한국초등수학교육학회지 19(3) 323-345.
2015. 08. 31

Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 19(3) 323-345.
August 31. 2015.

# RME를 적용한 수학화 학습이 수학적 사고능력에 미치는 효과

## -초등학교 5학년 측정 영역을 중심으로-

백인수[1] · 최창우[2]

본 연구의 목적은 RME를 적용한 수학화 교수·학습 프로그램을 구안하고 적용해봄으로써 측정 영역에서의 수학화 학습이 수학적 사고 능력에 어떤 효과가 있는지 알아보는 데 있다. 본 연구 문제를 해결하기 위하여 관련 이론을 분석하였으며 RME이론에 근거한 원리와 교수·학습 모형을 토대로 하여 수학화 교수·학습 프로그램을 구안하고 측정 영역의 지도를 위해 교육과정을 재구성하였다. 연구 대상은 대구광역시 S초등학교 5학년 학급 중 2개 반을 실험집단과 통제집단으로 선정하였다. 실험 처치 기간 동안 실험집단은 RME를 적용한 수학화 학습으로 수업을 실시하였고, 통제집단은 일반적인 교수·학습방법으로 수업을 실시하였다. 이상의 연구 결과를 종합해 보면, RME를 적용한 수학화 학습은 학생들에게 수학적 사고 능력 향상에 효과가 있으며 각 수학화 과정의 순환적인 반복 경험을 통해 학생들의 수학화가 더욱 활발히 이루어지도록 하는 데에 도움을 주는 것으로 나타났다.

주제어: RME, 수학화 학습, 수학적 사고, 수학화 과정

## Ⅰ. 서 론

### 1. 연구의 필요성 및 목적

학생들은 자신의 경험에서 부딪치고 발견하는 현실적인 문제를 해결하고 깨달아 가는 과정이 되어야 비로소 진정한 수학을 체득할 수 있다. 학생들의 경험이나 실생활과 관련된 수학적 접근은 추상적인 수학을 우리의 삶과 연결시켜주는 징검다리 역할을 한다고 볼 수 있다. 그리고 수학의 교육적 가치에 비추어 보더라도 학생들의 수학적 사고의 함양 역시 수학교육의 영구적 목표라 할만큼 중요하다.

하지만 오늘날 실제 학교 현장에서의 수학교육은 학생들에게 수학적으로 사고할 기회를 제공하기 보다는 교사의 설명과 학생들의 연습에 의해 기계적으로 암기하는 형태로 수업이 이루어지고 있는 실정이다. 이러한 표준적 알고리즘과 같은 기성의 형식적 수학을 설

1) [제1저자] 대구성지초등학교
2) [교신저자] 대구교육대학교 수학교육과

명하고 학생들은 교사나 교과서가 제시한 방법에 따라 응용문제를 풀고 형식적 수학을 연습하는 과정을 반복하는 한, 현실적으로 접하게 되는 실생활의 문제 상황을 명확히 분석하고 이해하며 학생들 나름대로의 다양하고 간편한 방법으로 문제를 해결할 수 있는 수학적 사고 역시 향상시키기 어렵다고 보여 진다(김유진, 2007).

수학 수업의 주체는 어디까지나 학생이며 학생들의 탐구활동과 재발명에 의해 수학적 지식이 구성되는 것이라면 수학을 가르치는 방법은 분명 달라져야 한다. 일찍이 Freudenthal은 수학을 인간의 활동(Freudenthal 1978, 1983)으로 보고 수학은 물리적, 정신적, 사회적 세계의 현상을 조직하는 수단으로 발명되어진 것이라는 인식에서 인간 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성이 수학화라면 학생들에게도 이러한 수학화의 경험을 제공하는 것이 필수적이라고 보았다. 이러한 수학화 경험은 학생들에게 수학자들이 수학에 관련된 것들을 발명하는 것과 똑같은 경험을 해보게 함으로써 현실과 추상적인 수학을 연결시킬 수 있는 계기를 마련해 줄 수 있다. 그의 이러한 수학교육에 대한 철학을 더욱 구체화하고 발전시킨 것이 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education, 이하 RME)이다. 현실적 수학교육은 수학을 완성된 교과로 보지 않고, 역동적이며 끊임없이 생성하고 변화하는 학문으로 보고 있다. 수학은 인간의 삶과 밀접한 관련성을 가지며, 수학이 학생들의 삶과 연결될 때에만 의미를 가질 수 있다고 본다(박준석, 2010).

측정영역은 수학 탄생의 기원으로 그 발생 과정이 비교적 명확하여, 역사-발생적 원리를 지도 원리로 삼는 Freudenthal의 이론 도입이 적합하고, 경험주의 교육학자인 존 듀이가 '측정' 활동을 수학 지도의 기초로 삼으려 했던 것처럼 다른 영역에 비하여 수학의 타 영역들과 연관성이나 관계성이 깊어 많은 수학적 개념과 기능으로 발전시키는데 도움이 크며, 현실적 상황에서 그 소재를 찾거나 활용하기에 매우 적합한 영역이다. 그 중에서 넓이개념은 풍부한 수학적 구조를 함유한 소재이기 때문에 Freudenthal의 수학화 이론이 적용되기에 적합한 영역이다.

따라서, 본 연구에서는 RME이론을 적용한 수학화 학습을 측정 영역을 중심으로 실제 현장에 적용하여 학생들의 수학적 사고 능력에 어떤 영향을 미치는지 알아보는데 있다.

### 2. 연구 문제

가. RME이론을 적용한 수학화 학습을 한 실험집단과 일반적인 학습을 한 통제집단은 수학적 사고 면에서 의미 있는 차이를 보이는가?

1) 표현의 사고에서 유의미한 차이가 있는가?
2) 조작의 사고에서 유의미한 차이가 있는가?
3) 함수적 사고에서 유의미한 차이가 있는가?
4) 유추적 사고에서 유의미한 차이가 있는가?
5) 발전적 사고에서 유의미한 차이가 있는가?

나. RME이론을 적용한 수학화 학습에서 나타난 학생들의 수학화 과정은 어떠한가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. RME의 의미

수학교육의 한 이론으로서 RME는 단순히 수학을 어떻게 가르치고 배우는가에 대하여 이론적으로만 설파한 교수·학습 이론은 아니다. 여기에는 수학이란 무엇인가에 대한 관점으로서의 학문관, 수학은 어떻게 이루어지는가에 대한 관점으로서의 학습관, 수학은 어떻게 가르치는가에 대한 관점으로서의 교수관을 모두 통합한다는 측면에서 일종의 수학교육 철학이라 할 수 있다.

Freudenthal은 왜 현실 또는 현실성(reality)이라는 단어를 사용했을까? 이 단어는 우리의 삶과 동떨어진 전통적 수학교육에 대한 Freudenthal의 저항을 반영한 것이다. 전통적 수학교육에서 먼저 제시되는 이미 완성된 상태로서의 수학적 지식은 분명 이를 처음 배워야 하는 학습자의 현실이 될 수 없다. Freudenthal이 강조한 현실(reality)은 완성된 지식을 단편적으로 생소하게 제시하는 전통적인 수학교육의 문제점이다. 즉, 학습자의 현실을 고려하지 않는 수학교육에 대한 비판을 뜻한다. 학습자의 현실을 고려해야만 비로소 학습자의 상식선에서 수학학습이 이루어짐을 강조한 것이다. 따라서 전통적 수학교육은 위에서 밑으로 내려가는 방식이지만 Freudenthal의 RME는 밑에서 위로 올라가는 방식이라 할 수 있다(박영훈, 2005). 추상적 학문인 수학이 그 어떤 연결 고리에 의해서건 반드시 삶의 현실성과 연계되어야한다는 Freudenthal의 주장은 학습자들에게 주어진 갈등 상황에서 충분히 학습자들 스스로가 상식적으로 이해할 수 있는 문제 상황이므로 이는 자연스럽게 학습자들의 현실성으로 자리 잡을 수 있다. 학습자들은 이 문제 상황을 자연스레 받아들이고 수학의 개념과 원리를 이용해 수학의 세계로 들어가야만 하고 주어진 문제 상황을 수학적으로 해석하여 그림이나 그래프, 표 등을 이용하여 문제해결에 접근할 수 있는 것이다.

