한국초등수학교육학회지 19(4) 457-484. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 19(4) 457-484.
2015. 11. 30 November 30. 2015.

초등학생들의 비례 추론 전략 분석 -6학년을 중심으로-

정유경[1] · 정영옥[2]

본 연구에서는 초등학생들이 다양한 비례 추론 과제를 해결할 때 사용하는 비례 추론 전략과 정답률을 분석하여 비례 추론 능력 지도를 위한 시사점을 제공하고자 하였다. 이를 위해 비례식을 학습한 6학년 173명을 대상으로 조사 연구를 실시하였다. 비례 추론 과제는 대수·기하, 양적·질적 추론, 미지값·비교 과제로 구분하고, 선행 연구에서 사용된 비례 추론 문항을 참조하여 다양한 과제 유형을 고려한 문항으로 검사지를 구성하였다. 과제 유형별로 정답률을 살펴보면, 기하 과제보다는 대수 과제, 질적 추론 과제보다는 양적 추론 과제, 비교 과제보다는 미지값 과제의 정답률이 상대적으로 높게 나타났다. 학생들이 사용한 비례 추론 전략을 살펴보면 비례식을 학습하였음에도 불구하고 형식적 전략보다는 인수 전략, 단위 비율 전략과 같은 비형식적 전략을 사용하는 비율이 상대적으로 높게 나타났다. 이와 같은 결과를 바탕으로 비례 추론 능력 지도를 위한 시사점으로 형식적 전략의 약화와 비형식적 전략의 명시적 지도, 질적 추론의 강화 및 질적·양적 추론의 결합, 다양한 과제 유형의 균형있는 취급 등을 제안하였다.

주제어: 비례 추론 과제, 비례 추론 전략, 형식적 전략, 비형식적 전략, 질적 추론, 양적 추론

Ⅰ. 서 론

비례 추론은 수학 내적인 많은 영역뿐만 아니라 수학 외적인 많은 영역에서도 매우 핵심적인 역할을 할 뿐만 아니라 초등산술에서 그 이후의 수학으로 나아가는 분수령에 해당한다(Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012; Chapin & Anderson, 2003; Dole, Clarke, Wright, Hilton, & Roche, 2008; Lesh, Post, & Behr, 1988). 수학 내적으로는 분수나 소수 및 곱셈과 나눗셈, 닮음과 삼각법, 단위 환산, 기울기나 미분계수, 비율로서의 확률, 자료의 비교와 같은 수와 연산, 도형, 측정, 함수와 미적분, 확률, 통계 등 다양한 영역에 관련되어 있고, 수학 외적으로는 인구밀도나 축척, 속도, 힘, 농도, 이익률과 손실률, 지리학, 과학, 경제학, 역학 등 다양한 학문의 영역에 관련되어 있고, 음료의 농도나 약의 성분비, 건축물이나 조형물의 비 등 일상생활의 많은 영역과 관련되어 있다.

1) 당동초등학교
2) [교신저자] 경인교육대학교

그러나 이런 비례 추론과 관련하여 비와 비례를 지도하고 학습하는 것은 매우 복잡한 과정이고, 학생들은 비례 추론과 관련하여 많은 어려움을 가지고 있다(Adjiage & Pluvinage, 2007; Ben-Chaim et al., 2012; Tourniaire & Pulos, 1985). 이런 어려움의 원인으로는 비례 개념 자체의 복잡성, 비례 개념 발달의 점진성, 제한된 과제 유형과 형식적인 지도 방식 등을 생각해 볼 수 있다(이종욱, 2006; Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Dole et al., 2008).

이런 관점과 같은 맥락에서 비례 추론에 관한 많은 연구는 비례 추론 능력은 오랜 기간에 걸쳐 점진적으로 발달하며, 학생들은 비례식의 성질을 이용한 형식적 방법을 배우기 전에도 다양한 비형식적이고 직관적인 전략들을 가지고 있음을 주장하며, 학생들의 비례 추론 능력을 기르기 위해서는 다양한 상황과 다양한 유형의 과제를 제시하여 학생들이 질적 추론에서 시작하여 양적 추론으로 나아가며, 자신들의 비형식적 전략을 스스로 구성하는 것을 기초로 좀 더 형식적인 전략으로 나아가고, 비와 비례에 관련된 개념과 관계에 대한 이해를 중점적으로 다루면서 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 잘 구분하도록 해야 함을 강조하고 있다(박정숙, 2008; 안숙현, 방정숙, 2008; 정은실, 2013; 홍지연, 김민경, 2013; Ben-Chaim, Fey, Fitgerald, Benedetto, & Miller, 1998; Ben-Chaim et al., 2012; De Bock, van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; Lamon, 2005; Langrall & Swafford, 2000; Miller & Fey, 2000; Van Dooren, de Bock, Janssen, & Verschaffel, 2008).

그러나 우리나라 교육과정에서는 비와 비례를 다룰 때 이런 관점을 고려한 비례 추론 능력의 개발보다는 비례식의 성질을 이용한 형식적 전략을 강조하고 있다(고은성, 이경화, 2007; 정영옥, 2015; 정은실, 2003). 학생들의 비례 추론 능력에 관한 연구를 살펴보면, 학생들은 비례식을 배운 직후에는 비례식 전략을 집중적으로 사용하는 경향이 증가하지만, 여전히 비형식적 전략을 사용하는 학생들도 있고, 비례식을 배운지 얼마 안 되는 6학년 학생들이 5학년과 7학년에 비해 비례가 아닌 상황에 비례식을 적용하여 문제를 해결하려고 하는 오류를 가장 많이 보이고 있고, 형식적 전략을 배우기 이전에는 비례가 아닌 상황을 잘 해결했던 상위권 학생들이 비례식 전략을 배운 이후에는 비례식을 적용하여 오히려 문제를 해결하지 못하는 경우들이 발생하였다(김경선, 박영희, 2007; 안숙현, 방정숙, 2008). 또한 학생들의 비례 문제 해결에 관한 연구를 살펴보면, 전형적인 비례식 상황인 경우, 비 관계가 명확한 경우, 문제 상황이 정수비인 경우, 문항 구조가 단순한 경우처럼 매우 제한적인 상황에서만 정답률이 높게 나타났다(권미숙, 김남균, 2009).

이와 같은 연구 결과들을 살펴볼 때, 비례 추론 능력 지도와 관련하여 비례식의 성질을 이용한 형식적 전략 지도에 대한 좀 더 주의 깊은 연구가 필요하다. 그러나 지금까지의 연구는 비례 추론에 대한 양적인 분석이나 비례식을 배운 직후의 학생들에 대한 비례 추론 전략에 대한 분석을 제공할 뿐, 학생들이 비례식을 이용한 형식적 접근 방식을 배운 일정 기간 후에 이러한 형식적 접근 방식을 얼마나 내면화하고 파지하고 있는지를 구체적으로 분석한 연구는 많지 않다. 따라서 본 연구에서는 기존의 연구들에서 제시된 비례 추론에 관한 검사 문항들을 참조하여 다양한 유형의 비례 추론 과제들로 구성된 검사지를 마련하여 비례식을 이용한 형식적 접근 방식을 배운 6학년 학생들을 대상으로 검사를 실시하고 학생들의 정답률과 비례 추론 전략을 분석함으로써 비례 추론 지도를 위한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례 추론의 의미

비례 추론의 의미에 대해서는 연구자들마다 다양한 관점을 제공하고 있다. 비례 추론은 기본적으로 비와 비례를 기반으로 한다. 비는 '두 대상 사이의 곱셈적 관계(Shield & Dole, 2013, p. 187)' 이고, 비례는 '두 비의 상등(Ben-Chaim 외, 1998 p. 249)' 을 의미한다. 그러나 비와 비례 개념을 이해하는 것은 두 대상 사이의 곱셈적 관계를 a:b로 나타내고, 두 쌍의 비 a:b와 c:d에서 a/b와 c/d를 비교하여 상등을 파악하는 것뿐만 아니라 비의 동치 관계, 즉 비의 공변성과 일정성을 파악하는 것을 포함한다(안숙현, 방정숙, 2008; 유현주, 1995; 정영옥, 2015; 정은실, 2003; Freudenthal, 1983; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Streefland, 1984). 예를 들면, 레몬즙 2컵에 탄산수 5컵을 넣어 레몬에이드를 만든다고 할 때, 레몬즙이 4컵, 6컵, 8컵, …이 되면 탄산수도 10컵, 15컵, 20컵, …과 같이 레몬즙이 2배, 3배, 4배, … 가 될 때, 탄산수도 2배, 3배, 4배, …가 되는 공변성과 레몬즙과 탄산수가 2컵과 5컵, 4컵과 10컵, 6컵과 15컵, …과 같이 변하지만 본질적으로 2:5라는 관계는 변하지 않는 일정성을 파악하는 것이 비와 비례의 본질이다. 따라서 이러한 비와 비례의 본질을 생각할 때, 비례 추론은 주어진 상황에서 곱셈적 비교를 인식하고 공변량과 일정성을 이해하는 것을 포함한다.

한편, 비와 비례에 관련된 문제를 해결할 때, 수를 포함하는 상황에서의 추론인 양적 추론과 수를 포함하지 않은 상황에서의 추론인 질적 추론이 모두 관련된다(Post, Behr, & Lesh, 1988). 이 중 양적 추론은 비례 추론과 관련될 수도 있지만 형식적으로 비례식의 성질을 이용하여 방정식으로 문제를 해결하는 경우에는 오히려 비례 추론과 무관할 수 있다(Behr et al., 1992; Freudenthal, Janssen, & Sweers, 1976; Lamon, 2005; Post et al., 1988; Streefland, 1984). 한편, 질적 추론은 비의 변화의 방향에 대한 이해를 바탕으로 양들 사이의 관계를 이해하는 데 초점을 맞추기 때문에 비례 추론에 도움이 되며, 특별히 비례 개념이 도입될 때 많은 도움이 된다(Behr et al., 1992; Billings, 2001; Lamon, 2005). 또한 어린 아이들은 양적 추론을 하기 전에 질적 추론이 가능하며, 질적 추론에 관련된 많은 상황에 접하고 있으므로 어려서부터 질적 추론에서 시작하여 점진적으로 양적 추론으로 나아가는 것이 필요하다(Freudenthal et al., 1976; Streefland, 1984). 따라서 비례 추론은 양적 추론뿐만 아니라 질적 추론을 포함해야 한다.

또한, 비와 비례의 근원이 되는 상황은 수들 사이의 비와 비례에 관련된 대수적인 상황뿐만 아니라 도형의 닮음, 축소와 확대 등에 관련된 기하적인 상황을 포함한다. Freudenthal(1983)은 비와 비례가 대수적 상황에 초점을 맞추는 것을 비판하며, 기하적 상황이 비의 중요한 근원이며 비에 대한 시각적 인식과 감각은 아주 일찍 발달하지만, 이런 감각이 닮음 개념으로 발달하는 데는 오랜 기간이 걸리기 때문에 닮음을 삼각형에서 시작하는 것이 아니라 풍부한 구조를 가진 축소와 확대 등 다양한 기하적 상황에 접해야 함을 강조하고 있다. 또한 Ben-Chaim 외(2012)는 비의 상황을 전체의 부분과 같이 같은 양을 비교하는 내적비와 서로 다른 양을 비교하는 외적비, 삼각형의 변 사이의 비와 같이 개념적으로는 관련이 되지만 전체와 부분의 관계로 볼 수 없는 비인 도형의 닮음이나 축소와 확대에 해당하는 축척으로 구분하고, 내적비와 외적비와 관련된 대수적 상황 외에도 축척과 관련된 기하적 상황을 강조하고 있다. 또한 Chapin과 Anderson(2003)은 학생들의 비와

비례 개념에 대한 이해를 돕기 위해서는 다양한 상황에서 동일한 수학적 구조를 보는 것이 중요하며, 확대와 축소, 축척, 사영과 같은 상황에서 접하게 되는 닮음은 수와 기하를 연결할 뿐만 아니라 비와 비례에 관련된 다양한 관계들을 탐구하고 논의할 수 있기 때문에 중요함을 강조한다. 따라서 비례 추론은 대수적 상황과 기하적 상황에 관련된 다양한 상황에서의 추론을 포함해야 한다.

