에서 뿐만 아니라 일상생활의 문제해결에서도 중요한 역할을 하기 때문에 전문계고 학생들의 대수적 추론 능력 향상을 위한 교수·학습 방안에 대한 연구 및 현장 적용을 위한 연구가 이루어져야 한다.

둘째, 중학교 집단과 일반계고 집단에서 상집단에 속한 학생들은 절차적 전략뿐만 아니라 개념적 전략도 많이 사용하였다. 중학교의 경우 상집단에 속한 학생들은 전체 사용한 전략 중 41%를 개념적 전략, 59%를 절차적 전략으로 선택한 반면, 하집단에 속한 학생들은 21%를 개념적 전략, 79%를 절차적 전략으로 선택했다. 일반계고의 경우 상집단에 속한 학생들은 33%를 개념적 전략, 67%를 절차적 전략으로 선택한 반면, 하집단에 속한 학생들은 23%를 개념적 전략, 77%를 절차적 전략으로 선택했다. 이는 하집단에 속한 학생들은 문제 상황과 상관없이 절차적 전략을 선택하는 반면, 상집단의 학생들은 문제의 상황에 맞는 다양한 전략을 구사하는 것으로 볼 수 있다.

문제2와 문제4의 경우 방정식을 세우지 않고도 수 또는 기호 사이의 관계를 관찰하면 개념적 전략을 사용하여 문제를 더 쉽게 해결할 수 있지만 하집단에 속한 학생들은 절차적 전략을 시도하다 실패하는 경우가 많았다. 그러므로 교사들은 학생들에게 절차적 전략뿐만 아니라 개념적 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있는 경험을 함께 제공함으로써 학생들이 문제의 상황에 맞는 다양한 전략을 구사할 수 있도록 도울 필요가 있다.

셋째, 학생들은 일반화와 관련된 문제에서 낮은 정답률을 보였는데 일반화는 대수적 사고의 핵심이므로 학생들이 수 또는 패턴을 일반화하는 과정을 많이 경험할 수 있도록 지도해야 한다. 일반화와 관련된 문제3에서 중학생들은 24%, 전문계고 학생들은 4%의 낮은 정답률을 보였다. 일반화를 통해 산술적인 사고에서 추상적인 대수적 사고로 발전할 수 있는 경험을 제공해야 한다. 또한 교사들은 일반화하는 과정에서 학생들이 가지는 전형적인 오개념에 대해서 알고 학생들에게 적절하게 처방하여 학생들이 일반화에 성공할 수 있도록 지도해야 한다.

본 연구는 중고등학생이 대수적 추론 문제를 해결하는 전략을 분석하고 그 특징을 도출함으로써 대수적 추론의 교수·학습에 시사점을 제안하는 데 의의가 있다. 이후 연구에서는 문제해결과정에서 학생들이 사용하는 전략을 분석할 때, 개념적 전략과 절차적 전략뿐만 아니라 두 전략을 동시에 사용하는 경우도 고려

할 필요가 있다. 오답의 경우에도 학생들이 문제해결과정에서 사용한 전략을 보다 면밀하게 분석할 필요가 있다. 그리고 중고등학생을 대상으로 대수적 추론 능력에 대한 다양한 방면에서의 연구와 더불어 대수적 추론 능력을 향상시킬 수 있는 구체적인 교수・학습 방법에 대한 후속연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

[1] 우정호, 김성준(2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **수학교육학연구, 17(4),** 453-475.

[2] 차현화, 홍혜경(2005). 유아의 대수적 사고능력의 발달에 대한 분석. **유아교육연구, 25(5),** 31-54.

[3] 최지영(2011). **초등학교에서의 대수적 추론 능력 향상을 위한 교수-학습 방향 탐색.** 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

[4] 최지영, 방정숙(2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. **수학교육논문집, 22(2),** 137-164.

[5] Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 38(2), 115-131.

[6] Beatty, R. & Bruce, C. D. (2012). From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships. Nelson Education.

[7] Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

[8] Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E., & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. Educational Studies in Mathematics, 83(2), 205-223.

[9] Dobrynina, G. & Tsankova, J. (2005). Algebraic reasoning of young students and preservice elementary teachers. Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

[10] Gelman, R. & Meck, E. (1983). Preschoolers′ counting: Principles before skill.

Cognition, 13(3), 343-359.
[11] Kaput, J. J. & Blanton, M. L. (2005). A teacher-centered approach to algebrafying elementary mathematics. Understanding Mathematics and Science Matters, 99-125. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
[12] Kim, A. (2012). The impact of unbalanced development between conceptual knowledge and procedural knowledge to knowledge development of students′ in rational number domain. 수학교육학연구, 22(4), 517-534.
[13] Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & Variable. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(1), 68-76.
[14] Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. Mathematics Teaching in the Middle School, 8(7), 342-348.
[15] Lins, R. L. (1990). A framework of understanding what algebraic thinking is. In G. Booker, P. Cobb and T. N. Mendicuti(eds.), Proceedings of the 14th international conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, 14(2), 93-100.
[16] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
[17] Ontario Ministry of Education. (2013). Paying attention to algebraic reasoning K-12. Queen's Printer for Ontario.
[18] Piaget, J. (1965). The child's conception of number. New York: Norton.
[19] Putnam, R. T., deBettencourt, L. U., & Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived fact strategies in addition and subtraction. Cognition and Instruction, 7(3), 245-285.
[20] Star, J. R. (2005). Research commentary: Reconceptualizing procedural knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 404-411.
[21] Thomas, M. & Tall, D. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra. In International congress of mathematical instruction(ICMI) working group proceedings - The future of the teaching and learning of algebra, Melbourne, 2, 590-597.
[22] Watson, A. (2009). Paper(6): Algebraic reasoning. Key understandings in

mathematics learning. A review commissioned by the Nuffield Foundation.

Kim, Seong Kyeong
Ulsan Joongang High School
Ulsan, 681-820, Republic of Korea
e-mail: biblemany@hanmail.net

Hyun, Eun Jung
Siji High School
Daegu, 706-170, Republic of Korea
e-mail: hyunej74@hanmail.net

Kim, Ji Yeon
Seongsan High School
Daegu, 704-934, Republic of Korea
e-mail: youn9808@hanmail.net