### 2. 수학적 사고

수학과에서 문제를 해결하기 위하여 수학적인 지식, 기능을 활용한다는 것은 자신이 알고 있는 지식 중 어떤 것을 어떻게 활용할 것인가 하는 방법을 알아야 문제를 해결할 수 있는 것이다. 즉, 이 과정에서 필연적으로 필요한 것이 수학적 사고이다. 수학적 사고는 수학의 특성에 따른 수학적 사고, 수학의 대상에 따른 수학적 사고, 수학의 문제 해결에 따른 수학적 사고, 수학의 사고 방법 및 내용에 따른 수학적 사고의 4가지 형태로 구분한다. 수학의 사고방법에 관련된 수학적인 사고로는 귀납적 사고, 유추적 사고, 연역적 사고, 통합적 사고, 발전적 사고, 단순화 사고, 추상화 사고, 일반화 사고, 특수화 사고, 기호화 사고, 수량화 사고, 도형화 사고 등이 있고, 수학의 내용에 관련된 수학적인 사고는 단위의 사고, 표현의 사고, 조작의 사고, 알고리즘의 사고, 개괄적 파악의 사고, 기본 성질의 사고, 함수적 사고, 식에 대한 사고 등이 있다.

본 연구에서는 연구문제를 해결하기 위해 5학년의 측정영역 단원과 관련된 수학적 사고 중 내용에 관련된 사고에서 표현의 사고, 조작의 사고, 함수적 사고와 방법에 관련된 사고에서 유추적 사고, 발전적 사고를 알아보고자 한다.

### 3. 넓이 개념의 교수학적 분석

길이가 1차원의  기본량인데 반하여 넓이는 2차원의 기본량이다. 이는 곧 2차원적인 양은 넓이로 표현될 수 있다는 의미이다. 넓이는 양의 보존성과 가법성을 가지며, 특히 승법성도 갖는다. 넓이의 승법성은 (길이) × (길이)로서 넓이는 길이로부터 유도되고, 여러 가지 도형의 넓이를 구하는 모든 공식은 길이의 곱으로 표현된다.

넓이 개념은 네 가지 측면을 가지고 있다. 첫째, 직관적인 넓이 개념이다. 이는 길이, 부피, 무게와 함께 선천적인 기하학적 직관의 일종으로서 주변의 사물이 차지하는 영역의 대소를 구별하는 능력이다. 넓이 지도의 초기 단계에서는 아동이 넓이 직관을 보유하고 있다는 가정하에 여러 활동에 이루어진다(유미현, 강흥규, 2009).

초등수학에서 도형의 넓이 지도는 주로 조작적인 활동의 성격을 가진다. 이를테면, 직사각형의 넓이는 직사각형을 완전히 덮을 수 있도록 필요한 단위 정사각형의 개수로 유도한다. 평행사변형이나 삼각형의 경우는 직접측정으로 넓이를 구할 수 없으므로 주어진 도형을 오려 붙이는 등적변형이 필요하다. 본 연구에서는 5학년 측정영역을 중심으로 RME를 적용한 수학화 교수·학습 프로그램을 구안 적용하기 위해 교육과정을 분석하고 학습내용을 재구성하였다.

## Ⅲ. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 대상

#### 가. 연구대상

대구광역시 달서구에 위치한 S초등학교 5학년 6개 반 중 2012년 3월에 실시한 교과학습 진단평가의 수학 성적이 통계적으로 유의미한 차이가 없는 3개 반 중 사전 수학적 사고 능력 검사를 실시하여 동질성이 확인된 두 반(총 42명)을 연구 대상으로 정하고 한 반은 실험집단(21명)으로, 다른 한 반은 통제집단(21명)으로 선정하였다.

<표 1> 연구대상의 선정

| 집단 | 남 | 여 | 전체 |
|---|---|---|---|
| 실험집단 | 12(57.1%) | 9(42.9%) | 21(100%) |
| 통제집단 | 11(52.3%) | 10(47.7%) | 21(100%) |
| 계 | 23(54.8%) | 19(45.2%) | 42(100%) |

* 명(%)

#### 나. 실험집단과 통제집단의 사전 수학적 사고 능력 검사

RME이론을 적용한 수학화 학습을 실시하기 전에 실험집단과 통제집단의 동질성 여부를 확인하기 위하여 2012년 6월 17일 수학 4학년 측정 영역의 수학적 사고 능력 검사를 5학년 3개 반에 실시하였다. 선택된 5학년 3개 반은 교사의 수학학습 지도 방법과 교육관, 교직경력이 비슷한 반으로서 t검정 결과 한 개 반을 제외하고 두 개 반이 동질집단으로 판명되어 실험·통제집단이 되었다. 사전 수학적 사고 능력 검사에 의한 두 독립표본 t검정

결과는 <표 2>와 같다.

<표 2> 사전 수학적 사고 능력 검사의 두 독립표본 t검정표

| 집단 | 사례수 | 평균 | 표준편차 | t 통계값 | p 유의확률 |
|---|---|---|---|---|---|
| 실험집단 | 21 | 15.6190 | 3.45653 | .000 | 1.000 |
| 통제집단 | 21 | 15.6190 | 3.65344 | | |

(p<.05)

<표 2>에서 볼 때, 사전 수학적 사고 능력 검사점수의 실험집단은 평균 15.6190이고, 표준편차 3.45653이고, 통제집단은 평균 15.6190이고 표준편차 3.65344로 두 집단 간의 점수 차이는 .00점으로 나타났다. 이러한 점수 차이가 통계적으로 유의한 차이인가를 알아보기 위하여 두 독립표본 t검정을 실시한 결과, t통계값은 .000이고 이에 따른 유의확률은 1.000으로 통계적으로 유의하지 않게 나타났다(p>.05). 따라서 본 연구 대상의 실험집단과 통제집단은 동질하다고 가정할 수 있겠다.

2. 연구 설계

<표 3> 연구의 실험 설계

| 집단 | 사전검사 | 실험처치 | 사후검사 |
|---|---|---|---|
| 실험집단 | T1 | X1 | T2 |
| 통제집단 | T1 | X2 | T2 |

T1:사전 수학적 사고 능력 검사 X1:RME를 적용한 수학화 학습
T2:사후 수학적 사고 능력 검사 X2:일반적인 수업방법에 의한 수학 학습

3. 검사 도구

가. 사전 수학적 사고 능력 검사

사전 수학적 사고 능력 검사지의 문항 제작은 2007 개정교육과정의 수학 4학년 1학기 3.각도, 2학기 5.평면도형의 둘레와 넓이 단원 중 교과서와 수학 익힘책을 바탕으로 김은하(2011)의 수학적 사고유형에 따른 서술형 평가 문항과 평가기준을 참고하여 본 연구자가 제작하였다. 신뢰도와 타당도를 높이기 위해 문항을 제작한 후 5학년 담임교사들의 지도 조언을 바탕으로 문항을 수정·보완하였다. 검사 문항은 수학적 사고 능력을 평가할 수 있도록 5가지 면(표현의 사고, 조작적 사고, 함수적 사고, 유추적 사고, 발전적 사고)에 중점을 두어 제작하였다. 검사문항은 수학적 사고의 다섯 가지 면에 초점을 맞추어 각 4문항씩 20문항으로 구성되어 있으며 각 문항당 1점씩 배점하여 20점 만점으로 처리하였다. 문항의 평가기준을 제시하면 다음과 같다. 0점은 아무것도 쓰지 않거나 대답이 불분명하여 무엇을 했는지 읽는 사람이 알 수 없을 때, 수학의 언어적 표현능력이 미흡하고 용어 사용이 미흡할 때, 직접 도구를 사용하지 못할 때이다. 1점은 적절한 수학적 사고 능력을 표현하여 수학의 언어적 표현 능력이 이루어지고 용어 사용이 정확할 때, 직접 도구를 사용하며 정확히 문제를 해결할 때이다.