한편, 앞에서도 언급한 바와 같이 비례 추론과 관련해서 학생들이 갖는 어려움 중의 하나는 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 구분하지 못하는 것이다. 이와 관련해서 De Bock, Verschaffel 그리고 Janssens(1998), Van Dooren 외(2008), Van Dooren, de Bock, Evers 그리고 Verschaffel(2009)은 반지름이 6cm인 원의 넓이는 반지름이 2cm인 원의 넓이의 3배라고 하는 것과 같이 닮음 도형에서 길이의 비를 넓이, 부피의 비에 적용하는 경우, 삼각형에서 각을 이등분하거나 삼등분할 때 그 각의 꼭짓점을 그 각의 대변을 이등분하거나 삼등분하는 점들과 연결하는 경우, $\log ax = a\log x$와 같이 선형함수의 성질을 비선형함수에 적용하는 경우, 주어진 점을 지나는 함수 그래프를 그릴 때 항상 선형함수를 그리는 경우, 주사위 한 개를 4번 던졌을 때 적어도 한 번 6의 눈이 나올 확률을 4/6라고 생각하는 경우 등과 같이 측정, 기하, 함수, 확률 등 많은 영역에서 비례가 아닌 상황에 비례를 적용하는 오류와 오용이 학생들뿐만 아니라 어른들에게도 나타나며, 그 이유 중 하나로 비례 상황에 관련된 이해보다는 세 수를 제시하고 나머지 한 수를 구하는 과제 유형에 지나치게 초점을 맞추고 있기 때문임을 주장하고 있다. 따라서 비례 추론은 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 구분하는 능력을 포함해야 한다.

마지막으로, 비례 추론은 오랜 기간에 걸쳐 형성되며, 학생들이 비례식의 성질을 이용한 형식적인 전략을 배우기 이전에 자신들의 비형식적인 전략을 사용할 수 있으며, 오히려 형식적인 전략은 다 그런 것은 아니지만 비례식을 세워 방정식을 해결하는 것에 초점을 맞추게 되면, 비례 추론을 방해할 수 있다(Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 1993; Lesh et al., 1988). 따라서 비례 추론은 학생들의 비형식적 전략을 기초로 형식적 전략으로 나아가야 하며, 이런 비형식적 전략이 형식적인 접근 방식에 의한 비례 추론에 도움이 되도록 해야 한다.

본 연구에서는 지금까지 살펴본 것을 바탕으로 비례 추론을 대수적 상황과 기하적 상황을 포함한 다양한 비례 상황에서 곱셈적 관계를 인식하고, 그 관계에서 공변성과 일정성을 이해하며, 질적 추론과 양적 추론에 기초한 적절한 곱셈적 전략으로 문제를 해결하고, 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 인식하는 수학적 추론의 한 유형으로 보고자 한다.

2. 비례 추론 과제 유형

비례 추론 과제 유형에 대한 관점은 연구자들마다 다양하다. Ben-Chaim 외(1998)는 비례 추론 과제를 전체의 두 부분들을 비교하는 과제, 서로 다른 양들을 비교하는 과제, 개념적으로는 관련되어 있지만 전체의 부분들로 보기는 자연스럽지 않은 두 양들의 크기를 비교하는 축척과 관련된 과제로 구분한다. Cramer, Post 그리고 Currier(1993)와 안숙현과 방정숙(2008)은 비례 추론 과제를 미지값 문제, 수치적 비교 문제, 질적 예측과 비교 문제로, Reys, Lindquist, Lamdin 그리고 Smith(2012)는 미지값 구하기 과제, 비교 과제, 닮음 과제, Van de Walle(2008)는 질적 추론 과제와 양적 추론 과제로 나누고 양적 추론 과제로 미지값 구하기 과제, 비교 과제, 닮음 과제를 제시하고 있다. 한편 정영옥(2015)은 비례 추론 과제 유형에는 어떤 상황을 비로 표현하거나 비율 또는 축척을 구하는 과제가 자연적

으로 포함되므로, 비례 추론 과제 유형을 비례 과제에 한정하여 수치적 비와 관련된 과제인지 축소와 확대 등 기하와 관련된 과제인지에 따라 대수 과제와 기하 과제로, 수를 포함하는 과제인지 아닌지에 따라 양적 추론 과제와 질적 추론 과제로, 세 값이 주어지고 다른 하나를 구하는 과제인지 두 비를 비교하는 과제인지에 따라 미지값 과제와 비교 과제로 구분하여 크게 8가지 유형으로 제시하고 있다. 본 연구에서는 Ben-Chaim 외(1998), Cramer 외(1993), 안숙현과 방정숙(2008), Reys 외(2012), Van de Walle(2008)를 모두 포함할 수 있는 정영옥(2015)의 틀을 사용하여, 비례 추론 과제를 구분하고, 본 연구에서 사용하는 비례 검사지의 문항도 이 틀에 따라 구성하고자 한다.

3. 비례 추론 수준과 전략

학생들의 비례 추론 전략에 대한 연구들도 많이 진행되어 왔다. Ben-Chaim 외(2012)는 학생들의 전략을 전형식적 전략과 형식적 전략으로 구분하고, 전형식적 전략에는 시행착오 전략, 구성 전략, 합성단위 전략, 단위 비율 전략, 전체 부분 전략, 형식적 전략에는 대각선 곱 전략을 제시하고 있다. Lamon(1993)은 학생들의 비형식적 전략으로 직관적 전략, 세기 전략, 모델링 전략, 단위화 전략, 단위 비율 전략, 구성 전략, 합성 단위 전략을 제시하고 있다. 또한 Langrall과 Swafford(2000)는 학생들의 비례 추론 발달 수준을 네 수준으로 나누고, 비(非) 비례 추론 수준에는 임의 전략과 덧셈 전략, 비형식적 추론 수준에는 그림, 모델 또는 구체물을 사용하는 전략과 질적 비교 전략, 양적 추론 수준에는 구성 전략, 단위화 전략, 합성 단위 전략, 인수 전략, 통분 전략, 형식적 비례 추론 수준에는 변수를 사용한 대각선 곱 전략 및 동치 분수 전략을 제시하고 있다. 또한 전미교사협의회(NCTM, 2007)에서는 조정전략과 단위 비율 전략을 제시하고 있다. 본 연구에서는 정영옥(2015)을 참고하여 Langrall과 Swafford(2000)가 제시한 비례 추론 발달 수준에 따른 전략에 세기 전략, 전체 부분 전략, 조정 전략, 비례식의 성질을 이용한 전략을 추가하고, Langrall과 Swafford(2000)의 그림, 모델 또는 구체물을 사용하는 전략을 Lamon의 모델링 전략으로 통합하고, 본 연구의 학생들의 반응을 분석한 결과 두 가지 이상의 전략을 혼합해서 쓰는 혼합 전략을 추가하여 양적 추론 과제와 관련된 해결 전략으로 사용하고자 한다. 이를 제시하면 <표 1>과 같다.

<표 1> 비례 추론 해결 전략

수준	전략
비 비례 추론 수준	임의 전략, 덧셈 전략
비형식적 추론 수준	직관적 전략, 세기 전략, 모델링 전략, 질적 비교 전략
양적 추론 수준	단위화 전략, 합성 단위 전략, 구성 전략, 단위 비율 전략, 조정 전략, 전체 부분 전략, 인수 전략, 통분 전략, 혼합전략
형식적 추론 수준	비례식의 성질을 이용한 전략, 대각선 곱 전략

한편, 질적 추론 과제의 경우 본 연구에서 사용한 과제에 따라서는 양적 추론 과제에서 사용하는 전략을 사용한 학생들도 있지만, 대부분의 질적 추론 과제는 양적 추론 과제에서 사용하는 전략이 적합하지 않다. 또한 질적 추론 과제를 사용하는 목적은 앞에서도 언

급한 바와 같이 양들 사이의 관계를 파악하는 것이다. 따라서 본 연구에서는 질적 추론 과제에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과를 바탕으로 학생들이 비례 추론 과제에 포함되어 있는 관계들을 얼마나 인식하여 과제를 해결했는지를 기준으로 전략을 구분하고자 한다. 예를 들면 코코아 A, B의 농도는 같지만 전체 양은 A가 많은 경우에 A, B에 똑같이 코코아 가루를 한 스푼씩 더 넣었을 때 어느 코코아가 더 진한지를 알아보는 과제에서 코코아 가루를 더 넣으면 코코아 A, B의 농도가 각각 변할 뿐만 아니라 두 코코아 A, B의 농도 사이의 관계도 변함을 인식해야 해야 한다. 이를 위해서는 두 코코아의 농도가 처음에 같았기 때문에 같은 양의 코코아 가루를 넣으면 A, B에 들어 있는 우유의 양을 고려해서 우유의 양이 적은 B가 더 진하다고 하는 경우와 같이 우유의 양만을 비교하는 경우와 전체 코코아의 양과 가루의 양, 우유 당 가루의 양, 가루 당 우유의 양과 같이 전체와 부분이나 두 양을 모두 비교하는 경우, 또는 문제 상황에 맞게 수치화하는 경우 등을 생각해 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 한 가지 양만을 비교하는 경우를 1차원 전략, 두 가지 양을 비교하는 경우를 2차원 전략으로 구분하고, 그림을 그리거나 수치화하는 경우를 특수화 전략으로 구분한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 경기도 군포시에 위치한 D 초등학교의 6학년 7개 학급의 학생 173명을 대상으로 하는 조사 연구이다. D 초등학교는 소속 학생들의 학력 수준 및 가정의 사회·경제적 수준이 중간 정도에 해당하는, 보편적인 수준의 학교로 볼 수 있다. 연구에 참여한 학생들은 검사 시점으로부터 6개월 전에 수학 교과서 및 익힘책을 사용하여 일반적인 수학수업의 방식으로 비례식 단원을 학습한 상태였다.

2. 검사 도구

본 연구에서는 비례 추론에 관한 선행 연구(Ben-Chaim et al., 2012; Billings, 2001, The School Mathematics Project, 2003)를 참조하여 여러 가지 과제 유형이 포함될 수 있도록 총 20가지의 문항을 선정하고, 한국 학생들에게 적합하도록 문항의 맥락과 수준을 수정·보완하여 초안 검사지를 마련하였다. 연속되는 문항들에 이어지는 공통 맥락을 적용하여, 학생들의 문항 이해도를 높이고자 하였다. 각 문항에 '왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.' 라는 문구를 넣어 학생들이 해결 과정을 상세하게 기술할 수 있도록 하였다.

이 검사지로 연구 대상이 속한 학교의 6학년 1개 학급을 대상으로 2014년 10월 1차 예비 검사, 2014년 11월 2차 예비 검사를 실시하였다. 검사 결과를 바탕으로 정답률이 너무 높거나 낮은 6개의 문항을 사전 검사지에서 제외하였고, 본검사에서 사용할 문항의 구성 및 진술 방식 등을 수정·보완하였다. 이후 수학교육 전문가 3인의 검토를 거쳐 검사지를 완성하였다. 각 문항의 과제 유형과 구체적 내용은 <표 2>와 같다. 전체 14문항의 과제 유형을 세 가지의 기준에 따라 살펴보면 대수 과제(7문항)-기하 과제(7문항), 질적 추론 과제(6문항)-양적 추론 과제(8문항), 미지값 과제(6문항)-비교 과제(8문항)로 구분된다.

