韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.1.131
제 29집 제 1호, 2015. 2. 131-155

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 1, Feb. 2015. 131-155

통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석[1)]

이 현 주 (경덕중학교)
류 중 현 (산남고등학교)
조 완 영 (충북대학교 수학교육과)†

본 연구의 목적은 고등학교 상위권 학생들이 미분계수 개념을 통합적으로 이해하고 있는지를 알아보는데 있다. 여기서 미분계수 개념의 통합적 이해란 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 속도문제를 미분계수 개념과 연결하여 이해하고, 미분계수 개념, 미분계수의 대수적·기하적 표현, 미분계수를 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것을 의미한다. 본 연구를 위하여 청주시에 소재한 S고등학교 2학년 상위권 학생 38명을 연구대상으로 선정하여 미분계수 개념의 통합적 이해 정도를 조사하였다. 통합적 이해의 관점에서 고등학교 수학Ⅱ 교과서와 여러 책을 참고하여 검사지를 개발한 후 현장 교사들과 전문가의 검토를 받아 수정·보완하였다. 검사지는 총 11개의 문항으로 구성되었으며 문항 1과 2-(1)은 미분계수 개념과 대수·기하 표현의 연결을, 문항 2-(2)와 4는 미분계수 개념의 발생맥락과 미분계수 개념의 연결을, 문항3과 10은 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결을 볼 수 있도록 하였다. 문항 5~9는 미분계수의 응용상황들로 구성되었는데 문항 6은 미분계수 개념과 응용의 연결을, 문항 8은 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결을, 문항 5와 7은 미분계수의 수학 외에서의 응용과 기하 표현의 연결을, 문항 9는 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결을 볼 수 있도록 하였다. 연구 결과 미분계수의 개념과 대수·기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 높게 나타났으나 그 외의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 거의 절반이거나 절반에 미치지 못하는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서론

이해에 관한 연구는 그동안 다양한 측면에서 논의되어 왔으나 이해의 본질은 여전히 불확실한 상태로 남아 있으며, 학자마다 이해에 대한 정의를 다양하게 제시하고 있다. 이종희(1999)는 수학 교육계에서 이해 개념에 관한 합의가 되지 않는 이유를 이해 개념은 다면적이고 심리적 과정이 내재해 있어 그 개념의 본질을 파악하기가 쉽지 않으며, 인식론에 따라 기본입장이 달라서 한가지로 파악하기 어려운 개념이기 때문이라고 하였다. 또한 그는 이해의 과정과 결과의 측면에서 철학적 분석을, 이해 주체에 대해서는 심리학적 분석을, 교육학적 측면에 대해서는 교수학적 분석을, 이해 대상에 대해서는 수학의 발생적 측면에서의 연구를 통해 이해 개념을 분석하였다.

이처럼 이해는 다양한 측면에서 논의될 수 있으나 본 연구에서는 교수·학습이라는 측면에서 '이해'를 논의해 보고자 한다. 일반적으로 교사는 학생들이 수학개념을 잘 이해하도록 가르치려고 노력하며, 설명을 마친 교사가

1) 이 논문은 2012학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의해 연구되었음
* 접수일(2015년 1월 12일), 심사(수정)일(2015년 2월 2일), 게재 확정일(2015년 2월 5일)
* ZDM 분류 : D34
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 통합적 이해, 미분계수
† 교신저자: wycho@cbu.ac.kr

“이해했나요?”라고 질문하면 학생들은 “네” 또는 “아니오”라고 답한다. 그러나 교사가 똑같은 설명을 했음에도 불구하고 어떤 학생은 이해하고 어떤 학생은 이해하지 못하는 경우도 있다. 또 교사의 훌륭한 가르침에도 불구하고 수학을 이해하지 못하며 특히 아주 간단해 보이는 수학 개념을 이해하는데 실패하는 학생들도 있다. 이러한 의문에 대한 답을 찾기 위해서는 먼저 수학 교수·학습의 관점에서 이해가 무엇인지를 명확히 할 필요가 있다. 실제로 수학을 이해했다고 생각한 학생의 이해 상태와 교사가 요구하는 이해 상태가 다를 수도 있고, 교사에 따라서도 요구하는 이해의 의미가 다를 수도 있다. 따라서 ‘학생 A가 수학적 개념 X를 이해한다.’는 것은 어떤 의미인가를 명확히 하는 것은 매우 중요한 문제이다.

Haylock(1982)은 ‘이해한다’는 것을 ‘인지적인 연계성을 구성하는 것’으로 정의하고, 수학적 언어, 그림, 구체적인 상황(Concrete situations), 기호의 네 가지 요소를 학습자의 이해를 인식하기 위한 방법으로 제시하였다(정인철, 2003, 재인용). 이들 네 요소는 서로 유기적으로 연결되어 있어 학습자가 구성하는 이해의 정도를 교사로 하여금 인식하도록 하며 교사는 이를 바탕으로 학생들의 필요한 부분을 지도하며 난이도 또한 적절하게 조절할 수 있게 된다고 하였다. Steinbring(2005)은 수학적 개념이 ‘기호/상징’과 ‘참조맥락/대상’사이의 상호작용을 통해 구성된다고 보고 이를 표현하는 도구로 ‘인식론적 삼각형(epistemological triangle)’ 이라는 개념적 도식을 사용하였다. 여기서 ‘기호/상징’은 지식의 파악과 코딩과 ‘참조맥락/대상’은 수학 개념의 의미 부여와 관련 있으며, 수학적 개념의 의미는 두 체제 사이의 상호작용에 의해 나타난다(정영옥, 2012, 재인용). 또한 조완영(2012)은 통합적 이해를 제안했는데 통합적 이해란 수학 개념을 이해할 때 맥락과 연결된 개념정의, 대수·기하 표현, 간단한 응용상황과의 연결을 포함하여 수학을 이해하는 것을 의미한다고 하였다. Haylock(1982)의 구체적인 상황, Steinbring(2005)의 ‘참조맥락/대상’은 조완영(2012)의 맥락과 관련이 있으며, 수학적 언어와 그림과 기호, ‘기호/상징’, 대수·기하 표현도 상호 관계가 있다.