<표 4> 사전 수학적 사고 능력 검사지 문항 구성 및 내용

| 단원 | 문항내용 | 문항 번호 |
|---|---|---|
| 4학년 1학기<br>3. 각도 | 각의 크기 | 1, 2, 16 |
| | 각도 읽기 | 3, 18 |
| | 각의 크기 재기와 그리기 | 4 |
| | 주어진 각 그리기 | 5 |
| | 삼각형 내각의 합을 응용하기 | 17 |
| | 사각형 내각의 합을 응용하기 | 6 |
| 4학년 2학기<br>5. 평면도형의<br>둘레와 넓이 | 직사각형 둘레의 길이 | 10, 12, 20 |
| | 단위 넓이 알아보기 | 8 |
| | 넓이 크기 비교하기 | 7 |
| | 직·정사각형의 넓이 | 9, 11, 14, 19 |
| | 여러 가지 도형의 넓이 구하기 | 13 |
| | 직사각형 넓이가 주어질 때 세로의 길이 구하기 | 15 |

| 수학적 사고 | 수학적 사고의 종류 | 문항 번호 |
|---|---|---|
| 내용면 | 표현의 사고 | 1, 3, 7, 18 |
| 내용면 | 조작의 사고 | 4, 5, 11, 20 |
| 내용면 | 함수적 사고 | 12, 13, 15, 19 |
| 방법면 | 유추적 사고 | 6, 8, 14, 17 |
| 방법면 | 발전적 사고 | 2, 9, 10, 16 |

나. 사후 수학적 사고 능력 검사

실험집단에서는 RME를 적용한 수학화 학습 방법을 적용하고 통제집단에서는 일반적인 수학 학습 방법을 적용한다. 사후 수학적 사고 능력 검사지의 문항 제작은 2007 개정교육과정의 초등수학 5학년 1학기의 7. 평면도형의 넓이, 8. 여러 가지 단위 단원 중 수학적 사고 능력을 비교하기 위하여 교과서와 수학익힘책을 바탕으로 평가지를 본 연구자가 제작하였다. 신뢰도와 타당도를 높이기 위해 문항을 제작한 후 5학년 담임교사들의 지도 조언을 바탕으로 문항을 수정·보완하였다. 검사 문항은 사전 수학적 사고 능력 평가지와 같이 수학적 사고 능력을 평가할 수 있도록 5가지 면(표현의 사고, 조작적 사고, 함수적 사고, 유추적 사고, 발전적 사고)에 중점을 두어 제작하였다. 각 1점씩 배점하여 20점 만점으로 처리하였다. 문항의 평가기준은 사전 수학적 사고 능력 검사지와 동일하다.

<표 5> 사후 수학적 사고 능력 검사지 문항 구성 및 내용

| 단원 | 문항내용 | 문항 번호 |
|---|---|---|
| 5학년 1학기 7. 평면도형의 넓이 | 평행사변형의 밑변과 높이 알기 | 5 |
| | 평행사변형의 넓이 구하기 | 4, 13 |
| | 모양이 달라도 밑변과 높이의 길이가 같으면 넓이가 같음을 알기 | 11, 14 |
| | 넓이는 같고 모양이 다른 삼각형 그리기 | 6 |
| | 삼각형의 넓이 구하기 | 10, 12 |
| | 사다리꼴의 윗변, 아랫변, 높이 알기 | 1 |
| | 사다리꼴의 넓이 구하기 | 2, 7, 15 |
| | 마름모의 넓이 구하기 | 8, 20 |
| | 넓이는 같고 모양이 다른 마름모 그리기 | 9 |
| 8.여러 가지 단위 | 넓이의 단위 $m^2$, $a$ 알기 | 3 |
| | 넓이의 단위 $ha$, $km^2$ 알기 | 18 |
| | 넓이의 단위 관계를 알기 | 17 |
| | 무게단위 t 알기 | 16, 19 |

| 수학적 사고 | 수학적 사고의 종류 | 문항 번호 |
|---|---|---|
| 내용면 | 표현의 사고 | 1, 3, 7, 16 |
| 내용면 | 조작의 사고 | 5, 10, 13, 20 |
| 내용면 | 함수적 사고 | 2, 4, 15, 18 |
| 방법면 | 유추적 사고 | 8, 11, 12, 17 |
| 방법면 | 발전적 사고 | 6, 9, 14, 19 |

4. 수학화 과정 분석

실험집단을 대상으로 5학년 1학기 7. 평면도형의 넓이, 8. 여러 가지 단위 단원의 총 17차시 수업을 진행하면서 RME를 적용한 수학화 학습에서 나타난 학생들의 수학화 과정이 어떠한지 살펴보고자 하였다.

다음 <표 6>은 김윤진(2005)의 논문에서 수학화 사례 분석의 기준을 참고하였으며 분석의 기준 내용은 Treffers(1987)의 수학화 과정의 내용을 참고하여 제시하였다.

<표 6> 수학화 과정 분석의 기준과 방법

| 수학화 과정 분석의 기준 | | | 분석 방법 |
|---|---|---|---|
| 수학화 과정 | 직관적 탐구 | · 문제 상황에 대하여 흥미를 갖고 있는가?<br>· 문제 상황에서 해결해야 할 수학적 측면을 발견할 수 있는가? | 질문지 분석 |
| | 수평적 수학화 | · 학생들의 상호 작용, 학생과 교사와의 상호 작용에 의해 수학적 개념의 추출 및 반성이 이루어지고 있는가?<br>· 문제 상황을 통해 관계와 규칙성을 발견하고 현실 세계 문제를 수학적인 문제로 전환할 수 있는가? | 관찰과 녹음 자료, 학습장, 활동지 분석 |
| | 수직적 수학화 | · 수학적 개념의 원리와 이해를 통해 학습내용의 정리나 결과 예상이 추상화되고, 일반화, 형식화할 수 있는가? | 학습장, 활동지 분석 |

| 수학화 과정 분석의 기준 | | | 분석 방법 |
|---|---|---|---|
| | 응용적 수학화 | · 창조된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고, 현실에의 응용이 이루어지고 있는가? | 학습장, 활동지, 형성평가지 분석 |

## Ⅳ. 연구의 실제

### 1. RME를 적용한 수학화 교수·학습 프로그램 구안

#### 가. 교육과정 분석

5학년 1학기 수학교과서의 측정 영역 단원인 7. 평면도형의 넓이, 8. 여러 가지 단위 단원은 RME 관점에서 볼 때 교과서에 나오는 평면도형이 실제로도 현실에 존재하고 있는지와 그런 평면도형의 넓이를 왜 구해야 되는지 학생들의 흥미를 유발하는데 미흡하다. 여러 가지 단위도 면적이나 무게에 대한 양감을 기르는 것이 중요함에도 불구하고 현실적인 여건상 교실에서 단위 관계에 대한 이해와 계산 중심의 수업에만 치중하고 있다. 따라서 RME를 적용한 수학화 학습에서는 다음과 같은 내용에 주안점을 두었다.

첫째, 학생들의 능동적인 학습을 이끌어 낼 수 있는 실제적 맥락의 문제 상황을 만들어 준다.

둘째, 현행 교육과정을 수학화 학습을 할 수 있게 교수·학습 활동 내용을 RME 이론에 맞게 재구성한다.

셋째, Freudenthal의 수학과 교수·학습론에 따른 교수·학습 모형을 바탕으로 연구자가 새롭게 수정·보완하여 수학화 학습에 적용한다.

#### 나. RME를 적용한 수학화 학습 내용 재구성

RME를 적용한 수학화 학습을 위해 실제적 맥락의 문제 상황을 구성하기에 앞서 수업 설계 과정과 실행 전반에서 적용될 실제적 맥락의 문제 상황에 대한 준거가 필요하다. 실제적 맥락의 문제 상황 준거는 Freudenthal(1978, 1983)의 수학화 학습-지도론에 기초하였는데 그 내용은 첫째, 수학이 현실의 정리수단으로 발명된 것으로 보고 이에 따라 수학 학습이 안내된 재발명 방법이어야 한다는 점이다. 둘째, 학습자는 역사적 학습과정을 재현하므로 수학의 역사-발생적 특성이 고려되어야 한다. 셋째, 수학을 구체적인 맥락을 통해 수학화로 지도함으로써 현실과의 관련성이 적재된 풍부한 의미를 갖는 수학을 가르쳐야 한다. 넷째, 수학적 개념의 원리나 법칙은 곧바로 그 구조에 대한 깊은 통찰을 제공해 주면서 동형인 다른 상황에 신속하고 정확하게 전이 가능한 전형적인 보기로부터 획득된다(우정호, 2000, 재인용). 실제적 맥락의 문제 상황 준거를 구체적으로 보면 <표 7>과 같다(최선아, 2002).