<표 2> 검사 문항별 유형 및 내용

문항	문항 유형			구체적 문항 내용
1	대수	질적	비교	총량은 A>B이고, 농도는 A=B인 코코아 A, B에 동일한 양의 코코아 가루를 첨가하였을 때 농도의 비교
2			미지값	코코아 A에는 코코아 가루를 B에는 우유를 첨가하였을 때, 진한 코코아 구하기
3		양적	비교	매실주스 A, B의 총량이 40㎖, 80㎖이고 매실액이 각각 20㎖, 30㎖가 들어 있어 A의 맛이 더 진할 때, A에는 매실액을 10㎖, B에는 물을 10㎖ 더 넣은 후 농도의 비교
4			비교	60㎢ 내 1000마리와 100㎢ 내 1500마리 길고양이의 밀도 비교
5			비교	버스로 등교하는 학생과 걸어서 등교하는 학생의 비가 20:15와 18:12인 두 반에서 두 비의 비교
6			미지값	6개에 1950원인 초콜릿 20개의 구매 비용 구하기
7			미지값	자전거로 8㎞를 가는 데 30분이 걸릴 때, 20㎞를 가는데 걸리는 시간 구하기
8	기하	질적	비교	동일한 방식으로 확대되는 과정을 나타내는 그림 선택
9			비교	원본 사진을 가로, 세로, 가로와 세로로 축소·확대된 사진 중 왜곡되지 않고 축소·확대된 사진 선택(사진 외형의 축소·확대)
10			비교	원본 사진이 왜곡되지 않고 확대·축소된 사진 선택(사진 외형 및 사진 속 사물 일부의 축소·확대)
11			미지값	주변 사물의 그림자를 참고하여 제시된 사물의 그림자 그리기
12		양적	비교	3×2인 사진을 18×12로 확대할 때 왜곡 여부 판단하기
13			미지값	3×5인 사진을 6×□로 확대했을 때 □의 값 구하기
14			미지값	15×10인 사진에 필요한 밀폐제가 400g일 때, 30×20인 사진에 필요한 밀폐제의 양 구하기

3. 자료 수집 및 자료 분석

질문지법을 사용하여 검사를 실시하였으며, 검사 후 몇 명의 학생들을 대상으로 해결과정에 관한 면담을 진행하였다. 검사는 2014년 12월에 학생들이 전체 14문항을 7문항씩 40분동안 해결하는 방식으로, 2차에 걸쳐 일주일 간격으로 실시하였다. 검사 과정에서 학생이 추가 시간을 원하는 경우 10분 내외의 시간을 제공하였다. 검사 시작 전 연구자가 검사의 의도와 주의사항을 학생들에게 설명하였으며, 검사 과정에서 문항에 관한 학생들의 질의에 응답하였다. 면담은 학생이 문제를 해결한 과정에 대한 정보가 충분하지 않아 추가적인 설명이 필요한 경우 수시로 실시하였다. 면담은 학생이 본인의 검사지를 보면서 연구자의 질문에 답을 하거나, 해결과정을 추가적으로 설명하는 방식으로 이루어졌다. 면담의 과정은 녹음과 동영상 촬영으로 수집하였으며, 녹화된 내용을 녹취하여 분석 자료로 활용하였다.

학생 173명을 대상으로 검사를 실시한 후 수집된 검사지를 검토하여, 문항 답변의 성실

도가 낮은 참여자들은 분석 대상에서 제외하였다. 분석에 적합하다고 판단된 138명의 검사지를 연구자 2명이 교차 분석하였다. 학생들의 반응은 정답, 오답, 무응답으로 구분하여 백분율을 구하였고, 문제 해결 방안 유형을 살펴 정답자들이 사용한 비례 추론 전략을 분석하였다. 오답의 경우에도 전략에 대한 분석이 가능하나 본 연구에서는 제외하였다.

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 학생들의 비례 추론 능력 분석을 위해 학생들의 문항별 정답률, 과제 유형별 정답률과 정답을 제시한 학생들이 사용한 비례 추론 전략에서 드러나는 전반적인 경향성을 살펴보고, 이어 각 문항별로 해결 과정에서 활용된 비례 추론 전략 및 반응 유형을 상세히 살펴보았다.

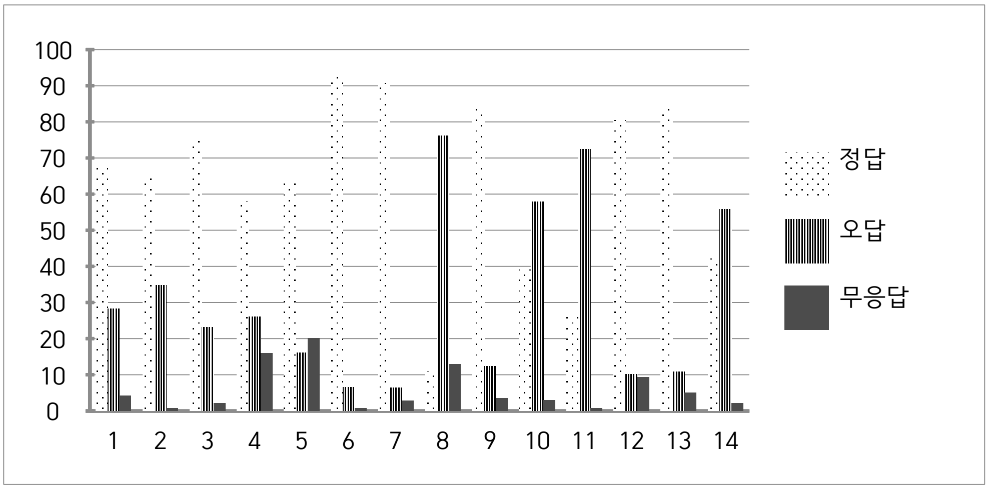
1. 문항별 정답률

문항별 학생들의 반응을 정답, 오답, 무응답으로 구분하고, 그 백분율을 구하면 <표 3>과 같다. [그림 1]은 문항별 정답률을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 3> 문항별 정답률

N=138

문항	문항유형	정답		오답		무응답	
		응답수	비율(%)	응답수	비율(%)	응답수	비율(%)
1	대수—질적—비교	93	67.4	39	28.3	6	4.3
2	대수—질적—미지값	89	64.5	48	34.8	1	0.7
3	대수—양적—비교	103	74.6	32	23.2	3	2.2
4	대수—양적—비교	80	58.0	36	26.0	22	16.0
5	대수—양적—비교	88	63.8	22	16.0	28	20.2
6	대수—양적—미지값	128	92.7	9	6.6	1	0.7
7	대수—양적—미지값	125	90.6	9	6.5	4	2.9
8	기하—질적—비교	15	10.9	105	76.1	18	13.0
9	기하—질적—비교	116	84.1	17	12.3	5	3.6
10	기하—질적—비교	54	39.1	80	57.9	4	3.0
11	기하—질적—미지값	37	26.8	100	72.5	1	0.7
12	기하—양적—비교	111	80.4	14	10.2	13	9.4
13	기하—양적—미지값	116	84.1	15	10.8	7	5.1
14	기하—양적—미지값	58	42.0	77	55.8	3	2.2
전체(%)		62.7		31.3		6.0	



[그림 1] 문항별 정답률

<표 3>과 같이 문항 전체의 정답률은 정답이 62.7%, 오답이 31.3%, 무응답이 6.0%이었다. [그림 1]에서 알 수 있듯이 정답률이 가장 높은 문항은 대수-양적-미지값 유형인 문항 6으로 92.7%의 정답률을 보였고, 정답률이 가장 낮은 문항은 기하-질적-비교 유형인 문항 8로 10.9%의 정답률을 보였다. 전체 14개 문항 중 상위 5개 문항의 경우 80%이상의 정답률을 나타내었으며, 하위의 4개 문항의 경우 50%이하의 정답률을 보였다. 우리나라의 수학 교과서(교육부, 2014)에서 주로 다루어지는 대수-양적-미지값 유형에 해당되는 문항 6과 7의 정답률은 90%이상인 것으로 나타났다. 반면 교과서에서 거의 다루지 않는 기하-질적-비교, 기하-질적-미지값 유형인 문항 8, 9, 10, 11의 경우, 평균 정답률이 40.2%로 상대적으로 낮은 정답률을 보였다.

대수 과제는 58.0%에서 92.7%까지의 정답률을 보였고, 평균 정답률은 73.1%였다. 기하 과제는 10.9%에서 84.1%까지의 정답률을 보였고, 평균 정답률은 52.5%였다. 양적 추론 과제의 정답률은 42.0%에서 92.7%로 나타났고, 평균 정답률은 73.3%였다. 질적 추론 과제의 정답률은 10.9%에서 84.1%까지 였고, 평균 정답률은 48.8%로 나타났다. 미지값 과제의 정답률은 26.8%에서 92.7%에 해당되었으며, 평균 정답률은 66.8%였다. 마지막으로 비교 과제의 정답률은 10.9%에서 84.1%까지 나타났으며, 평균 정답률은 59.8%였다.

이 결과로부터 알 수 있는 것은 첫째, 정답률이 대수 과제(73.1%)보다는 기하 과제(52.5%), 양적 추론 과제(73.3%)보다 질적 추론 과제(48.8%), 미지값 과제(66.8%)보다는 비교 과제(59.8%)에서 상대적으로 낮았다는 것이다. 이러한 차이는 본 연구에 참여한 학생들은 대수 과제, 양적 추론 과제, 미지값 과제에는 익숙하지만, 기하 과제, 질적 추론 과제, 비교 과제에는 익숙하지 않기 때문인 것으로 생각되는데, 실제로 정영옥(2015)의 연구를 살펴보면, 교과서에서는 기하 과제, 질적 추론 과제, 비교 과제는 거의 다루지 않고 있었다.

둘째, 다른 유형에 비해 기하 과제, 질적 추론 과제, 비교 과제에 해당하는 문항들의 정답률 사이에 큰 차이가 존재한다는 것을 알 수 있다. 기하-질적-비교 문항의 정답률을 살펴보면, 정답이 84.1%이고 오답이 12.3%인 문항이 존재하는 가하면, 정답이 10.9%이고 오답은 76.1%에 달하는 문항도 존재한다. 이는 동일한 유형의 문항 사이의 차이는 단순한 구조의 문항인 경우와 큰 수를 포함한 과제, 여러 가지 관계를 동시에 생각하는 과제, 길이의 비가 아닌 넓이의 비가 포함된 과제 등과 같이 복잡한 구조의 문항인 경우 사이에서

나타나는 차이로 판단된다.

셋째, 대수-양적-비교 유형인 문항 3, 4의 정답률을 살펴보면, 74.6%와 58.0%로 16.6%의 차이를 보였다. 문항 3은 농도, 문항 4는 밀도에 관한 문항이다. 농도와 밀도 상황 중 학생들에게 좀 더 익숙한 상황은 농도로 볼 수 있다. 농도는 수학뿐만 아니라 과학과 교육과정에서도 다루어지는 내용이다. 이에 학생들에게 좀 더 익숙한 농도 상황인 3번 문항에서 높은 정답률이 나타났던 것으로 보인다. 이와 같이 문항의 맥락 친숙도는 정답률에 영향을 미치는 것으로 판단된다.

2. 전반적인 비례 추론 전략 활용

정답을 제시한 학생들이 각 문항을 해결하는 데 사용한 비례 추론 전략을 질적 추론 과제의 경우와 양적 추론 과제의 경우로 구분하여 제시하면 〈표 4〉와 같다.

<표 4> 문제 해결 과정에서 사용된 비례 추론 전략

질적 추론 과제의 해결 전략

문항	과제 유형	응답수	2차원	1차원	특수화
1	대수-질적-비교	93	12	80	1
2	대수-질적-미지값	89	88	·	1
8	대수-질적-비교	15	15	·	·
9	기하-질적-비교	116	·	114	2
10	기하-질적-비교	54	52	·	2
11	기하-질적-미지값	37	·	27	10
계(%)		288	167 (58.0)	107 (37.1)	14 (4.9)

양적 추론 과제의 해결 전략

문항	과제 유형	응답수	비례식	인수	단위 비율	합성 단위	단위화	조정	질적 비교	혼합
3	대수-양적-비교	103	·	2	25	·	·	·	76	·
4	대수-양적-비교	80	·	·	57	5	2	16	·	·
5	대수-양적-비교	88	14	·	·	1	·	20	50	3
6	대수-양적-미지값	128	18	·	96	13	·	·	·	1
7	대수-양적-미지값	125	40	12	19	33	14	·	·	7
12	기하-양적-비교	111	12	98	·	·	·	·	1	·
13	기하-양적-미지값	116	39	77	·	·	·	·	·	·
14	기하-양적-미지값	58	13	11	·	1	33	·	·	·
계(%)		751	136 (16.8)	200 (24.7)	197 (24.4)	52 (6.6)	16 (6.1)	36 (4.4)	127 (15.6)	11 (1.4)

〈표 4〉를 살펴보면, 질적 추론 과제의 정답자들이 가장 많이 사용한 전략은 2차원 전략으로 전체의 58.0%에 해당되었다. 학생들이 1차원 전략을 사용한 비율은 전체의 37.1%에 달했으며, 특수화 전략을 사용한 비율은 4.9%로 나타났다. 문항 1과 같이 1차원 전략과 2차원 전략이 모두 사용 가능한 경우, 1차원 전략을 사용한 경우가 2차원 전략을 사용한 경우보다 6배 가량 많았다.