한편, 학생들의 수학에 대한 오류 또는 오개념 연구들을 분석해 보면 학생들이 수학을 잘 이해하지 못하는 원인을 몇 가지로 구분할 수 있다. 첫째, 개념이미지와 개념정의 사이의 연결이 부족해서 오개념이 발생하는 경우이다(Tall, 1987 ; 박선화, 1998 ; 이경화·신보미, 2005 ; 최승현, 2014). Tall(1987)은 과학을 전공한(수학은 전공하지 않은) 학생들을 대상으로 개설된 미적분학 강의를 수강하는 학생 287명을 대상으로 한 조사연구에서 변곡점(좌표축이 없는 $y=x^3$의 그래프 상의 변곡점)에서 접선을 그려보라는 문제에 정답률이 18%로 매우 낮게 나타났으며, 접선에 대한 개념이미지가 접선의 정의와 연결되지 못해 이러한 현상이 발생했다고 보고하였다. 둘째, 개념의 다양한 표현과 표현 사이의 연결을 이해하지 못해 발생하는 경우이다(최승현, 2014 ; 윤종관, 2003). 최승현(2014)은 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 함수 개념에 대한 이해를 조사한 연구에서 많은 학생들이 식과 그래프의 관계, 상황과 표, 식의 관계 그리고 상황과 그래프 사이의 관계를 잘 이해하지 못하고 있다고 주장하였다. 셋째, 개념과 응용 사이의 연결이 부족한 경우이다(김현정, 2008 ; 정현아, 2008). 정현아(2008)는 삼각함수 개념에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해도를 조사한 연구에서 대부분의 학생들이 삼각함수를 실생활이나 자연현상에서의 주기적인 상황과 관련지어 이해하지 못하고 있다고 주장하였다.

수학 교수·학습 상황에서 이해를 정의할 때, 오류 또는 오개념이 발생하지 않도록 하면서 학생들이 수학개념을 어떻게 이해하기를 원하는지를 고려할 필요가 있다. 즉, 개념이미지와 개념정의 사이의 연결, 개념의 다양한 표현 사이의 연결, 개념과 개념의 응용상황과의 연결을 포함하여 이해를 정의할 필요가 있다. 이러한 이해의 관점은 앞에서 논의한 ‘이해한다’, 인식론적 삼각형, 통합적 이해의 개념과 관련이 있다. 따라서 본 연구에서는 개념을 이해한다는 것을 개념의 발생맥락을 개념과 연결하여 이해하고, 개념과 개념의 다양한 표현, 개념을 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것으로 보고 이러한 이해를 통합적 이해(integrated understanding)라고 정의한다.

미분 개념은 초등학교의 규칙성과 문제해결 영역, 중학교의 함수 영역 그리고 고등학교의 함수의 극한과 연속 영역을 통합하여 발전적으로 심화시킨 내용으로 수학뿐만 아니라 물리학, 생물학, 경제학, 경영학, 의학, 심리

학 등 다양한 분야에 응용되는 기본적인 도구적 지식이며 사회 현상 및 자연 현상을 이해하고 분석하는데 널리 이용되는 등 중등학교 수학의 가장 핵심적인 내용 중 하나이다. 우정호(2007)에 따르면 현재의 미적분 지도는 알고리즘 곧 대수적 접근법을 지나치게 강조하는 경향이 있다. 함수식의 기계적 조작 곧, 선형 근사 이론보다 도함수의 계산을 강조하고, 적분의 의미 탐구보다는 원시함수를 이용한 계산을 강조하며, 수치적인 근사 접근법이나 그래프 접근법을 통한 다양한 개념이미지 형성을 경시하고 형식적인 알고리즘에 집중하게 함으로써 관점의 파악과 다양한 개념적 사고의 개발을 소홀히 하고 있다는 것이다. 또한 Ferrini-Mundy와 Lauten(1993)은 학생들이 미분을 계산하는 면에서는 상대적으로 좋은 절차적 수행을 함에도 불구하고 미분의 기하학적 또는 물리학적 표상을 다루는 능력은 결여되어 있다고 하였다(임선정, 2005, 재인용).

미분 학습에 있어서 이 같은 문제점을 인식하고 미분개념 이해에 관한 많은 연구가 진행되어왔으나 대부분 오개념 및 오류 분석에 그친 연구들이었다(김혁재, 2000 ; 이호철, 2005 ; 박희진, 2007 ; 현원동 ; 2003, 최나영 ; 2001). 김혁재(2000), 이호철(2005)의 연구는 미분 개념을 이용한 절차적 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 오류 유형과 빈도수에 초점을 두고 연구되었으며, 박희진(2007)의 연구는 미분 개념과 문제해결 과정에서 학생들이 나타내는 오류 유형 비율과 교사들이 인식하는 학생들의 오류 유형 비율 파악에 초점을 두었다. 최나영(2001)의 연구 또한 함수와 도함수 사이의 그래프적 관계를 중심으로 미분개념에 대한 학생들의 오류 및 오개념에 관해서 조사·분석하였기 때문에 포괄적인 미분 개념에 대한 접근이 부족했다.