<표 7> 실제적 맥락의 문제 상황 준거

| 실제적 맥락의 문제 상황 준거 | 세부 사항 |
|---|---|
| 친밀성 | · 문제 상황은 학습자의 기존 경험과 관련이 있는가?<br>· 문제 상황은 학습자에게 익숙한 일상적 언어로 진술되는가?<br>· 문제 상황은 모든 수준의 학습자에게 흥미를 끄는가? |
| 구체성 | · 문제 상황의 진술시 인물, 사물, 지역의 정확한 명칭을 사용하는가?<br>· 문제 상황을 제시할 때 다양한 매체를 사용하는가?<br>· 문제 상황의 해결을 돕기 위한 물리적, 사회적 환경을 제공하는가? |
| 사실성 | · 문제 상황은 실제 발생 가능한 것인가?<br>· 문제 상황의 구조나 수치는 현실적으로 가능한 것인가?<br>· 문제 상황은 수학적 오류의 소지를 인위적으로 배제하지 않았는가? |
| 전형성 | · 문제 상황은 내용과 관계가 풍부하여 곧바로 구조에 대한 통찰을 제공해 주는 것인가?<br>· 문제 상황은 수학의 역사 발생적 맥락을 고려하는가?<br>· 문제 상황은 유사 상황으로 응용이 가능한가? |
| 논리성 | · 문제 상황은 학습목표 성취를 가능하게 하는 것인가?<br>· 문제 상황은 학습내용을 포함하는가?<br>· 문제 상황을 해결해야 하는 이유는 타당한가? |

위의 실제적 맥락의 문제 상황 준거를 토대로 5학년 1학기의 측정 영역 중 7. 평면도형의 넓이, 8. 여러 가지 단위 단원의 내용을 총 17차시에 걸쳐 재구성하였으며 RME를 적용한 수학화 학습의 수업내용 및 활동은 아래 <표 8>과 같다.

<표 8> RME를 적용한 수학화 학습 내용 재구성

| 단원 | 차시 | 주제 | 수업 내용 및 활동 |
|---|---|---|---|
| 8. 여러 가지 단위 | 1～2 | 넓이단위 $m^2$, $a$ 알기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(할아버지 텃밭의 넓이)<br>- $cm^2$보다 더 큰 단위인 $m^2$필요성 도입<br>• $m^2$, $a$의 단위 관계 알기 |
| 7. 평면도형의 넓이 | 1～2 | 평행사변형의 넓이 구하기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(평행사변형 모양의 옷)<br>•다양한 방법으로 평행사변형의 넓이를 구하기<br>- 모눈종이, 직사각형 모양으로 만들기, 카발리에리의 원리 이용하기<br>•평행사변형의 넓이를 구하는 원리 알기<br>•다른 실생활 상황에 응용하기(학습용 커터 칼날의 넓이) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. 평면 도형 의 넓이 | 3～4 | 삼각형의 넓이 구하기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(운동장에 그려진 삼각형 밭 모양의 넓이)<br>•다양한 방법으로 삼각형의 넓이를 구하기<br>- 모눈종이, 직사각형•평행사변형 모양으로 만들기, 카발리에리의 원리 이용하기<br>•삼각형의 넓이를 구하는 원리 알기<br>•다른 실생활 상황에 응용하기(삼각형 안전 표지판의 넓이) |
| | 5～6 | 사다리꼴의 넓이 구하기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(창고에 있는 사다리의 넓이)<br>•다양한 방법으로 사다리꼴의 넓이를 구하기<br>- 모눈종이, 평행사변형 모양으로 만들기, 2개의 삼각형으로 나누기, 평행사변형과 삼각형으로 나누기<br>•사다리꼴의 넓이를 구하는 원리 알기<br>•다른 실생활 상황에 응용하기(껌 제거용 해라의 넓이) |
| | 7～8 | 마름모의 넓이 구하기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(석쇠 구멍의 넓이)<br>•다양한 방법으로 마름모의 넓이를 구하기<br>- 모눈종이, 직사각형 모양으로 만들기, 삼각형으로 나눠서 넓이 구하기<br>•마름모의 넓이를 구하는 원리 알기<br>•다른 실생활 상황에 응용하기(카드 다이아몬드의 넓이) |
| | 9 | 단원평가 | •여러 가지 평면도형의 넓이를 다양한 방법으로 구하기<br>•실생활에서 볼 수 있는 평면도형의 넓이 구하기 |
| 8. 여러 가지 단위 | 3～4 | 넓이의 단위 $ha$, $km^2$ 알기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(학교와 마을의 위성사진)<br>- $a$보다 더 큰 단위의 필요성 도입<br>• $ha$, $km^2$의 단위 관계 알기 |
| | 5 | 넓이의 단위 관계를 알기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(반 교실, 시청각실, 학교, 마을의 넓이 비교)<br>- 각각의 넓이를 구할 때 보편적으로 어떤 단위를 쓰는 것이 좋을지 결정하기<br>• $a$와 $m^2$, $ha$와 $a$, $km^2$와 $ha$ 사이의 부분적인 관계를 알고 변환해 보기<br>• $m^2$, $a$, $ha$, $km^2$ 사이의 관계를 총제적으로 알고 규칙을 찾아서 변환해보기 |
| | 6～7 | 무게단위 t 알기 | •실제적 맥락의 문제 상황 제시(쌀을 싫은 화물차 무게)<br>- $kg$보다 더 큰 단위의 필요성 도입<br>• $t$, $kg$의 단위 관계 알기<br>•다른 실생활 상황에 응용하기(워터파크의 물 무게) |
| | 8 | 단원평가 | • $m^2$, $a$, $ha$, $km^2$ 사이의 단위 관계를 이해하고 실생활 응용문제로 단위변환 연습하기<br>• $t$과 $kg$사이의 관계를 이해하고 실생활 응용문제로 단위변환 연습하기 |

7단원보다 8단원의 넓이단위 $m^2$, $a$ 알기를 먼저 수업 하도록 학습 내용을 재구성하였다. 그 이유는 교과서에 쓰이는 소재나 생활 속에서 평면도형의 모양들이 물론 작은 것들도 있겠지만 대부분 큰 단위의 것들이 많았고 실제로 학생들이 공책이 아닌 교실, 운동장에서 실습할 때에도 m 단위가 적당하고 너무 큰 단위는 오히려 평면도형의 넓이 개념 형성에 방해가 되어서 8단원의 여러 가지 큰 단위가 있음에도 불구하고 $m^2$를 먼저 도입하였다. 그리고 교과서의 탐구활동, 문제해결·놀이마당은 RME를 적용한 수학화 학습 각 차시의 학습내용에 흡수하고 단원평가는 내용을 조금 더 추가하였다. 왜냐하면 각 차시활동에서 학생들이 흥미를 가지고 탐구활동이나 놀이적인 요소를 많이 할 수 있도록 하였고 학습내용에 대한 복습 및 개념강화를 위해 단원별로 평가문제를 더 제시하였다.

### 다. RME를 적용한 수학화 학습의 수업 모형

본 연구의 실험 처치 도구인 RME이론을 적용한 수학화 학습의 교수·학습 모형은 황선영(2010), 박준석(2010)의 수학화 수업의 절차모형을 참고로 연구자가 수정·보완하여 작성하였으며, 그 예시는 <표 9>와 같다.

<표 9> 수업 단계별 교수 · 학습 활동

| 학습단계 | | 수학화 과정 | 교수·학습 활동 |
|---|---|---|---|
| 도입 | 문제 탐색 | 직관적 탐구 | ●학생들의 능동적인 학습을 이끌어 낼 수 있는 흥미 있고 구체적인 실현 가능한 문맥 문제제시<br>●문제 상황에 해결해야 할 수학적 측면 발견하기<br>(흥미와 호기심 자극) |
| | 해결 | 직관적 탐구 | ●문제 상황을 통해 관계와 규칙성을 발견하고 실제적 맥락 문제를 수학적인 문제로 전환하기 |
| 전개 | 해결 | 직관적 탐구 | ●수학적 개념의 개발, 발견, 재발명을 유도하기<br>(수학의 시각화-그림, 조작, 식 등) |
| | 해결 방법 비교·검토 | 수평적 수학화 | ●학생들 간의 개별 및 모둠별로 탐구의 상호작용 활동, 교사와 학생과의 상호작용 활동하기<br>●형식화 및 추상화 능력 같은 요인에 의존하여 현실 문맥으로부터 수학적 개념을 추출하는 과정이며 반성적 사고가 중요<br>(수학적 의사소통 학습 전략) |
| | 형식화 | 수직적 수학화 | ●수학적 개념이나 원리의 이해를 통해 학습 내용의 정의나 결과 예상을 추상화, 일반화, 형식화 하기 |
| 정리 | 적용 | 응용적 수학화 | ●창조적 개념을 새로운 문제에 적용하기<br>●개념이나 원리를 강조하고 현실에 응용하기<br>(실생활에 적용-피드백) |

2. RME를 적용한 수학화 학습의 실제

5학년 1학기 7단원 평면도형의 넓이에서 삼각형의 넓이 구하기 주제를 가지고 수학화 과정, 과정상의 특징 및 유의점에 주안점을 두어 수학화 학습 과정을 기술하면 아래와 같다.