양적 추론 과제의 정답자들이 사용한 전략을 살펴보면, 형식적 추론 수준의 비례식 전략, 양적 추론 수준의 인수, 단위 비율, 합성 단위, 단위화, 조정 전략, 비형식적 추론 수준의 질적 비교 전략이 있었다. 여러 전략을 혼합하여 사용한 경우도 일부 존재하였다. 비비례 추론 수준의 전략을 사용한 경우는 없었다. 문항별 차이는 있으나 학생들이 가장 많

이 사용한 전략은 인수 전략으로 전체의 24.7%를 차지하였으며, 그 다음은 단위 비율 전략으로 전체의 24.4%에 해당되었다. 두 전략을 활용한 비율은 전체의 49.1%로 절반에 가깝다. 다음으로 많이 사용된 전략은 비례식 전략, 질적 비교 전략으로 각각 16.8%, 15.6%로 나타났다. 전략 활용의 비율을 수준별로 살펴보면, 양적 추론 수준이 66.2%로 가장 높았고, 형식적 추론 수준이 16.8%, 비형식적 추론 수준이 15.6%에 해당되었다. 비례식을 학습한 학생들임에도 불구하고 형식적 추론 수준의 전략을 활용한 비율은 상대적으로 낮게, 양적 추론 수준의 전략을 활용한 비율은 상대적으로 높게 나타났다.

비례 추론 전략의 수준별 활용 비율간 차이에 대하여 좀 더 상세히 살펴보고자 양적 추론 과제에 사용된 전략을 수준별로 구분하여 제시하면 <표 5>와 같다.

<표 5> 양적 추론 과제의 해결 과정에서 사용된 전략의 수준별 비율

대수·기하 - 양적 - 비교 과제					대수·기하 - 양적 - 미지값 과제				
문항	응답수	형식적 추론(%)	양적 추론(%)	비형식적 추론(%)	문항	응답수	형식적 추론(%)	양적 추론(%)	비형식적 추론(%)
3	103	·	27(26.3)	76(73.7)	6	128	18(14.1)	110(85.9)	·
4	80	·	80(100)	·	7	125	40(32.0)	85(68.0)	·
5	88	14(16.0)	21(23.9)	50(56.8)	13	116	39(33.6)	77(66.4)	·
12	111	12(10.8)	98(89.2)	1(0.1)	14	58	13(22.4)	45(77.6)	·

<표 5>를 살펴보면, 양적 추론 과제를 해결하는 데 사용된 전략의 82.8%가 양적 추론 및 비형식적 추론 수준에 해당되며, 16.8%의 전략이 형식적 추론 수준에 속한다. 비형식적 추론 수준의 전략은 비교 과제에서만 사용되었으며, 형식적 추론 수준의 전략은 일부 비교 과제에서는 사용되지 않았다. 비교 과제일 경우 비례식 전략의 활용이 자연스럽지 않다는 점을 고려하더라도 전반적으로 형식적 추론 수준의 전략이 활용된 비율은 다른 수준의 전략에 비하여 낮은 것으로 보인다.

비례식을 활용한 비율이 낮은 이유를 알아보기 위해, 문제를 해결하는 데 양적 추론 수준의 전략을 주로 사용한 학생들과 형식적 추론 수준의 전략을 주로 사용한 학생들을 대상으로 면담을 몇 명 실시하였다. 해당 학생에게 검사지를 보여주고 해결 과정을 환기하도록 한 후, 해당 문항을 다른 방식으로 해결할 수는 없을지 생각해 보도록 하였다.

문제를 해결하는 데 형식적 추론 수준의 전략을 주로 사용한 학생들은 대부분이 비례식 전략 외의 해결 방법을 거의 떠올리지 못하였다. <에피소드 1>은 학생과의 면담 일부를 제시한 것이다.

<에피소드 1> 주로 형식적 추론 수준의 전략으로 문항을 해결한 학생과의 면담 일부

교사: (검사지를 가리키며)이거 다 비례식으로 풀었잖아. 다른 방법으로 풀 수 있겠어?
학생: 비례식 말구요?
교사: 어.
학생: 다른 방법으로는 생각은 안나요.
교사: 지금 한번 생각해 볼 수 있겠어?
학생: 다른 방법은 그렇게 많지 않을 것 같아요. 비로 계산하는 거 밖에는 잘 모르겠어요.

교사: 비로 계산하는 거 밖에는 잘 모르겠어? 그럼 이건 비례식을 배우지 않은 경우에는 풀 수 없는 문제들 인거네?
학생: 그냥, 비례식 배우기 전에는 예상하고 찍어서 하는 거.
교사: 아~. 예상과 확인? 그거 밖에는 방법이 없다는 거구나?
학생: 네.

학생의 답변을 살펴보면 비례 추론에 관한 문항을 해결하는 방법은 비례식 전략이 유일하다고 여기고 있는 것으로 보인다. 극단적으로 비례식을 학습하지 않은 경우 문제를 해결할 수 없다고 답하는 학생도 있었다. 형식적 추론 수준의 전략을 주로 사용한 학생들의 경우 비례식으로 모든 문항이 해결 가능하기 때문에 굳이 다른 해결 방법을 고려하지 않았을 것으로 보인다. 또한 비례식 전략을 유일한 해결 방법으로 여기는 것으로 보아 그 외의 방식으로 비례 추론 문항을 해결한 경험이 거의 없었던 것으로 판단된다.

양적 추론 수준의 전략을 주로 사용한 학생과의 면담에서는 학생이 스스로 새로운 해결 방법을 생각하지 못하였고, 연구자가 비례식의 활용을 언급한 후 비례식의 활용이 가능하다는 것을 인지하였다. 연구자는 학생에게 전형적인 비례식 문제임에도 불구하고 이를 사용하지 않은 이유를 물었다. 학생은 양적 추론 수준의 전략들이 문제 해결에 더 적절한 해결 방법이라고 생각되었기 때문이라고 답하였다. 〈에피소드 2〉는 한 학생과 실시한 면담의 일부를 발췌한 것이다.

<에피소드 2> 주로 양적 추론 수준의 전략으로 문항을 해결한 학생과의 면담 일부
교사: 기존에 푼 방법(인수 전략)이 왜 더 쉽다고 생각해?
학생: 이렇게 푸는 게(인수 전략) 더 간단하다고 생각했는데 이렇게 보니까 둘 다(인수 전략, 비례식 전략) 두 번 계산하니까 서로 비슷한 거 같아요. 지금 보니까.
교사: 그런데 비례식이 떠올라지지는 않은 거지? 문제 풀 때?
학생: 네 그때는 이게 떠오르지가 않고, (자신의 풀이를 가리키며) 이것만 떠올랐어요.
교사: 그래~. 지금도 선생님이 이야기해서 비례식을 사용할 수 있다고 생각하게 된 거지.
학생: 네.

면담의 내용을 살펴보면 해당 학생은 문항을 접하였을 때 자연스럽게 비형식적 전략을 떠올렸고, 이를 활용하는 과정에서 번거로움이나 복잡함을 느끼지 않았으며 오히려 간편하다고 여겼음을 알 수 있다. 학생에 대한 면담 결과 비례식 전략의 활용을 시도하는 과정에서 어려움을 겪은 후, 대안적인 방법으로 인수 전략을 활용하였다고 보이지는 않는다. 현재 우리나라의 교육과정에서 비례 추론의 가장 효율적인 전략으로 비례식의 활용을 다루고 있지만, 비례식을 학습한 후에도 많은 학생들은 오히려 양적 추론 및 비형식적 추론 수준의 전략을 간편하고 자연스러운 전략으로 받아들이고 있음을 확인할 수 있었다.

3. 문항별 비례 추론 전략의 활용

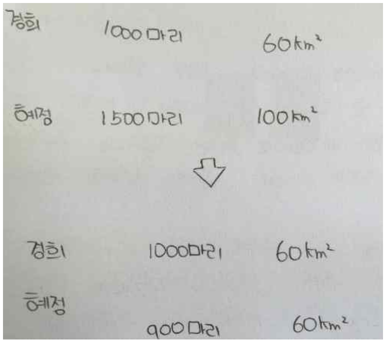
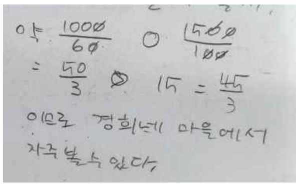
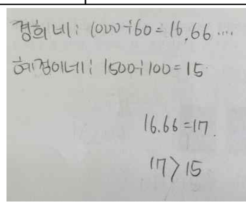
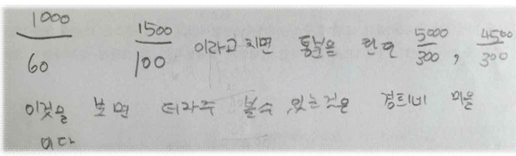
이 절에서는 학생들이 문제를 해결하는 데 사용한 비례 추론 전략을 문항별로 상세히 살펴보고자 한다. 지면 관계상 문항의 유형 및 정답률을 고려하여 9개 문항을 선정하였다.

가. 대수-양적-비교 유형

대수-양적-비교 유형인 문항 4의 정답률을 살펴보면, 정답은 58.0%, 오답은 26.0%, 무응답은 16.0%로 나타났다. 정답률은 14문항 중 10위로 낮은 편에 속하며, 무응답은 2번째로 높았다. 문항 4를 해결하기 위해서는 밀도 개념에 대한 이해가 필요하다. 무응답의 비율이 높게 나타난 이유는 밀도 개념에 대한 이해가 부족하기 때문인 것으로 생각된다. 실제로 오답자들의 풀이 과정을 살펴보면, 밀도 개념에 대한 이해 부족으로 인하여 '넓이당 마리 수'와 '한 마리당 넓이'의 의미를 해석하는 과정에서 오류가 발생된 경우가 많았다. 문항 4의 해결 방안 유형과 전략은 <표 6>과 같다.

<표 6> 문항 4의 해결 방안 유형 및 전략

경희는 집으로 돌아오는 길에 길고양이들을 보았다. 경희네 마을에는 약 1000마리의 길고양이가 있고, 혜정이네 마을에는 약 1500마리가 있다. 경희네 마을의 넓이는 총 60㎢, 혜정이네 마을은 총 100㎢이다. 길고양이들이 마을 전체에 고르게 퍼져 있다고 한다면, 길고양이를 더 자주 볼 수 있는 마을은 어느 곳인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.

정답	해결 방안 유형	응답수(%)	계	해결전략
경희네 마을	1㎢당 마리 수 비교	57(41.3)	80	단위 비율
	300㎢당 마리 수 비교	16(20.0)		조정
	3㎢당 마리 수 비교	5(6.3)		합성 단위
	1500마리당, 60㎢당 넓이 비교	2(2.5)		단위화
해결 방안 예시	 [단위화 전략]	 [합성 단위 전략]	 [단위 비율 전략]	 [조정 전략]

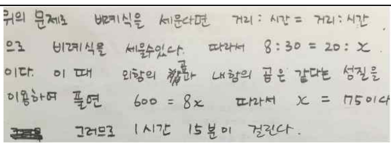
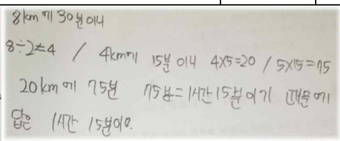
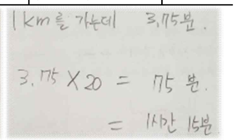
<표 6>을 살펴보면, 학생들이 두 마을의 고양이 밀도를 비교하는 데 여러 가지 기준을 사용하였음을 알 수 있다. 학생들이 가장 많이 활용한 전략은 단위 비율 전략으로 전체의 41.3%에 해당되었다. 단위 넓이인 1㎢를 기본 단위로 사용한 경우가 거의 대부분을 차지하였으며, 고양이 마리 수를 기준으로 활용한 경우도 일부 있었다. 다음으로 많이 사용된 전략은 조정 전략으로 전체의 20.0%에 해당되었다. 이 경우 문항에 제시된 값들의 공배수인 넓이 300㎢, 6000㎢와 고양이 3000마리가 기준이 되었다. 이 외에도 합성 단위 전략을 이용하여 넓이 3㎢, 6㎢를 기준으로 삼거나, 단위화 전략을 통하여 고양이 1500마리, 넓이 60㎢를 기준으로 삼은 경우도 있었다. 넓이를 기준으로 사용한 학생의 수가 고양이를 기준으로 하는 경우보다 많은 것으로 나타났다.