미분 개념에 대한 오개념과 오류 분석에 관한 연구도 중요하지만 학생들의 미분 개념의 이해를 돕기 위해서는 현재 고등학교 학생들이 미분계수 개념을 통합적으로 이해하고 있는지 분석하는 연구가 선행되어야 할 것이다. 조완영(2012)은 미분계수 개념의 통합적 이해를 역사발생적 근원 문제인 접선문제, 속도문제와 관련시켜 미분계수의 의미를 알고, 대수적·기하적 표현으로 설명할 수 있으며, 미분계수 개념을 응용상황과 연결시킬 수 있는 것으로 정의하였다. 정연준(2010)도 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰을 통해 미분계수의 정의에 대한 이해는 접선과 순간속도에 대한 이해와 연결되도록 해야 한다고 하였으며 이렇게 될 때 미분계수를 이용하여 변화 현상을 파악할 수 있는 안목이 형성될 수 있을 것이라고 보았다. 또한, 강향임(2012)은 미분계수 개념은 그 형식화 과정에서 고려된 기하학적 측면에서 접선의 기울기, 운동학적 측면에서 순간속도, 대수적인 측면에서 평균변화율의 극한값을 의미하는 등 다양한 측면을 포함하며 미분계수를 개념적으로 이해한다는 것은 미분계수가 포함하는 다양한 측면을 인식하고 문제 상황에 적용할 수 있는 것이라고 하였다.

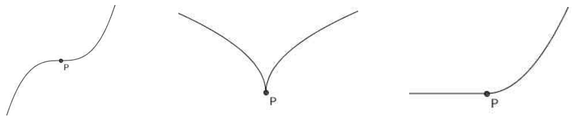
이에 본 연구에서는 미분계수 개념의 통합적 이해란 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 속도문제를 미분계수 개념과 연결하여 이해하고, 미분계수 개념, 미분계수의 대수적·기하적 표현, 미분계수를 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것으로 본다. 본 연구에서는 이러한 미분계수 개념의 통합적 이해에 대한 생각을 바탕으로 고등학교 상위권 학생들이 미분계수 개념을 어떻게 이해하고 있는지 분석하였다.

Ⅱ. 통합적 이해

교사는 수학적 개념에 대해서 학생들에게 설명할 때, “이해했나요?”라는 질문을 자주 한다. 그렇다면 여기서 ‘이해’란 무엇을 의미하는가? ‘이해’의 의미는 다양한 측면에서 논의될 수 있으나 여기서의 이해는 교수·학습 관점에서의 이해라고 볼 수 있다. 즉, 교사가 ‘이해했나요?’라고 묻는 것은 교사가 어떤 개념에 대해서 알고 있기를 바라는 것을 학습자가 알고 있는지를 묻는 것이다. 따라서 교사가 ‘이해했나요?’라는 질문을 하기 위해서는 학습자에게 바라는 이해의 모습 즉, 교수·학습 관점에서 개념을 이해한다는 것의 의미를 생각해 볼 필요가 있다. 이를 위하여 먼저 수학적 오개념에 관한 선행연구를 분석해보고 개념의 이해에 관한 여러 학자들의 정의를 살펴본 후 개념을 이해한다는 것의 의미에 대해서 정의하고자 한다.

1. 수학적 오개념에 관한 선행연구 분석

Tall(1987)은 미적분학 강의를 수강하는 과학과 1학년 학생(수학을 전공하지 않는) 287명을 대상으로 [그림 Ⅱ-1]과 같은 그래프들을 제시하고 점 P에서의 접선을 그려보게 하였는데 그 결과 첫 번째 그림에서의 정답률은 18%, 두 번째 그림에서의 정답률은 8%, 세 번째 그림에서의 정답률은 12%로 매우 낮게 나타났다. 학생들이 수강한 미적분학 강의에서 접선을 할선의 극한 또는 점 P를 지나고 점 P에서의 미분계수를 기울기로 갖는 직선으로 정의했음에도 불구하고 학생들은 접선을 곡선을 스치지만 곡선을 가로지르지는 않거나 곡선과 만나지만 곡선을 자르지는 않으며 곡선과 공통점을 갖지만 곡선의 한쪽 편에 있는 선이라는 개념이미지를 가지고 접선을 그렸다. 즉, 학생들은 접선에 대한 개념이미지를 접선의 정의와 연결시키지 못하고 있었다(Tall, 1991, 재인용).



[그림 Ⅱ-1] 점 P에서의 접선 그리기

박선화(1998)는 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 극한 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 분석하였는데 그 결과 학생들은 극한 개념에 대해 매우 빈약한 개념적 지식을 갖고 있으며 많은 인지적 장애를 갖고 있다고 하였다. 그는 학생들이 개념을 이해하기 위해서는 이러한 인지적 장애를 극복해야 한다고 하였는데 장애를 극복하기 위해서는 올바른 개념이미지를 형성하여야 한다고 하였다. 또한, 이경화와 신보미(2005)는 상위 집단 학생들을 대상으로 함수의 연속에 대한 이해를 조사하기 위하여 지필 검사와 개별 면담을 실시하였다. 그들은 함수의 연속 관련 개념이미지 유형을 5가지로 분류하였는데 첫 번째는 한 점에서의 연속을 구간의 내점에서만 생각한다는 것, 두 번째는 진동하는 함수는 언제나 불연속이라는 것, 세 번째는 함수의 연속성을 그래프의 연결성으로 대치한다는 것, 네 번째는 모든 실수에서 연속이어야 연속함수라고 보는 것, 다섯 번째는 분수함수이면 언제나 불연속함수라고 보는 것이다. 이러한 개념이미지들은 함수의 연속 개념을 이해하는데 어려움을 주는 것으로 함수의 연속에 대한 개념정의와 개념이미지가 연결되지 못함으로써 오개념의 근원이 되고 있다고 하였다.