가. 문제 탐색

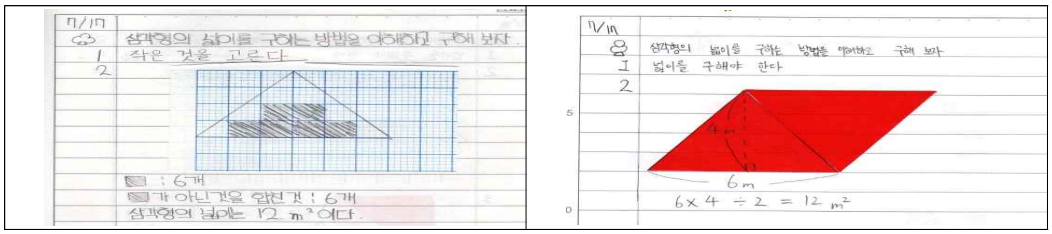
T : 지금 보이는 등장인물은 누구인가요?
S1: 1박 2일에 나오는 ○○○, △△△입니다.
T : 네, 맞습니다. 이 두 사람은 두 개의 다른 삼각형 모양의 밭을 갈아야 됩니다. 두 사람은 어느 밭을 고르는 게 더 유리할까요?
S2: 밭의 너비가 좁아 보이는 쪽이 더 유리합니다.
S3: 저는 다르게 생각합니다. 넓이가 작은 밭을 고르는 게 유리합니다.
T : 다른 사람도 S2의 의견이 맞다고 생각합니까?
S All: 네, 넓이가 작은 밭을 가는 게 좋습니다.
T : 오늘 공부할 문제는 무엇일지 생각해봅시다.
S4: 밭의 넓이를 구하는 것입니다.
S5: 삼각형의 넓이 구하는 방법을 아는 것입니다.
T : 그럼 오늘은 삼각형의 넓이 구하는 방법을 이해하고 구해봅시다.

먼저 문제 탐색 단계에서 학생에게 오늘 배울 수학적 대상이 무엇인지 인식하게 하고 학습목표를 예상할 수 있으며 실제적 맥락의 문제 상황 준거에 맞는 것 중 교사가 검토하여 적절하다고 판단된 학생의 문제를 동기유발의 자료로 사용한다. 여기에서는 TV프로그램 1박 2일의 등장인물이 미션수행을 위해 더 작은 삼각형 모양의 밭을 갈려고 하는데 어느 것이 더 작은지 고민하는 문제를 사용하였다. 이렇게 학생들에게 친숙하고 생활 속에 있는 것으로 학습의 내용을 연결함으로써 학생들은 수업에 관심을 갖고 적극적인 태도로 수업에 임할 수 있었다.

나. 해결

T : 주어진 삼각형 모형은 밭을 축소시킨 것입니다. 모형을 가지고 삼각형의 넓이 구하는 방법을 찾아볼까요?
S1: 모눈종이 위에 삼각형 모형을 두고 정사각형 단위넓이를 세어봅니다.
S2: 삼각형을 한 개 더 만들어 붙여서 평행사변형 모양을 만듭니다. 그리고 평행사변형의 넓이를 구해서 반으로 나누면 됩니다.
S3: (기타 등등)
T : 그럼 각자 학습장에 해결방법을 적어봅니다.

해결 단계에서는 학습자들이 인식한 관계를 수학적으로 인식하게 되는 단계로 실제적 맥락의 문제를 받은 후 학생들은 문제 해결 방법을 다양하게 생각한다. 그런 후 각자의 학습장에 자신만의 해결 방법을 적는다.




[그림 1] 학생들의 해결방법(학습장)

다. 해결방법 비교 및 검토

해결방법 비교 및 검토 단계에서는 각자의 해결방법을 발표하고 다른 사람과의 생각을 비교하고 공유하며, 앞에서 학생들이 발표한 내용을 토대로 교사는 학생들의 생각을 한데 모을 수 있는 검증자료를 투입하여 학생 자신의 사고를 반성하게 하는 단계이다. 학생들이 찾은 삼각형의 넓이를 구하는 방법에는 한 칸이 단위넓이인 모눈종이의 칸을 세는 것, 똑같은 삼각형 2개를 붙여서 평행사변형 모양을 만든 다음 평행사변형의 넓이를 구해서 반으로 나누는 것이 있다. 교사는 카발리에리의 원리를 이용한 조작도구를 사용해 직각삼각형이나 다른 모양의 삼각형이 모양은 달라도 넓이가 같음을 이용하여 직사각형의 넓이를 구해서 반으로 나누는 방법도 제시하였다. 그리고 밑변과 높이의 길이가 같으면 모양이 달라도 삼각형의 넓이가 같다는 사실까지 도출해내었다.

T : 지금부터 친구들이 해결한 방법을 듣고 의문점이 있으면 질문을 해봅시다.

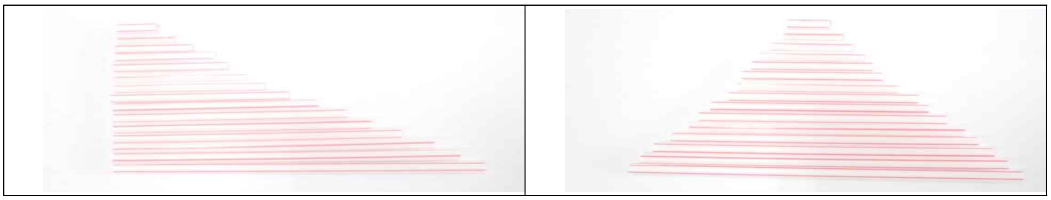
S1: 모눈종이에 □가 6개, □가 아닌 것들을 합쳐서 □를 만들면 6개해서 1 $m^2$인 □가 모두 12개이므로 삼각형의 넓이는 12 $m^2$이다.

S2: 똑같은 삼각형 한 개를 더 만듭니다. 하나를 뒤집어서 붙이면 평행사변형이 됩니다. 평행사변형의 밑변은 6m이고 높이는 4m이므로 넓이는 24 $m^2$입니다. 삼각형의 넓이는 평행사변형의 반이므로 12 $m^2$이다.

S3: (기타 등등)

..... (중간 생략)

T : 선생님이 제시하는 자료를 보면서 여러 분들의 생각과 어떻게 다른지 비교해 봅니다. 이 자료는 여러 개의 줄에 작게 자른 빨대를 끼운 것입니다. 줄을 평편하게 하고 고정시킨 후 빨대를 이리저리 움직일 수 있게 하였습니다.
T : 지금은 어떤 모양입니까?
S5: 그냥 삼각형입니다.
T : 빨대의 면적이 삼각형의 넓이라고 생각합시다. 모양을 다르게 해도 삼각형의 넓이에는 변화가 있습니까?
S6: 넓이는 같습니다.
T : 그러면 직각삼각형 모형을 두 개를 붙여서 직사각형을 만들어 보겠습니다. 직각삼각형의 넓이는 직사각형 넓이와 어떤 관계가 있습니까?
S1: 직각삼각형의 넓이는 직사각형 넓이의 반입니다.
T : 네, 맞습니다. 직사각형의 넓이 구하는 방법은 (가로)×(세로)해서 쉽게 구할 수 있을 것입니다. 그리고 그 넓이의 반이 삼각형의 넓이가 되는 것입니다.
T : 선생님이 보여준 이 활동을 통해서 알게 된 점은 무엇일까요?
S2: 모양이 달라도 삼각형의 넓이는 같다는 것입니다.
T1: 왜 그렇게 생각합니까?
S4: 밑변과 높이의 길이가 같기 때문입니다.
....(이하 생략)



[그림 2] 카발리에리의 원리를 이용한 조작도구

라. 형식화

T : 지금까지 안 내용을 토대로 삼각형의 넓이 구하는 방법을 약속해봅시다.
T : 삼각형을 두 개 붙이니까 어떤 모양이 되었나요?
S1: 평행사변형이 되었습니다.
S2: 직사각형이 되었습니다.
T : 직사각형도 평행사변형이라고 말할 수 있습니까?
S3: 네, 직사각형도 두 변이 평행하므로 평행사변형입니다.
T : 그러면 삼각형의 넓이는 평행사변형 넓이의 반이므로 다음과 같이 삼각형의 넓이 구하는 방법을 약속할 수 있습니다.