나. 대수-양적-미지값 유형

대수-양적-미지값 유형인 문항 7의 정답률을 살펴보면, 정답은 90.6%, 오답은 6.5%, 무응답은 2.9%로 나타났으며, 정답률은 14문항 중 2위에 해당되었다. 문항 7의 경우 다른 문항에 비하여 상대적으로 다양한 비례 추론 전략들이 활용되었다. 문항 7의 해결 방안 유형과 전략은 <표 7>과 같다.

<표 7> 문항 7의 해결 방안 유형 및 전략

유경이는 자전거로 8km를 가는 데 30분이 걸렸다. 자전거를 타고 동일한 속도로 20km를 가는 데 걸리는 시간은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.

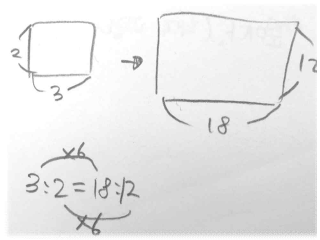
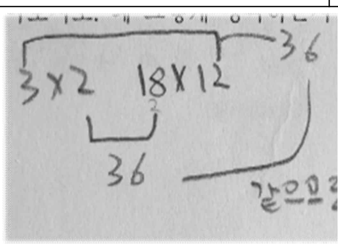
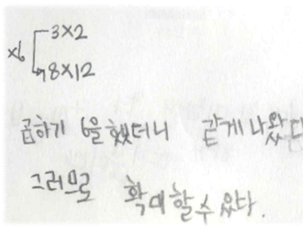
정답	해결 방안 유형	응답수(%)	계	해결 전략
75분	$8:30=20:\square$ 8km − 30분 / 20km − □분 $8\times\square=20\times30$이므로 $\square=75$	40(32.0)	125	비례식
	4km=15분이므로 $4\times5=20$이므로 $15\times5=75$	33(26.4)		합성 단위
	1km를 가는데 3.75분이 소요되므로 $3.75\times20=75$	19(15.2)		단위 비율
	8km는 20km의 2.5배. 30분의 2.5배는 75분	12(9.6)		인수
	20km에는 8km가 2번, 4km가 1번이므로 $30+30+15=75$	14(11.2)		단위화
	$4km-15$분, $8km-30$분, $12km-45$분, $16km-60$분, $20km-75$분	3(2.4)		합성 단위,세기 (혼합 전략)
	$8:30=4:15=20:75$	3(2.4)		인수,비례식 (혼합 전략)
	$8:30=1:\frac{30}{8}=1:\frac{15}{4}=20:\frac{15}{4}\times20=20:75$	1(0.8)		단위 비율 ,인수,비례식 (혼합 전략)
해결 방안 예시	 위의 문제로 비례식을 세운다면 거리 : 시간 = 거리 : 시간 으로 비례식을 세울수있다. 따라서 8 : 30 = 20 : x 이다. 이 때 외항의 곱과 내항의 곱은 같다는 성질을 이용하여 풀면 600 = 8x 따라서 x = 75이다 그러므로 1시간 15분이 걸린다. [비례식 전략]	 8km에 30분이니 8÷2=4 / 4km에 15분 이니 4X5=20 / 5X15=75 20km에 75분 75분=1시간15분이기 때문에 답은 1시간 15분이다. [합성 단위 전략]		 1km를 가는데 3.75분. 3.75 X 20 = 75 분. = 1시간 15분 [단위 비율 전략]

<표 7>을 살펴보면, 정답자 중 32.0%가 비례식 전략을 사용하였다. 학생들은 주로 '$a:b=c:\square$' 형태의 비례식을 사용하였으며, 우리나라 수학 교과서(교육부, 2014)에서는 다루지 않는 '$\begin{matrix} a-b \\ c-\square \end{matrix}$' 형태를 사용한 경우도 있었다. 다음으로 정답자의 26.4%가 합성 단위 전략을 사용하였다. 거의 대부분의 학생들이 8km과 20km의 공약수인 4km당 소요 시간을 단위로 이용하였다. 다음으로 15.2%의 학생들이 단위 비율 전략으로 1km당 소요 시간, 1분당 이동 거리, 1시간당 이동 거리를 이용하여 답을 얻었다. 대부분의 학생들이 거리당 소요 시간의 비율을 사용하였다. 정답자의 11.2%가 단위화 전략을 사용하였다. 8km당 30분을 단위로 삼고, 20km에 8km가 포함되는 횟수를 활용하였다. 이외에도 합성 단위 전략과 세기 전략, 인수 전략과 비례식 전략 등을 함께 활용하는 혼합 전략을 사용한 경우가 있었다.

다. 기하-양적-비교 유형

기하-양적-비교 유형인 문항 12의 정답률을 살펴보면, 정답은 80.4%, 오답은 10.2%, 무응답은 9.4%로 나타났다. 정답은 14문항 중 5위, 무응답은 4위로 정답과 무응답의 비율이 모두 높은 편이다. 본 문항을 해결하기 위해서는 사진을 확대 가능함의 의미를 확대 전·후 사진의 가로와 세로의 비율이 동일함 또는 사진의 가로가 확대된 비율과 세로가 확대된 비율이 동일함으로 해석할 수 있어야 한다. 문항 12의 해결 방안 유형과 전략은 〈표 8〉과 같다.

<표 8> 문항 12의 해결 방안 유형 및 전략

한 손님이 3×2(cm)인 사진을 18×12(cm)로 확대해 달라고 하였다. 사진의 일부가 제외되거나 왜곡되지 않고 확대할 수 있는지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.				
정답	해결 방안 유형	응답수(%)	계	해결전략
확대 가능	가로 세로의 길이가 일정하게 6배씩 늘어나므로 가능	98(88.3)	111	인수
	비례식(3:2=18:12)으로 놓았을 때 외항의 곱과 내항의 곱이 같으므로 확대 가능	12(10.8)		비례식
	가로와 세로의 길이 둘 다 똑같이 늘어나기 때문임	1(0.9)		질적 비교
해결 방안 예시	 [비례식 전략]	 [비례식 전략]	 [인수 전략]	

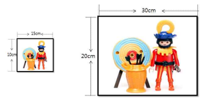
〈표 8〉을 살펴보면, 정답자 중 88.3%가 인수 전략을 사용하였다. 인수 전략을 사용한 학생들은 사진의 가로가 확대된 비율과 세로가 확대된 비율이 동일하다는 점에 주목하였다. 다음으로 정답자 중 10.8%가 확대 전·후 사진의 가로·세로의 길이로 비례식(3:2=18:12)을 세우고, 식이 성립하므로 확대 가능한 상황이라고 설명하였다. 수치를 사용하지 않고 질적으로 비교하여 가로와 세로의 길이가 동일한 비율로 확대된다고 설명한 경우도 있었다.

라. 기하-양적-미지값

기하-양적-미지값 유형인 문항 14의 정답률을 살펴보면, 정답은 42.0%, 오답은 55.8%, 무응답은 2.2%로 나타났다. 문항 14의 정답률은 11위로 양적 추론 과제 중 가장 낮았다. 문항 14를 해결하기 위해서는 비례 상황과 비례 상황이 아닌 것에 대한 구분이 필요하다. 필요한 밀폐제의 양이 1600g이라고 답한 정답자보다 800g이라고 답한 오답자들이 더 많았다. 문항 14의 해결 방안 유형과 전략은 〈표 9〉와 같다.

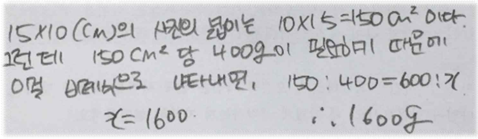
<표 9> 문항 14의 해결 방안 유형 및 전략

효주는 벽에 전시할 사진이 손상되지 않도록 특수한 밀폐제로 코팅을 하였다. 15×10(cm)의 사진을 코팅하는 데 밀폐제 400g이 필요하다면, 30×20(cm)의 사진을 코팅하기 위해 필요한 밀폐제의 양은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.

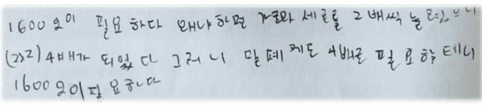


정답	해결 방안 유형	응답수(%)	계	해결전략
1600g	600÷150=4, 400×4=1600	33(56.9)	58	단위화
	150:400=600:□	13(22.4)		비례식
	가로, 세로 각각 2배씩 증가했으므로 4배가 됨	11(19.0)		인수
	$\frac{150}{5}$㎠당 $\frac{400}{5}$g이므로 30㎠당 80g가 됨. 600÷30=20이므로 20×80=1600	1(1.7)		합성 단위

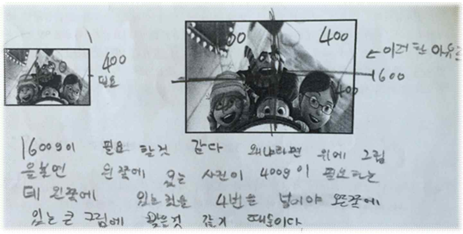
해결 방안 예시



[비례식 전략]



[인수 전략]



[단위화 전략]

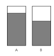
<표 9>를 살펴보면, 정답자 중 56.9%가 15×10(cm)의 사진을 단위로 하는 단위화 전략을 사용하였다. 30×20(cm)의 사진에 전체를 4등분하는 보조선을 그려 ‘큰 사진에 작은 사진이 4번 들어감’을 확인하거나, 사진의 넓이를 구해 ‘큰 사진의 넓이는 작은 사진의 4배임’과 같이 확대 전·후 넓이의 관계를 찾아 문제를 해결하였다. 비례식 전략으로 문제를 해결한 학생들은 22.4%였다. 다음으로 사진의 가로와 세로의 길이가 2배씩 늘어났기 때문에 넓이는 4배 증가한다는 인수 전략을 사용한 경우가 있었으며, 합성 단위 전략을 적용하여 30㎠당 필요한 밀폐제의 양을 구하여 문제를 해결한 경우도 있었다. 해결 과정에 대한 좀 더 상세한 이해를 위해 오답의 유형을 살펴보면 전체 오답자 중 97%가 800g의 밀폐제가 필요하다고 답하였다. 답에 대한 설명으로 ‘가로, 세로의 길이가 각각 2배 증가하였으므로 넓이도 2배 확대된다.’, ‘사진이 2배 확장되었다.’ 등이 있었다. 일반적으로 많이 알려져 있는 확대 상황에서 길이의 확대비와 넓이의 확대비를 동일한 것으로 여기는 학생들의 오개념이 분명하게 드러났다.

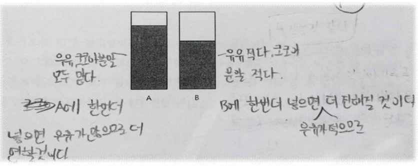
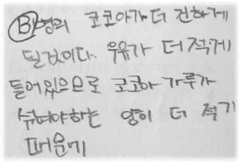
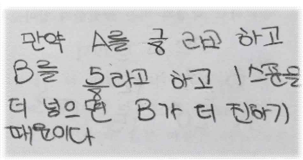
마. 대수-질적-비교 유형

대수-질적-비교 유형인 문항 1의 정답률을 살펴보면, 정답은 67.4%, 오답은 28.3%, 무응답은 4.3%으로 전체 문항 중 7위였다. 농도가 같은 두 A, B 코코아 중 A의 총량이 더 많을 때 똑같은 양의 코코아 가루를 동일하게 첨가한 후 두 코코아의 농도를 비교하는 과제이다. 코코아 총량에 대한 정보가 그림을 통해서만 제시되어 있기 때문에 학생이 문제의

조건을 직접 찾아내어야 한다. 문항 1의 해결 방안 유형과 전략은 <표 10>과 같다.