최승현(2014)은 함수 개념에 대한 이해를 분석하기 위하여 고등학교 1, 2학년 학생 131명을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 조사 결과 학생들은 함수의 정의를 대응의 관계나 일가성의 의미만으로 이해하고 있으며 함수의 정의를 정확하고 확실하게 이해하지 못한다고 하였다. 또한 학생들은 함수의 다양한 표현들을 이해하고 표현들 사이의 관계를 이해하는데 많은 어려움을 겪고 있다고 하였다. 특히 학생들은 불연속적인 그래프는 함수가 아니라고 판단하는 경향을 보였는데 이는 학생들이 함수의 그래프 모양은 항상 연속적인 모양으로 그릴 수 있어야 한다는 제한된 개념이미지를 갖고 있기 때문이라고 하였다. 즉, 개념이미지와 개념정의가 연결되지 못하여 오개념을 일으킨 것이다. 또한 학생들은 함수의 다양한 표현들 사이를 잘 연결하지 못하여 그래프를 분석하여 함수식으로 나타내거나 표를 분석하여 함수식으로 나타내는데 어려움을 겪었으며 상황을 표나 그래프로 표현하는 데서도 많은 어려움을 겪고 있었다.

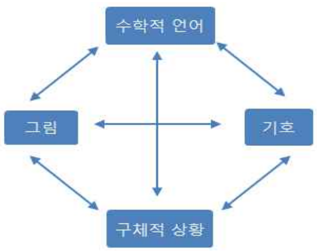
윤종관(2003)은 고등학교 학생들의 삼각함수에 대한 이해를 분석하였는데 그 결과 첫째, 대부분의 학생들이 호도법에 대한 정확한 개념의 이해가 결여되어 이해가 미흡한 상태로 육십분법과 호도법의 관계만을 단순하게 암기하여 육십분법을 호도법으로, 호도법을 육십분법으로 고치고 있었다. 둘째, 함수의 평행이동 개념과 삼각함수의 정의에 대한 이해정도가 부족하여 삼각함수의 그래프에 대한 이해도가 낮게 나타났다. 셋째, 삼각함수 개념의 정확하지 못한 이해와 잘못된 그래프의 표현으로 삼각방정식과 삼각부등식의 풀이 과정에서 상당히 많은 오

류를 일으키고 있었다. 이는 학생들이 삼각함수의 다양한 표현을 이해하지 못하고 표현들 사이를 연결시키지 못했음을 보여주는 것이라고 볼 수 있다.

김현정(2008)은 로그 개념에 대한 이해 정도를 분석하였는데 그 결과 로그의 정의를 쓰고 밑과 진수를 구하는 문제에 대한 이해 정도는 높게 나타났으나 실생활에서 로그 개념을 찾아내고 표현하는 능력을 묻는 문제에서는 낮은 이해도를 보였으며 로그의 성질에 대해서도 단순히 공식의 암기 정도로만 이해하고 있음을 알 수 있다고 하였다. 즉, 절차적으로 문제를 해결하는 것에서는 문제가 없었으나 개념과 응용상황을 잘 연결시키지 못하고 있다고 하였다. 또한, 정현아(2008)는 삼각함수 개념에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해도를 분석하였는데 분석 결과 대부분의 학생들이 삼각함수를 실생활이나 자연현상에서의 주기적인 상황과 관련지어 이해하고 있지 못하였다. 즉, 학생들은 개념과 응용상황을 연결시키지 못하고 있는 것으로 나타났다.

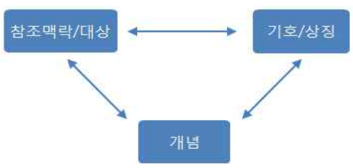
2. 개념의 이해

Haylock(1982)은 '이해한다'는 것을 '인지적인 연계성을 구성하는 것으로 본다'고 이해의 정의를 제시하였는데 그는 학습자의 이해를 인식하기 위한 방법으로 수학적 언어(Mathematical language), 그림(Pictures), 구체적인 상황(Concrete situations), 기호(Symbols)의 네 가지 요소를 제시하였다. 이들 네 요소는 [그림 Ⅱ-2]와 같이 서로 유기적으로 연결되어 있어 학습자가 구성하는 이해의 정도를 교사로 하여금 인식하도록 하며 교사는 이를 바탕으로 학생들의 필요한 부분을 지도하며 난이도 또한 적절하게 조절할 수 있게 된다고 하였다(정인철, 2003, 재인용).



[그림 Ⅱ-2] 이해의 연계성에 관한 네 가지 요소(Haylock, 1982)(정인철, 2003, 재인용)

Steinbring(2005)은 수학적 개념이 '기호/상징'과 '참조 맥락/대상'사이의 상호작용을 통해 구성된다고 보고 이를 표현하는 도구로 '인식론적 삼각형(epistemological triangle)' 이라는 개념적 도식을 사용하였다([그림 Ⅱ-3]). 그는 모든 수학적 지식은 지식을 파악하고 코딩하기 위해서는 어떤 '기호/상징'체계가 필요하며, 이런 수학적 기호에 의미를 부여하기 위해서는 적절한 '참조맥락/대상'이 필요하고, 수학적 개념의 의미는 '기호/상징'과 '참조맥락/대상' 사이의 상호작용에 의해 나타난다고 주장하였다(정영옥, 2012, 재인용).