삼각형의 넓이 = 평행사변형의 넓이 ÷ 2
= (밑변) × (높이) ÷ 2

S All: (학습장에 따라 적고 다시 한 번 생각해본다.)

형식화 단계는 교사가 적절한 안내를 통해 학생들의 해결방법을 좀 더 형식화되게 돕는 단계이다. 그래서 삼각형의 넓이 구하는 방법을 약속하고 학생들은 지금까지 한 활동을 반성적 사고를 통해 추상화시킨다. 실제로 운동장에 나가서 땅 넓이를 구해보면서 삼각형의 넓이 구하는 방법을 형식화한 것이 얼마나 편리한지 체험할 수 있게 되었다.

마. 적용

T : 지금까지 배운 내용을 토대로 실제 생활에 응용해봅시다.
T : 다음은 도로에서 자동차가 고장이 났을 때 임시로 세워두는 삼각 안전 표지판입니다. 안쪽 삼각형 구멍의 넓이를 구해봅시다.
S1: (모둠끼리 문제를 해결한다.)
....(생 략)
T : 선생님이 내주는 문제를 풀고 결과에 따라서 수학익힘책을 풀거나 선생님과 다시 문제를 해결해봅시다.
S2: (하위 수준 학생은 선생님과 다시 문제를 해결하고, 나머지는 수학익힘책을 푼다.)
T : 이번 수업을 통해서 알게 된 점은 무엇입니까?
S3: 삼각형의 넓이 구하는 방법을 알게 되었습니다.
S4: 삼각형의 넓이는 평행사변형 넓이의 반인 것을 알게 되었습니다.
S5: 밑변과 높이가 같으면 삼각형의 모양은 달라도 넓이는 같다는 것을 배웠습니다.
S6: (기타 등등)

적용 단계에서는 또 다른 실생활 문제를 제시하여 모둠별로 해결하였다. 이런 과정에서 학생들은 넓이 구하는 방법을 다시 한 번 되새기게 되고 배운 지식을 종합적으로 활용하게 되며 학력이 낮은 학생도 모둠원들과 함께 해결해 나가면서 자신감도 얻고 자신의 지식을 반성하게 된다. 마지막으로 형성평가와 수준별 학습을 한 뒤 오늘 배운 학습내용을 정리하고 마친다.

## Ⅳ. 연구 결과 및 논의

### 1. 수학적 사고 능력의 차이

가. RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단과 일반적인 수학 학습을 실시한 통제집단의 전체 수학적 사고 능력 비교

RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단과 통제집단의 수학적 사고 능력에 어떤 영향을 미쳤는지 알아보기 위하여 실험집단과 통제집단의 사후 수학적 사고 능력 검사를 독립표본 t검정한 결과는 <표 10>과 같다.

<표 10> 사후 수학적 사고 능력 검사 결과

| 검사유형 | 구분 | M | SD | t | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 사후 수학적 사고 능력 검사 | 실험집단 | 13.3810 | 4.28341 | 2.312* | .026 |
| | 통제집단 | 10.5714 | 3.55769 | | |

*(p<0.05)

사후 수학적 사고 능력 검사 점수를 분석한 결과 실험집단과 통제집단의 평균 차이가 2.8096점이었고, p값이 .026로 나타났다. 이는 두 집단이 유의수준 0.05에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 집단임을 뜻한다. 따라서 RME를 적용한 수학화 학습이 측정 영역에서 학생들의 수학적 사고 능력에 긍정적인 영향을 미쳤다고 볼 수 있다.

나. RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단과 일반적인 수학 학습을 실시한 통제집단의 수학적 사고별 능력 비교

RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단과 통제집단의 수학적 사고별 능력에 차이가 있는지 알아보기 위해 독립표본 t검정한 결과는 <표 11>과 같다. 측정영역에서 수학의 내용적 측면에서 나타난 수학적 사고는 표현의 사고, 조작의 사고, 함수적 사고이고 수학의 방법적 측면에서 나타난 수학적 사고는 유추적 사고와 발전적 사고로 나눌 수 있으며 그 측정결과는 다음과 같다.

<표 11> 수학적 사고별 능력 비교 결과

| 사고유형 | 구분 | M | SD | t | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 표현의 사고 | 실험집단 | 2.9524 | 1.07127 | 1.203 | .236 |
| | 통제집단 | 2.5714 | .97834 | | |
| 조작의 사고 | 실험집단 | 3.3810 | 1.02353 | 3.008* | .005 |
| | 통제집단 | 2.4286 | 1.02817 | | |
| 함수적 사고 | 실험집단 | 2.3333 | 1.35401 | 2.447* | .019 |
| | 통제집단 | 1.3810 | 1.16087 | | |
| 유추적 사고 | 실험집단 | 2.0952 | 1.04426 | -.505 | .616 |
| | 통제집단 | 2.2381 | .76842 | | |
| 발전적 사고 | 실험집단 | 2.6190 | 1.07127 | 2.111* | .041 |
| | 통제집단 | 1.9524 | .97346 | | |

*(p<0.05)

2. 학생들의 수학화 과정

가. 직관적 탐구 과정

직관적 탐구 과정은 RME를 적용한 수학화 학습에서의 첫 번째, 두 번째 단계로써 실제적 맥락 문제를 조직화하고 구체화해서 문제의 수학적 측면을 알아내고자 하는 단계이다. 이 과정을 알아보기 위해 질문지의 분석 방법이 사용되었으며 분석 결과는 다음과 같다.

<표 12> 직관적 탐구 과정에 대한 질문지 분석

| | |
|---|---|
| 질문 | 수학 수업을 시작할 때 제시한 문제는 흥미를 불러일으켰는가? 만약 흥미가 있었다면 그 이유를 말해봅시다.<br>2. 제시된 문제를 통해 그 날 공부할 문제를 찾아낼 수 있었는가? |

| 구분 / 번호 | 반응 |
|---|---|
| 1번 | 책에 바로 문제를 풀기보다는 직접 해볼 수 있는 문제여서 흥미 있었다.<br>우리에게 익숙한 문제였다.<br>이야기나 그림을 통해서 구해야 되는 것을 찾아내는 것이 재미있었다.<br>아주 흥미 있었다.<br>생활에 쓰이는 문제여서 재미있었다.<br>문제를 풀고 싶어졌다. |
| 2번 | 학습 목표와 그 날 해야 될 활동까지 예상할 수 있었다.<br>그림이나 이야기를 들으니 쉽게 이해할 수 있었다.<br>공부할 문제를 더 잘 알 수 있었다.<br>해결해야 될 것을 잘 이해하였다. |

질문지 문항 1번에 대하여 학생들은 정말 흥미로웠다, 생활에 쓰이는 문제여서 재미있었다, 문제를 풀고 싶어졌다 등과 같이 반응하였고 문항 2번에 대해서는 문제 상황이 잘 이해가 되었다, 공부할 문제가 무엇인지 확실히 알게 되었다, 해결해야 될 것을 잘 이해하였다 등과 같이 반응하였다.

위의 표에서 제시한 대로 학생들은 RME를 적용한 수학화 학습의 첫 차시부터 마지막 차시까지 매 차시마다 제시되는 실제적 맥락 문제 상황에 매우 흥미를 보였다. 또 교과서처럼 바로 문제풀이식이 아닌 현실과 밀접하게 관련된 문제 상황을 이야기나 구체물, 게임 등의 다양한 방법을 통해 자신과 친밀하게 느끼고 수학적인 측면을 잘 알아내었다. 그리고 학습목표 뿐만 아니라 학습내용도 잘 기억에 남았다. 따라서 RME를 적용한 수학화 학습을 통해 직관적 탐구 과정이 활발히 일어났다고 할 수 있다.