<표 10> 문항 1의 해결 방안 유형 및 전략

A, B에 담긴 코코아는 맛이 똑같다. A와 B에 똑같이 코코아 가루를 한 스푼씩 더 넣으면 어느 병의 코코아가 더 진하게 될지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 

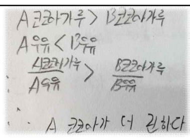
정답	해결 방안 유형	응답수(%)	계	해결전략
B	(코코아의 맛이 똑같으니) 우유가 더 적게 들어 있는 B가 더 진해짐	80(86.0)	93	2차원
	B의 경우 우유 당 코코아 가루의 양(밀도)이 많음(높음)	12(12.9)		
	A의 우유의 양이 400㎖, B의 우유의 양이 300㎖이고 농도는 0%일 때, $\frac{0}{400}$과 $\frac{0}{300}$이 됨. 이때 코코아 50g을 더한다면 $\frac{50}{400}$과 $\frac{50}{300}$이므로 B가 진함	1(1.1)		특수화
해결 방안 예시	 [2차원 전략]  [2차원 전략]  [특수화 전략]			

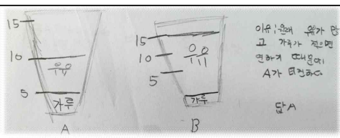
<표 10>을 살펴보면, 문항 1의 정답자 중 86.0%가 코코아 A, B의 우유의 양을 기준으로 두 코코아의 농도를 비교하였다. 두 코코아의 맛이 같기 때문에 우유가 더 적게 들어 있는 B가 진하게 된다고 답하였다. 코코아 가루의 양이 동일할 경우 우유의 양에 따라 코코아의 진하기가 결정된다는 점을 바탕으로 두 코코아 속 우유의 양만을 비교한 1차원 전략으로 볼 수 있다. 정답자의 12.9% 코코아 A와 B 각각의 농도를 추론하여 이를 비교하는 방법을 사용하였다. 해당 학생들은 우유당 코코아 가루의 양, 코코아 전체에서 코코아 가루가 차지하는 공간, 코코아 가루당 우유의 양을 비교하는 2차원 전략을 사용하였다. 이 외에도 특수화 전략을 사용하여 문제 상황에 맞추어 임의의 값을 설정하고 수식으로 두 코코아의 농도를 비교한 학생이 있었다.

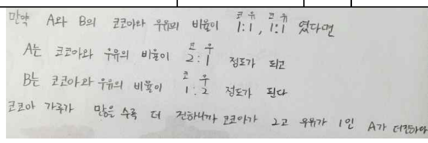
바. 대수-질적-미지값 유형

대수-질적-미지값 유형인 문항 2의 정답률을 살펴보면, 정답은 64.5%, 오답은 34.8%, 무응답은 0.7%로 무응답이 적고 오답이 높은 편이다. 문항 2의 정답은 14문항 중 9위로 중간 정도에 해당한다. 본 문항은 두 코코아의 총량과 농도에 관한 정보는 주어지지 않은 채, 코코아 한쪽에는 코코아 가루를, 다른 한쪽에는 우유를 첨가하였을 때 더 진한 코코아를 구하는 과제이다. 문항 2의 경우 문항 1과 다르게 그림이 제시되어 있지 않다. 문항 2의 해결 방안 유형과 전략은 <표 11>과 같다.

<표 11> 문항 2의 해결 방안 유형 및 전략

<table>
<tr><td colspan="5">A와 B 코코아가 있다. A에는 B보다 더 많은 코코아 가루를 넣었고, B에는 A보다 더 많은 우유를 넣었다. A, B 중 어느 코코아가 더 진한지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.</td></tr>
<tr><th>정답</th><th>해결 방안 유형</th><th>응답수(%)</th><th>계</th><th>해결 전략</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>A에는 코코아 가루가 더 들어가 진하고, B에는 우유가 더 들어가 연함</td><td>85(95.5)</td><td rowspan="3">89</td><td rowspan="2">2차원</td></tr>
<tr><td>A에는 B보다 전체에서 코코아 가루가 차지하는 비율이 우유의 비율보다 높기 때문임</td><td>3(3.4)</td></tr>
<tr><td>코코아 가루와 우유의 비율이 A는 2:1, B는 1:2라면 코코아 가루가 많을수록 더 진해지므로 A가 더 진함</td><td>1(1.1)</td><td>특수화</td></tr>
<tr><td>해결 방안 예시</td><td colspan="4">

[2차원 전략]


[2차원 전략]


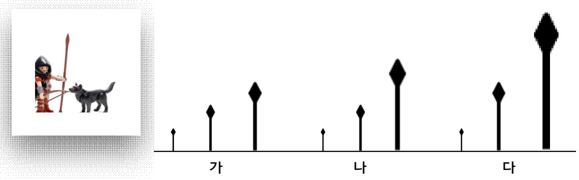
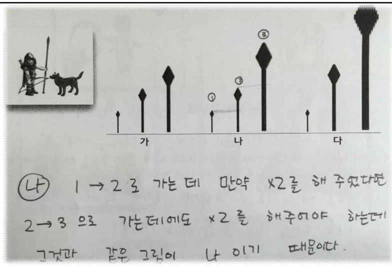
[특수화 전략]</td></tr>
</table>

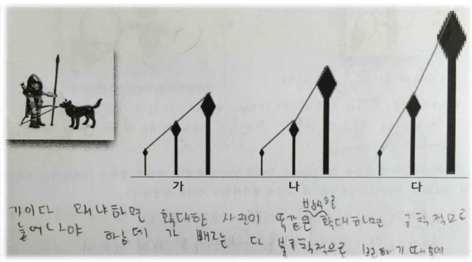
<표 11>을 살펴보면, 문항 2의 정답자의 거의 대부분으로 볼 수 있는 95.5%의 학생들이 코코아를 구성하는 코코아 가루의 양과 우유의 양을 고려하여 문제를 해결하는 2차원 전략을 사용하였다. 그 외 3.4%의 학생들은 각 코코아의 농도를 고려하여 문제를 해결하는 2차원 전략을 적용하였다. 특수화 전략으로 코코아 가루와 우유의 양을 수량화하여 농도를 비교한 경우도 있었다. 본 문항의 경우 많은 학생들이 해결 과정에서 그림을 이용한 것으로 나타났다.

사. 기하-질적-비교 유형

기하-질적-비교 유형인 문항 8의 정답률을 살펴보면, 정답은 10.9%, 오답은 76.1%, 무응답은 13.0%로 14문항 중 가장 낮았다. 문항 8은 그림이 동일한 비율로 연속적으로 확대되는 과정을 선택하는 과제로, 도형 사이의 곱셈적 관계를 파악해야 ‘그림 나’를 선택할 수 있다. 도형 사이의 관계를 덧셈적 관계로 파악하는 경우 ‘그림 가’와 ‘다’를 선택하게 된다. 한 번의 확대 과정만으로는 확대 전·후 도형의 관계가 곱셈적 관계와 덧셈적 관계 중 무엇에 해당되는지를 명확하게 구분하기는 어렵다. 두 번의 확대 과정을 비교함으로써 관계를 명확하게 파악할 수 있다. 문항 8의 해결 방안 유형과 전략은 <표 12>와 같다.

<표 12> 문항 8의 해결 방안 유형 및 전략

<table>
<tr><td colspan="2">은구는 아래의 사진을 한번 확대한 후, 똑같은 방식으로 확대된 사진을 한 번 더 확대하였다. 사진 속에서 창이 확대되는 과정을 바르게 보여주는 그림은 어느 것인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.</td><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>정답</td><td>해결 방안 유형</td><td>응답수(%)</td><td>계</td><td colspan="2">해결전략</td></tr>
<tr><td rowspan="2">나</td><td>창의 길이가 2배씩 늘어남</td><td>8(53.3)</td><td rowspan="2">15</td><td>인수</td><td rowspan="2">2차원</td></tr>
<tr><td>일정하게 커지고 길이가 늘어남</td><td>7(46.7)</td><td>질적 비교</td></tr>
<tr><td>해결 방안 예시</td><td colspan="5">

[2차원 전략, 인수 전략]


[2차원 전략, 질적 비교 전략]</td></tr>
</table>

<표 12>를 살펴보면, 정답자 15명 중 8명인 53.3%가 인수 전략을 바탕으로 ‘그림 나’가 창이 2배씩 일정하게 확대되는 과정을 나타내는 것이라고 설명하였다. 이는 첫 번째 확대 전·후의 관계와 두 번째 확대 전·후의 관계가 동일함을 고려한 2차원 전략에 해당한다. 그 외 7명은 질적 비교 전략을 사용하여 그림 ‘나’의 창이 일정하게 동일한 비율로 적절하게 확대되었다고 답하였다. 일부 학생들은 창의 끝부분에서 이웃하는 창 쪽으로 가로 선을 그어 창의 길이 사이의 관계를 파악하였다.

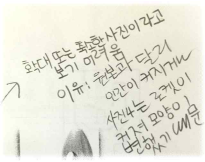
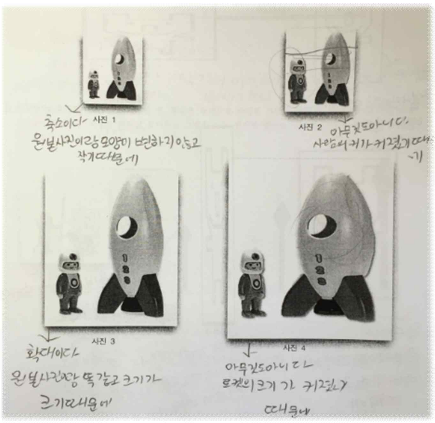
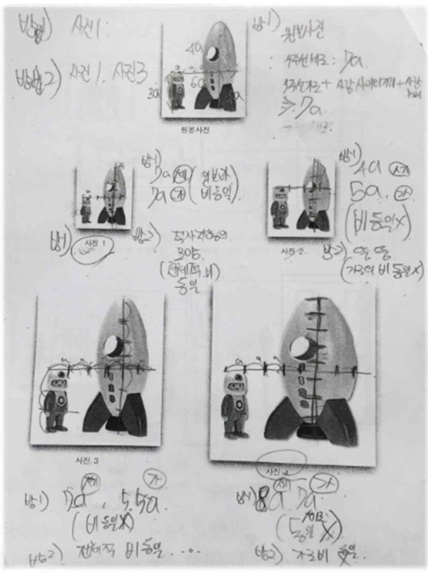
학생들이 사용한 전략에 대한 이해를 높이기 위하여 학생 반응의 대다수를 차지하는 오답의 유형을 살펴보고자 한다. 오답자 중 각 창의 끝을 연결하는 선을 그었을 때 일정한 기울기를 가진 직선이 그려진다는 이유로 ‘그림 가’ 또는 ‘다’를 선택한 경우가 많았다. ‘그림 나’의 경우 창끝을 연결한 선의 기울기가 일정하지 않기 때문에 적합하지 않다는 설명도 있었다. 일부 학생들은 확대될수록 일정하게 길이만큼씩 증가한다는 것에 주목하여 ‘그림 가’와 ‘다’를 선택하였다. ‘그림 가’의 경우 원래 창의 길이만큼 증가되며, ‘다’의 경우 원래 창의 2배 길이만큼씩 일정하게 증가한다. 이 학생들의 경우 도형의 확대 전・후 사이의 관계를 모두 고려하는 2차원 전략을 사용하였으나, 도형 사이의 관계를 곱셈적 관계가 아닌 덧셈적 관계로 파악하여 오답을 선택한 것으로 보인다.

아. 기하-질적-비교 유형

기하-질적-비교 유형인 문항 10의 정답률을 살펴보면, 정답은 39.1%, 오답은 57.9%, 무응답은 3.0%로 정답률은 14문항 중 12위로 낮은 편에 속한다. 원본 사진이 축소・확대된 사진을 선택하는 과제로 사진의 외형뿐만 아니라 사진 속 그림의 일부가 원본과 다른 비율로 변경된 경우가 제시되어 있다. 사진 1은 우주인만 확대되었고, 사진 4은 우주선의 너

비만 확대되어 두 사진 모두 우주선과 우주인의 비율이 원본 사진과 다르다. 문항 10의 해결 방안 유형과 전략은 <표 13>과 같다.