[그림 Ⅱ-3] 인식론적 삼각형(Steinbring, 2005)(정영옥, 2012, 재인용)

이종희(1999)는 Giambrone(1983)의 연구의 고찰을 통해 이해의 결과에는 의미, 사용, 기원, 결과의 측면이 포함되어야 한다고 하였다. 즉, ‘X가 수학적 개념 Y를 이해한다’는 것은 이론적, 실제적, 역사적 맥락에서 그 개념의 의미, 사용, 기원, 결과를 아는 것이라고 하였다. ‘의미’는 Y가 무엇을 의미하는지, Y가 지시하는 것이 무엇인지를 아는 것으로 수학적 개념의 내포와 외연을 알고, 구문론적으로 그 개념이 사용되는 문장에서의 의미를 파악할 수 있는 것을 말한다. ‘사용’은 Y가 가지고 있는 기능과 Y를 사용할 때를 아는 것으로 수학적 개념의 실제적 사용에 관한 것과 이론적 문맥에서 새로운 지식이나 구조를 구성하기 위해서 그 개념을 사용하는 것을 말한다. ‘기원’은 Y가 일어난 이유와 일어난 방법을 알고, Y가 Z의 결과가 되는 방법을 아는 것으로 ‘기원’의 범위는 실제적으로는 그 개념이 발생된 문맥, 그 개념이 생겨난 방법, 그 개념이 생긴 이유를 포함한다. ‘결과’는 Y가 시사하는 바와 Y가 왜 중요한지를 알고 Z가 Y의 결과가 되는 방법을 아는 것으로 그 개념으로 인해 어떤 개념, 원리, 법칙이 나왔는지, 그 개념이 왜 중요한지를 아는 것을 포함한다.

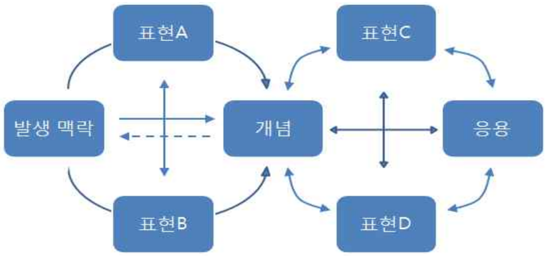
김승호(1987)는 학습자가 개념 A를 획득했다는 것은 개념 A의 속성을 언어적으로 표현할 수 있을 뿐만 아니라 현실적 경험 세계에서 그러한 속성을 가진 대상들을 대할 때마다 개념 A를 통해서 그것들을 볼 수 있는 능력을 의미한다고 주장하였다. 그러므로 학습자가 A라는 개념을 갖기 위해서는 ‘A란 무엇인가’에 관한, 즉 형식적 정의에 관한 이해를 해야 할 뿐만 아니라 ‘어떤 대상이 A로 간주될 수 있는가’에 관한, 즉 A가 적용되는 대상에 관한 지식도 함께 가져야만 한다는 것이다.

조완영(2012)은 통합적 이해를 제안하였는데 통합적 이해란 수학 개념을 이해할 때 맥락과 연결된 개념정의, 대수적 · 기하적 표현, 간단한 응용상황을 포함하여 수학을 이해하는 것을 의미한다고 하였다.

3. 개념의 통합적 이해

선행연구들에서 살펴보았듯이 학생들은 개념정의를 잘못된 개념이미지와 연결시키고 있으며 개념의 응용상황과 개념을 연결시키지 못하고, 개념의 다양한 표현들 사이도 제대로 연결하고 있지 못한 것으로 보인다. 따라서 교수 · 학습 상황에서 이러한 문제점들이 발생하지 않도록 이해의 개념을 정의할 필요가 있다. 즉, 개념이미지와 개념정의 사이의 연결, 개념의 다양한 표현 사이의 연결, 개념의 응용상황과 개념의 연결을 포함하여 이해를 정의할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 개념을 이해한다는 것을 개념의 발생맥락을 개념과 연결하여 이해하고, 개념과 개념의 다양한 표현, 개념을 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것으로 보겠다. 또한 이를 개념의 통합적 이해(integrated understanding)라고 정의한다. 이것을 그림으로 표현하면 [그림 Ⅱ-4]와 같다. [그림 Ⅱ-4]의 좌측 부분은 발생맥락과 표현사이의 상호작용을 통해 개념이 구성되는 과정을 의미하는 것으로 발생맥락은 Steinbring(2005)이 제시한 인식론적 삼각형에서의 ‘참조맥락/대상’, Haylock(1982)이 제시한 네 가지 요소에서 구체적인 상황과 관련이 있으며, 표현과 개념은 Steinbring(2005)의 ‘기호/상징’, Haylock(1982)의 그림과 기호, 수학적 언어와 관련이 있다. 또한 발생맥락과 개념을 연결하는 선은 실선과 점선으로 나타내었는데, 여기서 실선은 발생맥락을 통하여 개념을 이해해야 한다는 것을 의미하여 점선은 발생맥락을 통하여 개념을 이해한 후에는 개념을 발생맥락과 연결시켜 이해해야 함을 의미한다. 한편, Giambrone(1983)은 이해의 결과에는 개념의 사용이 포함되어야 한다고 주장하였으며, 김승호(1987)는 학습자가 개념 A를 획득했다는 것에는 개념 A의 속성을 통해 현실적 경험 세계를 볼 수 있는 능력이 포함된다고 주장하였다. [그림 Ⅱ-4]의 우측 부분은 개념과 응용 사이의 상호 관계를 유기적으로 파악하는 것으로, 이러한 주장들과 밀접한 관련이 있다.