나. 수평적 수학화 과정

1) 수평적 수학화 과정에 대한 관찰 및 녹음 자료 분석

RME를 적용한 수학화 학습 초반에는 학생들이 그동안에 해 온 수업 방식과 달라서인지 제시된 문제 상황에 대하여서 관심을 보이고 흥미를 보였다. 그러나 전체 및 소집단 토의에서 자신의 해결방법을 비교할 때에 대부분의 학생들은 평소대로 잘하였지만 몇몇의 학생들은 동료들과 충분히 의사소통하지 못하는 모습이었다. 그러나 매 차시 수업이 진행되어 가면서 그 몇몇의 학생들도 자신의 의견을 조금씩 제시하였고 소집단 토의에서도 의견을 교환해 나갔다. 활동지와 학습장에서도 학생들이 문제 상황에서 수학적인 개념을 찾고 넓이 구하는 방법을 발견해 나가는 것을 볼 수 있었다.

T : 제시된 문제를 모둠에서 해결해볼까요.
S All: (모둠 활동 실시)
....(중간 생략)
T : 모둠원 끼리 토의한 것을 바탕으로 평행사변형의 넓이 구하는 방법을 발표해볼까요.
S1: 나는 평행사변형을 수직이 되게 반으로 자른 다음 반대편에 붙이니까 직사각형이 되었습니다. 그래서 평행사변형의 넓이는 직사각형의 넓이 구하는 방법과 같다고 생각합니다.
T : 평행사변형을 다르게 자른 사람 있나요?
S2 네, 저는 평행사변형의 끝에 있는 직각삼각형을 잘라서 반대편으로 옮기니까 직사각형 모양이 나왔습니다. 그래서 (가로)×(세로)해서 넓이를 구했습니다.
T : 그러면 우리 평행사변형을 잘라서 붙이면 직사각형이 되는지 실제로 해볼까요.
S All: (활동 중)
S3: 선생님, 잘라서 붙이기가 어렵습니다. 그런데 잘라도 넓이는 같나요?
T : 그 질문에 대한 답은 조금 뒤에 찾아보기로 하고 또 다른 방법이 있나요?
S4: 나는 모눈종이 위에 모형을 그린 다음 그 안에 들어가는 정사각형의 수를 세었습니다.
.....(중간 생략)
T : 선생님이 보여주는 자료를 가지고 S3이 아까 한 질문에 답을 구해볼까요? 보고 있는 빨대의 넓이는 모양이 달라지면 넓이도 달라지나요?
S5: 똑같습니다.
S6: 뭔지는 모르겠지만 달라집니다.
T : 의견이 갈리는 군요. 각각의 빨대 넓이는 변하는가요?
S7: 변하지 않습니다.
T : 그러면 빨대 넓이의 총합도 변하지 않겠죠?

T : 무슨 모양인가요?
S10: 직사각형입니다.
T : 그러면 방금 두 도형의 넓이는 어떠한가요?
S9: 똑같습니다.
T : 그러면 평행사변형과 직사각형의 넓이는 같다고 할 수 있나요?
S All: 네, 같습니다.
T : 왜 넓이가 같나요?
S1: 밑변의 길이와 높이의 길이가 같기 때문입니다.

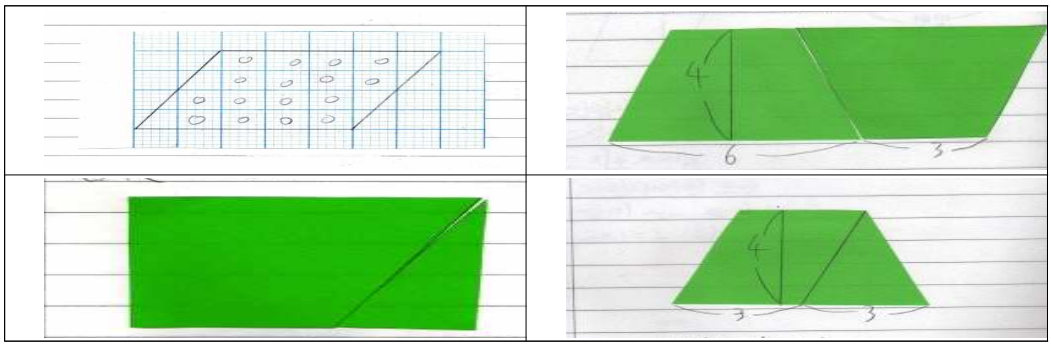
녹음 자료를 분석하여 보면 대부분의 학생들은 학습목표를 잘 인지하고 문제를 여러 가지 방법으로 해결해보려고 하였다. 학습능력이 떨어지는 3명은 평행사변형을 오려서 직사각형으로 만드는 조작활동을 조금 힘들어했지만 학습내용에 대한 이해는 하였다. 평행사변형의 넓이는 직사각형의 넓이와 같다는 것을 이해시키기 위해 교사의 검증자료로 카발리에리의 원리를 이용한 교구를 투입하였는데 몇몇을 제외하고 대부분의 학생들이 처음에 이해하지 못하였다. 처음 접한 교구인지 낯설어 하여 여러 번 반복 설명을 하였다. 그렇지만 그 이후의 차시에서는 적응하여 삼각형의 넓이를 구할 때에는 유용하게 쓰였다.

따라서, 관찰 및 녹음 자료의 분석을 통해 학생들이 RME를 적용한 수학화 학습을 하면

서 수평적 수학화가 더욱 활발히 형성되었음을 발견할 수 있었다.

2) 수평적 수학화 과정에 대한 학습장 분석

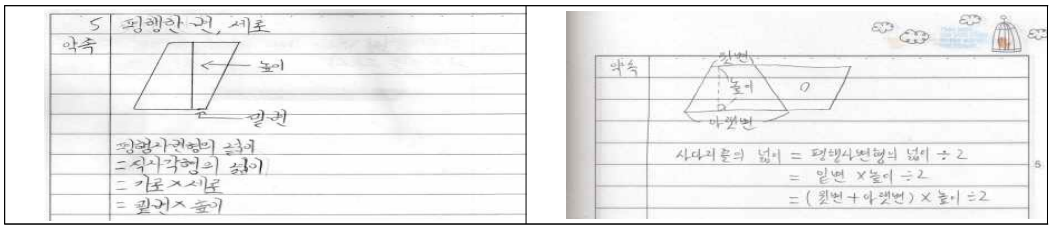
활동지의 문제해결 방식은 본인의 해결방법을 적고 소집단 토의나 전체 활동에서 나온 다른 친구들의 해결방법을 적게 되어있다. 이는 해결방법 비교 및 검토 단계에 해당하는 활동으로써 학생간의 상호작용, 교사와 학생간의 상호작용 모습이 보인다. 실제로 학생들은 자신의 해결방법을 생각해내고 서로의 생각을 공유하면서 자신의 생각을 반성하는 수평적 수학화 활동을 잘 하였다. 학습능력이 낮은 몇 명은 먼저 자신의 해결방법을 생각해내기 보다는 소집단 친구들의 도움을 받아서 하는 경우가 대부분이었지만 다른 친구들의 생각을 받아들이고 이해하는 것을 봐서는 이 학생들도 수평적 수학화가 이루어진 것으로 보인다.




[그림 3] 수평적 수학화를 통한 결과물

다. 수직적 수학화 과정

몇몇을 제외한 대부분의 학생들은 수학적 개념을 정의하는 것, 각종 평면도형의 넓이 구하는 공식을 추출해 내는 과정, 단위들의 관계를 알고 변환하기 등의 활동을 잘 수행하였다. 그리고 소집단 토의와 전체 토의, 교사의 안내를 받으면서 지금까지 몰랐거나 어려워했던 부분을 이해하면서 새로운 수학적 개념을 형식화하고 일반화해 나갔다. 대부분의 학생들 모두 수학자가 되었다고 가정하고 평행사변형의 ‘밑변’과 ‘높이’를 이름 짓기 할 때 ‘가로’, ‘세로’, ‘평행한 변’, ‘윗변과 밑변’ 등 다양하게 자신의 언어로 재발명 하였는데 이러한 활동을 통해 평행사변형의 ‘밑변’과 ‘높이’의 개념을 보다 명확히 정리해 가는 모습을 발견할 수 있었다. 특히, 평행사변형의 ‘밑변’과 ‘높이’는 그 다음 차시에서 배울 평면도형의 넓이를 구하는데 기초가 되는 개념이어서 중요한 활동이었다. 그리고 평면도형의 넓이를 구하는 여러 가지 방법을 결합하고 통합하여 문제를 해결하며 그 방법들을 공식으로 표현하고, 여러 가지 단위들의 규칙성을 찾고 형식화하는 등 수직적 수학화의 모습이 보여 진다.