<표 13> 문항 10의 해결 방안 유형

<table>
<tr><td colspan="3">다음의 여러 사진 중 원본 사진의 모양이 변하지 않도록 확대 또는 축소한 사진을 찾고, 그렇게 생각한 이유를 설명하시오. 확대 또는 축소한 사진이라고 보기 어려운 이유도 설명하시오.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>정답</td><td colspan="2">해결 방안 유형</td><td>응답수(%)</td><td>계</td><td>해결 전략</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2, 3</td><td colspan="2">사진1: 우주인과 우주선의 크기 비율이 다름, 사진4: 우주선이 옆으로 더 늘어남</td><td>45(83.3)</td><td rowspan="3">54</td><td rowspan="2">2차원</td></tr>
<tr><td colspan="2">원본과 모양이 같고 크기만 다름</td><td>7(13.0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">기준 단위를 만들어 사진위에 선을 그어 측정하여 판단함, 우주인의 크기를 우주선에 표시한 후 사진마다 비교함</td><td>2(3.7)</td><td>특수화</td></tr>
<tr><td>해결 방안 예시</td><td colspan="5"> [2차원 전략]

[2차원 전략]

[특수화 전략]</td></tr>
</table>

<표 13>을 살펴보면, 정답자 중 83.3%가 사진 속 그림 사이의 비를 근거로 문제를 해결하였다. 해당 학생들은 사진 1과 4에서 우주인과 우주선의 비율이 원본 사진과 다르다고 설명하였다. 확대 전·후의 사진을 비교하며 더불어 사진 속 그림 사이의 비율도 고려하는 2차원 전략이다. 다음으로 정답자 중 13.0%가 사진 2, 3이 원본 사진과 모양은 같고 크기가 다르다고 설명하였다. 그 외 3.7%의 학생들은 특수화 전략으로 우주인의 크기를 기준 단위로 삼아 우주인과 우주선의 비율을 살피기도 하였다. 오답자 중 특히 사진 4를 확대 사진으로 답한 경우가 상당히 많았다. 사진 4의 왜곡 여부를 판단하기 위해서는 사진

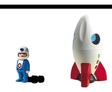
속 우주인과 우주선 크기의 비율 뿐 아니라 우주선 자체의 비율도 살펴야 하는 2차원 전략이 요구되나 해당 학생들은 여러 관계를 복합적으로 고려하지 못한 것으로 보인다.

자. 기하-질적-미지값 유형

기하-질적-미지값 유형인 문항 11의 정답률을 살펴보면, 정답은 26.8%, 오답은 72.5%, 무응답은 0.7%로 나타났다. 정답의 비율은 14문항 중 13위, 오답의 비율은 2위에 해당되었다. 문항 11은 주변 사물의 그림자를 참고하여 제시된 사물의 그림자를 그리는 과제이다. 우리나라 수학 교과서(교육부, 2014)에서는 다루어지지 않아 학생들에게 낯선 형태의 문항으로 볼 수 있다. 문항 11의 경우 질적 추론 과제에 해당되나 우주인과 우주인 그림자의 비율을 기반으로 우주선 그림자의 크기를 추론하는 문제 상황으로, 양적 추론 과제의 해결 과정과 유사한 면을 가지고 있다.

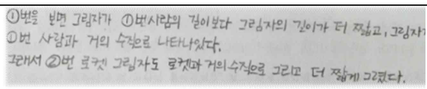
<표 14> 문항 11의 해결 방안 유형 및 전략

다음은 같은 시간대에 찍은 사진입니다. 우주인의 그림자를 보고 로켓에 맞는 그림자를 그려보시오. 그림자를 그와 같이 그린 이유도 설명하시오.

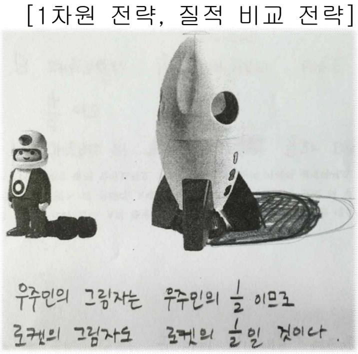


정답	사물과 그림자 길이의 비율이 2:1에 가깝고, 그림자가 사물의 오른쪽에 놓임				
해결 방안 유형		응답수(%)	계	해결전략	
우주인의 그림자는 우주인의 보다 짧으므로, 우주선의 그림자도 우주선보다 짧음		27(72.9)	37	질적 비교	1차원
우주인과 그림자는 2:1가량의 비이다. 우주선의 그림자도 우주선의 2:1 정도가 됨		10(27.1)		인수	특수화

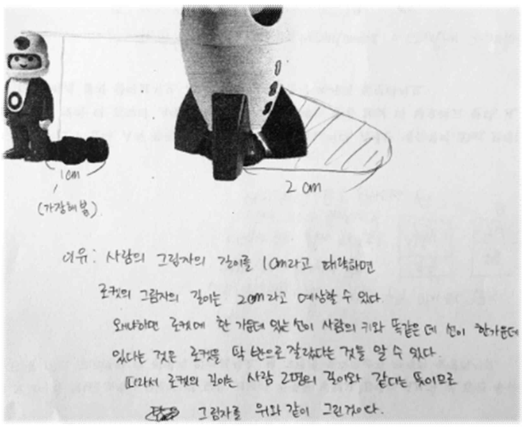
해결 방안 예시



[1차원 전략, 질적 비교 전략]



[인수 전략, 특수화 전략]



[특수화 전략, 인수 전략]

<표 14>를 살펴보면, 문항 11의 정답자 중 72.9%가 질적 비교 전략을 사용하여 우주인과 우주인 그림자의 비율을 어림하였다. 이는 사물과 그림자의 길이의 비율을 고려한 것으로 1차원 전략으로 볼 수 있다. 다음으로 정답자 중 27.1%가 인수 전략을 사용하여 우주선이 우주인의 약 2배이므로 우주선의 그림자는 우주인 그림자의 약 2배라고 답하였다. 이외에도 우주인, 우주인의 그림자, 우주선의 크기를 수량화하여 문제를 해결하는 특수화 전략도 활용되었다.

Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구는 다양한 비례 추론 과제에서 나타나는 학생들의 비례 추론 전략과 반응을 분석함으로써 학생들의 비례 추론 능력을 살펴보고, 비례 추론 능력 지도를 위한 시사점을 제공하고자 하였다.

본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 첫째, 학생들은 비례 추론의 과정에서 다양한 전략을 사용한다. 본 연구에서 학생들은 비례식을 학습하였음에도 불구하고, 학생들은 비례 추론 문항을 해결하는 과정 전반에 걸쳐 형식적 전략뿐만 아니라 인수 전략, 단위 비율 전략과 같은 다양한 비형식적 전략들을 더 많이 활용하였다. 둘째, 비례 추론 과제 유형에 따라 정답률의 차이가 존재한다. 본 연구에서 학생들이 해결한 문항의 정답률을 과제 유형별로 살펴보면, 기하 과제보다는 대수 과제, 질적 과제보다는 양적 과제, 비교 과제보다는 미지값 과제의 정답률이 높게 나타났다.

본 연구의 결과를 바탕으로 앞으로의 비례 추론 지도를 위해 고려할 점을 생각해 보면 다음과 같다. 첫째, 비례 추론 전략 지도와 관련해서 비례식의 성질을 이용한 형식적인 전략을 지도하는 것과 더불어 또는 형식적인 전략을 지도하기 전에 비형식적인 전략을 다루는 방안을 고려해야 한다. 실제로 본 연구의 대상 학생들이 배운 교과서(교육부, 2014)를 살펴보면, 비의 성질과 비례식의 성질을 배우고 이를 이용하여 비례추론 과제를 다루는 차시가 많은 부분을 차지하고 있는 것을 생각해 볼 때, 학생들이 비례 추론 과제들을 해결하면서 비례식의 성질을 이용한 형식적인 전략을 많이 사용하지 않는 것은 이런 형식적인 전략의 지도의 효율성을 다시 한 번 고려하지 않을 수 없게 한다. 본 연구에서 다룬 미지값 과제와 비교 과제를 살펴보면, 비교 과제는 실제로는 형식적인 전략으로 해결하기보다는 비와 비례 개념에 기초한 인수 전략이나 단위비율 전략과 같은 비형식적인 전략으로 접근하는 것이 훨씬 자연스러운 반면, 미지값 과제는 형식적 전략으로 해결하는 것이 더 쉽고 교과서에서도 미지값 과제는 형식적 전략을 사용하도록 지도하고 있다. 그러나 본 연구에서 학생들이 사용한 비례 추론 전략을 분석한 결과를 살펴보면, 비교 과제는 물론이고 미지값 과제에서도 형식적 전략보다는 비형식적 전략을 더 많이 사용하고 있음을 알 수 있다. 앞에서도 언급하였듯이 비례 추론의 핵심은 일정성과 공변성을 인식함으로써 비의 동치 관계를 파악하는 것, 다른 말로 하면 여러 비 중에서 비의 같음과 다름을 인식하는 것이라고 할 수 있다. 이런 관점에서 볼 때 비례식은 비례 추론의 극히 제한된 부분일 뿐이며, 비의 동치 관계가 성립하는지 안 하는지를 생각하는 비교과제에서 뿐만 아니라 비의 동치 관계가 성립한다는 가정 하에 방정식에 의존해서 미지항을 구하는 미지값 과제에서도 비례식의 성질을 이용한 형식적 전략을 많이 사용하지 않는 점은 비례식 지도를 재고할 필요가 있음을 시사한다. 한편, 검사 실시 후 면담에서, 학생들은 비례식을 배웠어도 어떤 문항에 비례식을 활용할 수 있는지 인식하지 못하고 비형식적인 전략을 사용하거나 비례식을 모르면 문제를 해결할 수 없다고 생각하였는데, 두 경우 모두 바람직한 방향은 아니라고 할 수 있다. 따라서 비례식을 지나치게 강조하는 것보다는 학생들의 비형식적 전략과 더불어 다양한 비례 추론 전략의 하나로 또는 비형식적 전략에서 출발하여 형식적 전략으로 나아가는 방향을 고려할 필요가 있다.