[그림 Ⅱ-4] 개념의 통합적 이해

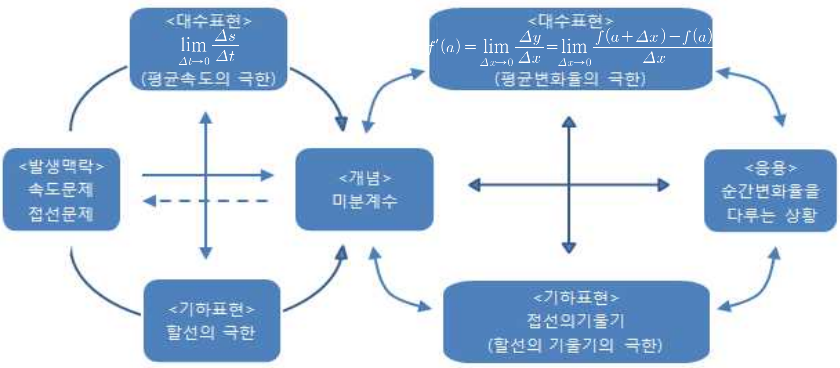
4. 미분계수 개념의 통합적 이해

Zandieh(1998)는 도함수 개념을 그래프적으로 곡선의 한 점에서 접선의 기울기, 언어적으로 순간변화율, 물리적으로 속력이나 속도, 기호적으로 계차몫($\frac{\Delta y}{\Delta x}$)의 극한으로 표현하였다(임선정, 2005, 재인용). 강향임(2012)도 이와 비슷하게 미분계수 개념은 그 형식화 과정에서 고려된 기하학적 측면에서 접선의 기울기, 운동학적 측면에서 순간속도, 대수적인 측면에서 평균변화율의 극한값을 의미하는 등 다양한 측면을 포함한다고 보았다. 또한 그는 미분계수를 개념적으로 이해한다는 것은 미분계수가 포함하는 다양한 측면을 인식하고 문제 상황에 적용할 수 있는 것이라고 하였다.

정연준(2010)은 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰을 통해 미분계수의 정의에 대한 이해는 접선과 순간속도에 대한 이해와 연결되도록 해야 한다고 하였으며 이렇게 될 때 미분계수를 이용하여 변화 현상을 파악할 수 있는 안목이 형성될 수 있을 것이라고 보았다.

조완영(2012)은 미분계수의 통합적 이해란 역사발생적 근원 문제인 접선문제, 속도문제와 관련시켜 미분계수의 의미를 알고, 대수적·기하적 표현으로 설명할 수 있으며, 미분계수의 활용을 통합적으로 이해하는 것을 의미한다고 하였다.

이에 본 연구에서는 미분계수 개념을 통합적으로 이해한다는 것의 의미를 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 속도문제를 미분계수 개념과 연결하여 이해하고, 미분계수 개념, 미분계수의 대수적·기하적 표현, 미분계수를 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것으로 보겠다. 이것을 그림으로 표현하면 [그림 Ⅱ-5]와 같다.



[그림 Ⅱ-5] 미분계수 개념의 통합적 이해

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구의 연구대상자들이 소속된 학교는 청주 시내 S고등학교로 2학년 자연계 수학 수업의 경우 학기말 수학 성적과 모의고사 수학 성적을 기준으로 A(심화)반, B(기본)반, C(보충)반으로 3등분하여 수준별 이동수업을 실시하고 있다. 미분계수 개념의 이해에 관한 선행연구에 따르면 학생들은 미분계수 개념에 관한 많은 오개념과 오류를 가지고 있다(김혁재, 2000 ; 이호철, 2005 ; 박희진, 2007 ; 현원동 ; 2003, 최나영 ; 2001). 본 연구에서도 처음에는 기본반 학생 41명, 보충반 학생 36명을 포함하여 조사하였지만 기본반과 보충반의 반응이 대부분 무응답 또는 오답이어서 분석의 의미가 적었다. 이에 본 연구에서는 2학년 자연계 3개 학급 학생들 중 A(심화)반에 속하는 학생 38명을 연구대상으로 선정하였다. 2014년 9월 전국연합학력평가 기준으로 수학 1등급인 학생은 23명(60.5%), 2등급인 학생은 9명(23.7%), 3등급인 학생은 5명(13.2%), 4등급인 학생은 1명(2.6%)으로 나타났다.