[그림 4] 수직적 수학화 과정의 사례

라. 응용적 수학화 과정

7. 평면도형의 넓이 단원에서는 개념을 적용하여 현실에 응용하는 활동이 많았고 8. 여러 가지 단위 단원에서는 개념을 강화하고 일반화하는 활동이 대부분이었다. 학습능력이 뛰어난 학생들은 넓이 공식이나 넓이 구하는 방법을 이용하여 실생활 응용문제를 잘 해결하고 여러 가지 단위의 개념을 확실히 하여 단위 변환 활동을 능숙히 해나갔다. 반면 대부분의 학생들은 넓이 공식만을 외워서 문제를 해결하는 경향이 있었고 단위 개념의 강화를 통해 서로 변환하는 응용문제를 해결하는데 조금 어려움을 겪었다. 따라서, 학생들은 개념을 새로운 문제에 적용하고 개념의 강화를 통한 일반화 모습을 보임으로써 응용적 수학화의 가능성을 엿볼 수 있었다.

| 실생활 응용 문제 | 형성 평가지 |
|---|---|
| 6. 우리가 가지고 있는 학습용 칼을 살펴봅시다. 무슨 모양인가요? 넓이를 구해봅시다. | < 형성 평가지 ><br>평행사변형의 넓이 구하기<br>5학년 ( 1 )반 ( 4 )번 이름( )<br>1. 다음 평행사변형의 넓이를 구하시오.<br>4×5=20<br>5cm ( 20 )cm²<br>2. 다음 평행사변형과 넓이가 같고 모양이 다른 평행사변형을 한 개 그리시오.<br>1cm<br>1cm |

[그림 5] 응용적 수학화 과정의 사례

## Ⅴ. 결 론

본 연구는 RME를 적용한 수학화 학습을 위해 초등학교 5학년의 측정 영역 단원을 재구성하고 이를 교수·학습에 적용하여 학생들의 수학적 사고 증진에 대한 학습 효과를 검증하고자 하였다. 이를 위하여 초등수학의 측정 영역의 의미와 지도 방안을 살펴보고 수학적 사고에 대한 개념과 종류를 분석하였다. 또한 RME를 적용한 수학화 교수·학습 프로그램을 구안하기 위하여 RME이론과 수학화 과정에 대한 외국도서와 학술지, 논문 등에 소개된 다양한 교수·학습 사례들을 수집하고 분석하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단의 수학적 사고에 대한 효과를 분석한 결과 전체적인 수학적 사고 능력에서 유의미한 차이가 나타났다. 따라서 RME를 적용한 수학화 학습이 학생들의 수학적 사고 능력에 긍정적인 영향을 주었다는 것을 알 수 있었다.

그리고 본 연구에서 측정한 표현의 사고, 조작의 사고, 함수적 사고, 유추적 사고, 발전적 사고를 각각의 종류별로 효과를 분석한 결과 표현의 사고와 유추적 사고는 유의미한 변화가 없었고 조작의 사고, 함수적 사고, 발전적 사고는 유의미한 변화가 있었다. 이는 실험처치 동안 넓이 구하는 방법을 알아나가는 활동 중에서 조작활동을 많이 하였고 형식화를 통해 변수들과 넓이 사이의 관계를 이해함으로써 함수적 사고 능력도 향상시키며 한 가지 답만을 내는 활동보다는 여러 가지 해결책이 나올 수 있는 문제를 제시하고 해결하는 활동을 많이 하여서 발전적 사고 능력에도 효과를 보인 것으로 생각된다. 그러므로 평면도형의 넓이 및 여러 가지 단위에 대한 개념을 명확히 이해하지 못하는 학생들의 지도에 있어 RME를 적용한 수학화 학습을 적용해 보는 것이 의미가 있음을 시사한다.

둘째, RME를 적용한 수학화 학습을 실시한 실험집단에서 학생들의 수학화 과정을 관찰과 녹음자료, 질문지, 학습장, 활동지와 형성 평가지를 통해 분석한 결과 수학화 과정의 네 단계인 직관적 탐구, 수평적 수학화, 수직적 수학화, 응용적 수학화 각각의 과정에서 어느 정도 차이가 나타났다. 먼저 직관적 탐구 과정과 수직적 수학화 과정에서는 대부분의 학생들이 비슷한 응답과 활동 모습을 보여서 차이가 별로 없었으나 수평적 수학화와 응용적 수학화 과정에서는 학생들마다 수학화 모습이 어느 정도 차이가 났고 몇몇의 학습능력이 뒤쳐지는 학생들은 수학화가 잘 이루어지지 못했다.

직관적 탐구 과정에서는 RME를 적용한 수학화 학습 내내 문제 상황에 높은 관심을 보이며 각 문제 상황을 통해 보다 조직화 하고 구체화하여 문제의 수학적 측면을 알아내고자 하였다. 이는 실제적 맥락의 문제 상황을 제시할 경우 직관적 탐구 과정에 대한 수학화의 긍정적인 효과가 있음을 시사한다. 또한 수평적 수학화 및 응용적 수학화 과정에서는 몇몇의 학습능력이 뒤쳐지는 학생들을 제외하고 대부분 현실적인 문제를 수학적인 문제로 전환하여 사고하고 다양한 해결방법을 제시하고 다른 친구들과 의사소통하며, 형식화되고 일반화된 수학적 개념을 새로운 문제 상황에 잘 적용하였다. 반면 수직적 수학화 과정에서는 모두 다른 학생들과의 상호작용, 교사와 학생과의 상호작용을 충분히 하여서 수학적 개념이나 공식을 형식화, 일반화하는 데 무리가 없어보였다.

참 고 문 헌

김유진(2007). **현실적 맥락을 활용한 수학화 학습이 아동의 수학적 사고에 미치는 효과: 초등학교 5학년 도형영역을 중심으로.** 이화여자대학교 석사학위논문.

김윤진(2005). **초등학생의 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 프로그램 개발.** 이화여자대학교 석사학위논문.

김은하(2011). **수학적 사고유형에 따른 서술형 평가문항과 평가기준 개발: 수학Ⅱ를 중심으로.** 아주대학교 석사학위논문.

박영훈(2005). 맥락기반 수학프로그램인 'Mathematics in Context'의 학교적용 효과성 연구. **열린교육연구, 14**(2), 23-40.

박준석(2010). **실생활 수학교육(RME)에 근거한 수학화 학습이 학업 성취도 및 수학적 태도에 미치는 영향.** 광주교육대학교 석사학위논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

유미현, 강흥규(2009). Freudental의 수학화 이론에 근거한 제7차 초등수학 교과서 5-가 단계 넓이 단원의 재구성. **한국초등수학교육학회지 13**(1), 115-140.

최선아(2002). **실제적 맥락의 문제 상황을 활용한 분수 학습의 효과 검증.** 이화여자대학교 석사학위논문.

황선형(2010). **RME이론에 기초한 측정영역의 학습이 초등학교 5학년 학생들의 정의적 영역에 미치는 영향.** 한국교원대학교 석사학위논문.

Fredenthal, H.(1978). *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education,* D. Reidel Publishing Company.

Fredenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Comany.

Treffers, A. (1987). *Three dimension: A model of goal and theory description in mathematics education-The Wiscobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

<Abstract>

# Effects on Mathematical Thinking Ability of Mathematising Learning with RME -Based on measurement region for fifth grade in elementary school-

Baek, In su[3]; & Choi, Chang Woo[4]

This study is intended to establish and apply a program created with RME for mathematising instruction and learning and identify how it influences on the mathematical thinking process in the field. In order to deal with this study inquiries, related theories have been analyzed establishing a program for mathematising instruction and learning method based on a model of them and RME theory principles and re-organizing education courses for instruction on the fields concerned. Study subjects were limited to two classes consisting of fifth graders in S elementary school located in the city of Daegu and divided them in an experiment group and a control group. An experiment group was given a mathematising learning method applied with RME, while a control group had a class with regular methods of learning and instruction during the period of experiment. As a summary of aforementioned results of the study, mathematising learning method applied with RME had an effect on improving mathematical thinking ability for students and also on promoting mathematising outcome through a repetitive experience in each procedure obtained on a regular basis.

Key words: RME, mathematising learning, mathematical thinking, mathematising process

논문접수: 2015. 07. 08
논문심사: 2015. 08. 10
게재확정: 2015. 08. 20

3) ssamjang80@hanmail.net
4) cwchoi@dnue.ac.kr