둘째, 양적·질적 추론 능력에 관련해서, 비례 추론 지도의 초기부터 학생들에게 질적 추론의 경험을 많이 제공하는 것과 더불어 질적 추론 능력과 양적 추론 능력을 결합하여

비례 추론 과제를 해결하도록 지도할 필요가 있다. 본 연구에서 드러난 학생들의 질적 문항과 양적 문항의 정답률을 분석한 결과를 살펴보면, 대체적으로 양적 문항에 비하여 질적 문항의 정답률이 상대적으로 낮지만 일부 질적 추론 문항에서는 높은 정답률을 보이는 것도 있음을 알 수 있었다. 한편 질적 문항의 정답률이 상대적으로 낮은 것은 본 연구의 대상인 학생들이 배운 수학 6-1 교과서(교육부, 2014)에 질적 추론에 관련된 문항이 거의 없는 것을 생각해 볼 때는 당연한 결과일 수 있으나, 다른 한편 일부 질적 문항에 대해 높은 정답률을 보이는 것은 학생들이 비와 비례에 관련된 부분을 배우기 전이나 배우는 과정에서 어느 정도는 질적 추론 능력이 존재하거나 발달하고 있음을 알 수 있다. Billings(2001)가 주장하는 바와 같이 비례 추론 능력을 향상시킬 수 있는 방법 중 하나는 비에 관련된 다양한 양들 사이의 관계를 탐구하고 확장할 수 있도록 그 양들을 조정하는 방법을 이해하는 것인데, 수치적 양의 일부나 전부를 제거한 질적 추론 문항은 양들 사이의 관계를 더 명백하게 드러내기 때문에 관계들을 조사하고 문제를 해결하는 데 도움을 주며, 특히 비례 개념을 도입하는 데 더 유효하다. 따라서 학생들이 질적 추론 과제를 많이 접하면서 양들 사이의 관계를 탐구할 수 있도록 함으로써 어느 정도는 발달되어 있는 것으로 예측되는 질적 추론 능력을 더욱 향상시키는 것이 필요하다. 또한 이런 질적 추론 능력은 학생들이 질적 추론 과제를 해결하는 것뿐만 아니라 양적 추론 과제를 해결할 때에도 질적 추론 능력과 양적 추론 능력을 결합하여 비례 추론 과제를 해결하는 데 도움이 될 수 있도록 해야 한다. 이와 관련하여 Billings(2001)는 비례식을 사용하여 문제를 해결하였지만 오답을 제시한 학생에게 문제에 주어진 양들 사이의 관계, 즉 증가 또는 감소할 것인지, 어느 정도 증가 또는 감소할 것인지 등의 질적 추론을 통해 문제 상황을 옳게 파악함으로써 정답을 구해가는 과정을 제시하고 있다. 따라서 학생들에게 양적 추론 과제를 해결할 때에도 정확한 계산만을 시도하기 보다는 질적 추론을 통해서 전반적인 문제 상황을 이해하게 함으로써 양적 추론 과제를 해결하는 데 도움이 될 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

셋째, 다양한 비례 상황과 관련해서, 미지값 과제와 비교 과제, 내적비와 외적비 및 축척비를 모두 포함하여 더 다양한 상황들을 포함시켜 지도할 필요가 있다. 본 연구에서 드러난 학생들의 미지값 과제와 비교 과제의 결과 분석을 살펴보면, 미지값 과제와 비교 과제의 경우는 단순한 구조의 과제에서는 미지값 과제가 비교 과제보다 더 높은 정답률을 보이나 같은 유형의 과제라고 해도 큰 수가 포함되거나, 비가 정수배가 아니거나, 여러 가지 관계를 동시에 고려해야 하거나, 1차원이 아닌 2차원 이상을 생각해야 하는 복잡한 구조의 과제에서는 문항의 정답률이 많은 차이를 나타내고 있음을 알 수 있다. 이는 권미숙, 김남균(2009)의 연구 결과와 일치한다. 이런 결과는 한편 본 연구의 대상 학생들이 배운 교과서(교육부, 2014)에 비교 과제가 거의 없는 것을 생각해 볼 때는 당연한 결과일 수 있다. 따라서 비례 추론은 비의 동치 관계를 파악하는 것이 핵심임을 고려할 때, 주어진 비들이 동치인지 아닌지를 판단하는 비교 과제는 미지값 과제와 더불어 아주 중요한 과제임을 인식하고, 비교 과제를 좀 더 강조할 필요가 있다. 또한 이런 분석 결과를 통해 볼 때, 학생들의 비례 추론과 관련해서 과제 유형도 중요하지만 과제의 구조도 고려해야 할 대상임을 알 수 있다. 한편 대수 과제와 기하 과제와 관련된 분석 결과를 살펴보면, 전반적으로 대수 과제의 문항이 기하 과제의 문항보다는 높은 정답률을 보인다. 이는 한편으로는 본 연구의 대상인 학생들이 배운 수학 6-1 교과서(교육부, 2014)에는 내적비와 외적비 등의 대수적 문제가 주를 이루고 있으며, 축척과 관련된 문제는 한 두 문제를 제외하면 제시되어 있지 않기에 학생들의 경험이 부족한 것이 원인이라고 생각할 수 있다. 이런 분석 결

과는 축척비 문제가 학생들에게 가장 어렵다는 Miller와 Fey(2000, p. 313)의 연구 결과와 일치한다. 다른 한편으로는 축척비와 관련된 과제에서 특히 정답률이 낮은 문항은 학생들이 범하는 전형적인 넓이 과제와 학생들에게는 다소 낯선 두 번 연속 확대하는 비의 합성 과제가 포함되어 있기 때문이다. 이와 관련해서 학생들의 오답 분석 결과를 살펴보면, 다른 과제에서는 0수준에 속하는 덧셈 전략을 사용하는 학생이 극히 소수인 반면, 이 두 과제에 대해서는 많은 학생들이 덧셈 전략을 사용하고 있음을 알 수 있는데, 예를 들면 합성 과제의 경우에 학생들은 두 번째 확대 사진을 첫 번째 확대 사진의 두 배가 아니라 처음 두 개의 막대의 길이들의 합으로 생각하는 덧셈 전략을 사용하고 있음을 알 수 있다. 이는 과제의 친숙도나 복잡성에 따라 학생들의 전략 수준이 가변적이라는 사실을 말해 주고 있다. 이런 결과는 Tourniaire와 Pulos(1985)가 주장한 바와 같이 학생들이 정수비가 제시된 문제는 곱셈적 전략을 사용하지만, 정수비가 아닌 문제는 덧셈적 추론을 하는 것과 같이 좀 더 어려운 문제에서는 그 어려움이 구조적인 원인이든 내용적인 원인이든지 상관없이 더 초보적인 수준의 전략들을 사용한다는 연구 결과와 일치하는 것이다. 따라서 우리가 학생들의 비례 추론 수준과 전략의 관계를 생각할 때, 이 수준은 고정된 것이 아니라 과제 특성이나 개인의 성향에 따라 가변적이며, 어려운 과제에 접하게 되면, 더 낮은 수준으로 돌아가는 퇴행의 과정도 있음을 생각해야 한다. 한편 일반적으로는 대수 과제에 있어서 학생들이 내적비보다는 외적비를 어렵게 생각하는데, 반대의 결과가 나온 것은 내적비에 제시된 수들이 한 수가 다른 수의 자연수 배가 되지 않는 점과 교과서에서 다루는 것보다는 큰 수를 사용했기 때문으로 파악된다. 따라서 학생들이 덧셈적 사고에서 벗어나 곱셈적 사고를 기초로 하는 안정적인 비례 추론 능력을 획득하기 위해서는 다양한 유형과 구조를 가진 과제를 접할 필요가 있다.

넷째, 비례 상황과 비례 상황이 아닌 과제를 인식하는 것이 비례 추론의 중요한 요소임을 생각할 때 비와 비례 개념에 대한 깊은 이해를 기초로 어떤 상황이 비례 상황인지 아닌지를 판별하는 과제를 다루는 더 많은 경험이 필요하다. 본 연구에서 비례 상황과 비례 상황이 아닌지를 판별하는 것과 관련된 과제는 가로와 세로의 길이를 2배씩 확대한 사진의 밀폐제의 양을 구하는 문항으로 길이를 2배했을 때 넓이의 비는 어떻게 되는지를 구하는 것이다. 본 연구의 대상 학생들이 배운 교과서(교육부, 2014)를 살펴보면, 탐구 활동에서 이런 과제를 다루고는 있음에도 불구하고, 정답률이 42%에 불과하며, 50% 이상의 학생들이 길이를 2배할 때 넓이도 2배가 된다고 인식하고 있음을 알 수 있었다. 이런 결과는 12세에서 16세까지의 학생들을 대상으로 넓이 과제를 집중적으로 조사한 De Bock 외(1998), De Bock 외(2002)의 연구 결과와 일치한다. Van Dooren 외(2003)는 이러한 오개념이 얼마나 교정되기 어려운지를 보여 주고 있으며, 이러한 오개념이 발생하는 이유로는 기하에 대한 적절한 지식의 부족과 비례 추론 과제를 해결할 때, 문제 상황과 관련된 기본 개념과 관계를 중요시하지 않고 세 수가 제시되고 나머지 한 수를 구하는 미지값 과제로 형식화하는 데 초점을 맞추는 것이 문제이며, 비례 개념의 깊은 이해를 기초로 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 분별할 수 있음을 주장하고 있다. 이러한 주장과 더불어 다양한 상황에서 동일한 수학적 구조를 인식하는 것이 전이와 일반화를 지원한다는 Chapin과 Anderson(2003)의 주장을 고려한다면, 넓이 과제와 같이 학생들이 비례 상황이 아님에도 불구하고 비례 상황으로 인식하는 오류를 교정하기 위해서는 하나의 상황을 다루는 것으로는 부족하며 다양한 상황 속에서 비례 상황인지 아닌지를 판별해 보는 기회를 더 많이 가지는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

고은성, 이경화 (2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

교육부 (2014). **수학 6-1**. 서울: 두산동아(주).

권미숙, 김남균 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

김경선, 박영희 (2007). 초등학생의 비례 추론 지도에 관한 연구. **학교수학, 9**(4), 447-466.

박정숙 (2008). 비와 비례 과제에서 가법적 전략을 사용하는 학생의 무제해결 특징. **학교수학, 10**(4), 603-623.

안숙현, 방정숙 (2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

유현주 (1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이종욱 (2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구, 25**(1), 21-58.

정은실 (2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실 (2013). 초등학교 수학교과서에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

홍지연, 김민경 (2013). 초등수학 비구조화된 문제해결 과정에서의 비례적 추론. **학교수학, 15**(4), 723-742.

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ration and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 149-175.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grouws(Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-331). New York: Macmillan Publishing Company.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and Proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre-and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes).* Rotterdam, AW: Sense Publishers.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3), 247-273.

Billings, E. M. H. (2001). Problems that encourage proportion sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(1), 10-14.

Chapin, S. & Anderson, N. (2003). Crossing the Bridge to Formal Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 420-425.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens(Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 65-83.

De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-334.

Dole, S., Clarke, D., Wright, T., Hilton, G., & Roche, A. (2008). Eliciting growth in teachers' proportional reasoning: Measuring the impact of a professional development program. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar(Eds.) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 163-168.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H., Janssen, G. M., & Sweers, W. J. (1976). Five Years IOWO. *Educational Studies in Mathematics, 7*(3), 186-367.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 324-345.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpente, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research*(pp. 131-156). New Jersey, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* New Jersey: Lawrence Erbaum Associates, Inc., Publishers.

Langrall, C. W. & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*(pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Miller, J. L. & Fey, J. T. (2000). Proportional reasoning. 5(5), 310-313. *Mathematics*

Teaching in the Middle School, 5(5), 310-313.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준.** (류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 옮김). 서울: 경문사 (영어 원작은 2000년 출판).

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.) *The Idea of Algebra K-12* (1998 Yearbook, pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lamdin, D. V., & Smith, N. L. (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법.** 박성선 · 김민경 · 방정숙 · 권점례 역. 서울; 경문사. (영어 원작은 2009년 출판).

Shield, M. & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part Ⅰ. *Educational Studies in Mathematics 15,* 327-347.

The School Mathematics Project(2003). *SMP Interact Practice for Book 8T*. Cambridge University Press.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Van de Walle, J. A. (2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가.** (남승인 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2004년 출판).

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2003). Improper Applications of Proportional Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(4), 204-209.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The Linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187-211.

<Abstract>

An Analysis of Proportional Reasoning of Elementary School Students
- Focused on Sixth Graders -

Jung, Yoo Kyung[3]; & Chong, Yeong Ok[4]

This study aims to investigate an approach to teach proportional reasoning in elementary mathematics class by analyzing the proportional strategies the students use to solve the proportional reasoning tasks and their percentages of correct answers. For this research 174 sixth graders are examined. The instrument test consists of various questions types in reference to the previous study; the proportional reasoning tasks are divided into algebraic-geometric, quantitative-qualitative and missing value-comparisons tasks. Comparing the percentages of correct answers according to the task types, the algebraic tasks are higher than the geometric tasks, quantitative tasks are higher than the qualitative tasks, and missing value tasks are higher than the comparisons tasks. As to the strategies that students employed, the percentage of using the informal strategy such as factor strategy and unit rate strategy is relatively higher than that of using the formal strategy, even after learning the cross product strategy. As an insightful approach for teaching proportional reasoning, based on the study results, it is suggested to teach the informal strategy explicitly instead of the informal strategy, reinforce the qualitative reasoning while combining the qualitative with the quantitative reasoning, and balance the various task types in the mathematics classroom.

Key words: proportional reasoning task, proportional reasoning ability, formal strategy, informal strategy, qualitative reasoning, quantitative reasoning

논문접수: 2015. 10. 15
논문심사: 2015. 11. 16
게재확정: 2015. 11. 21

3) zucchini602@gmail.com
4) yochong@ginue.ac.kr