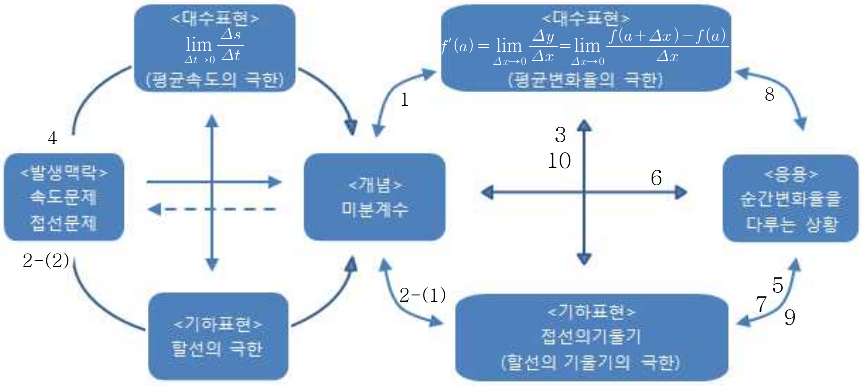
2. 검사도구 및 문항구성

검사 도구는 고등학교 수학Ⅱ 교과서(미래엔, 류희찬 외 12인, 2010)와 여러 책들을 참고하여 개발하였다. 검사지는 10개의 문항이지만 내용요소 기준으로는 총 11개의 문항으로 구성되었으며 학생들의 풀이 과정을 보기 위하여 모두 서술형 문항으로 구성하였다. 본 검사지는 연구자가 개발하거나 선택한 것으로 문항들의 타당성을 확보하고자 현장 교사들과 전문가의 검토를 받은 후 수정하여 완성하였다. 각 문항의 내용요소를 요약하면 <표 Ⅲ-1>, [그림 Ⅲ-1]과 같다.[2]

<표 Ⅲ-1> 문항의 내용요소

문항		내용요소	참고
1		미분계수 개념과 대수 표현의 연결	
2	(1)	미분계수 개념과 기하 표현의 연결	
	(2)	미분계수의 발생맥락(접선문제)과 미분계수 개념의 연결	
3		미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결	Tall, 1991
4		미분계수의 발생맥락(속도문제)과 미분계수 개념의 연결	
5		미분계수의 응용(속력)과 기하 표현의 연결	
6		미분계수의 응용(증가율)과 미분계수 개념의 연결	
7		미분계수의 응용(증가율)과 기하 표현의 연결	Stewart, 2008
8		미분계수의 응용(선형밀도)과 대수 표현의 연결	Stewart, 2008
9		미분계수의 응용(수학 내에서의 응용)과 기하 표현의 연결	
10		미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결	

2) 미분계수 개념의 이해의 요소들을 두 가지 이상 연결하여 문항을 구성할 수 있으나 본 연구에서는 두 가지 요소를 연결하는 문항들로만 구성하였다는 제한점이 있다.



[그림 Ⅲ-1] 문항의 내용요소

3. 분석방법

각 문항에 대한 학생들의 반응을 분석하여 반응 유형별 빈도수와 백분율을 제시하였다. 또한 학생들의 반응 유형을 문항에서 확인하고자 하는 내용의 연결이 잘 이루어진 것으로 볼 수 있는 경우와 연결이 잘 이루어지지 않은 것으로 볼 수 있는 경우로 분류하여 각각의 빈도수와 백분율을 표로 제시하였다. 표에서 연결이 잘 이루어진 것으로 볼 수 있는 경우는 C로 나타내었고, 연결이 잘 이루어지지 않은 것으로 볼 수 있는 경우는 DC로 나타내었다.

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 미분계수 개념과 대수 표현의 연결 : 문항 1

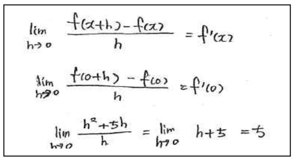
<문항 1> 미분계수의 정의를 이용하여 $y=x^2+5x$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수를 구하시오.

<표 Ⅳ-1> 문항 1에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	미분계수의 정의를 이용한 경우	32	84.2	33	86.8
	미분계수의 정의를 이용하였으나 계산상의 실수가 있는 경우	1	2.6		
DC	미분법의 공식을 이용한 경우	5	13.2	5	13.2

문항 1은 미분계수 개념과 대수 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 평균변화율의 극한값으로서의 미분계수 개념을 알고 있는지 확인하고자 하는 문항이다. 문항 1에 대한 반응은 <표 Ⅳ-1>과 같다. [그림 Ⅳ-1]과 같이 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 구한 학생들은 32명(84.2%)이었고, 1명의 학생은 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 구하였으나 계산상의 실수로 미분계수를 정확하게 구하지는 못하였

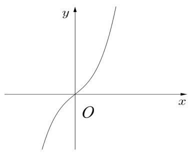
다. 비록 계산상의 실수로 미분계수를 정확하게 구하지는 못하였으나 이 학생의 경우 평균변화율의 극한값을 이용하여 미분계수를 구하려고 한 점에서 평균변화율의 극한값으로서의 미분계수 개념을 알고 있는 것으로 판단할 수 있다. 따라서 33명(86.8%)의 학생들은 미분계수 개념과 대수 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 미분계수의 정의를 이용한 경우

2. 미분계수 개념과 기하 표현의 연결 : 문항 2-(1)

<문항 2> 다음은 <u>미분가능한 함수</u> $y=f(x)$ 의 그래프이다. 물음에 답하시오.

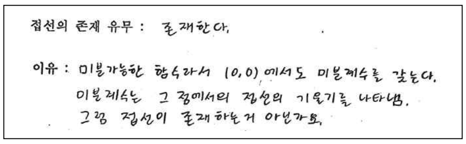


(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선이 존재하는지를 판단하고 그 이유를 설명하시오.

<표 Ⅳ-2> 문항 2-(1)에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)
C	미분계수가 존재해서 접선이 존재한다고 판단한 경우	30	78.9
DC	접선이 존재한다고 하였으나 이유가 적절하지 않은 경우	8	21.1

문항 2-(1)은 미분계수 개념과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 접선의 기울기로서의 미분계수 개념을 알고 있는지 확인하는 문항이다. <표 Ⅳ-2>에서와 같이 모든 학생들이 접선이 존재한다고 판단하였으나 $y=f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재해서 접선이 존재한다고 판단한 학생은 30명(78.9%)이었다([그림 Ⅳ-2]). 이 학생들의 경우 미분계수가 그 점에서의 접선의 기울기와 같다는 사실을 인식하고 접선이 존재한다고 판단한 것으로 미분계수 개념과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.

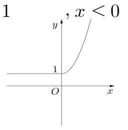
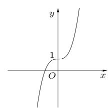
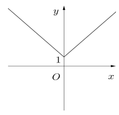


[그림 Ⅳ-2] 미분계수가 존재하여 접선이 존재한다고 판단한 경우

3. 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결 : 문항 3, 10

<문항 3> 다음은 함수식과 그 그래프를 나타낸 것이다. 곡선 위의 점 $(0,1)$에서의 접선이 존재하는지를 각각 판단하고 그 이유를 설명하시오. 접선이 존재한다면 접선을 그리시오.

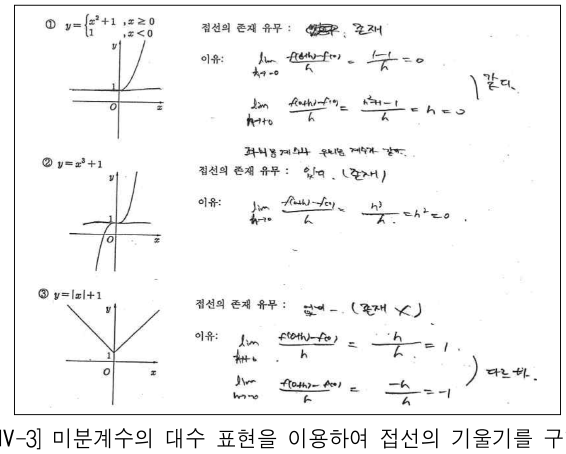
(1) $y=\begin{cases} x^2+1 & ,x \ge 0 \\ 1 & ,x<0 \end{cases}$ (2) $y=x^3+1$ (3) $y=|x|+1$

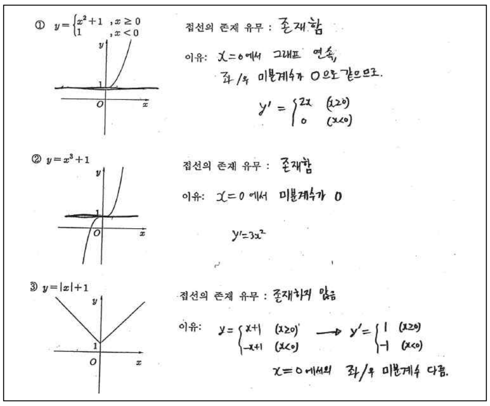
<표 Ⅳ-3> 문항 3에 대한 반응

반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)
미분계수의 대수 표현을 이용하여 접선의 기울기를 구한 경우	5	13.2
도함수의 극한값을 이용하여 접선의 기울기를 구한 경우	14	36.8
대수적 계산 없이 좌·우미분계수를 언급한 후 접선을 그린 경우	7	18.4
오답	12	31.6

문항 3은 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 접선의 기울기를 미분계수의 대수 표현을 이용하여 구할 수 있는지를 확인하고자 하는 문항이다. 문항 3에 대한 반응은 <표 Ⅳ-3>과 같다. [그림 Ⅳ-3]과 같이 미분계수의 대수 표현을 이용하여 접선의 기울기를 구하고 접선을 그린 학생들은 5명(13.2%)이었고, [그림 Ⅳ-4]와 같이 도함수의 극한값을 이용하여 접선의 기울기를 구한 학생들은 14명(36.8%), 대수적 계산 없이 좌미분계수와 우미분계수를 언급한 후 접선을 그린 학생들은 7명(18.4%), 오답인 학생들은 12명(31.6%)이었다.



[그림 Ⅳ-3] 미분계수의 대수 표현을 이용하여 접선의 기울기를 구한 경우

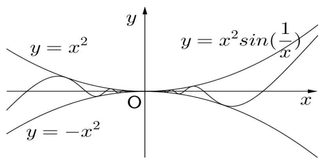


[그림 Ⅳ-4] 도함수의 극한값을 이용하여 접선의 기울기를 구한 경우

미분계수의 대수 표현을 이용하여 접선의 기울기를 구하고 접선을 그린 5명(13.2%)의 학생들의 경우 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다. 그러나 도함수의 극한값을 이용하거나 대수적 계산 없이 접선을 그린 학생들의 경우 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌는지를 판단하기가 어렵다. 도함수의 극한값을 이용하여 접선의 기울기를 구한 학생들의 경우 계산의 편리성으로 인해 미분계수의 대수 표현이 아닌 도함수의 극한값을 이용한 것일 수 있기 때문이다. 고등학교에서 다루어지는 대부분의 함수의 도함수는 연속이 되는데 도함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우에 $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$가 성립한다. 이러한 이유로 학생들은 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 구할 때 미분계수의 대수 표현을 이용하지 않고 도함수의 극한값 즉, $\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$를 이용하여 미분계수를 구하는 경우가 있다. 문항 3-(1), (2)에 주어진 함수들의 경우 도함수가 $x=0$에서 연속이 되므로 미분계수의 대수 표현 대신 도함수의 극한값으로 $x=0$에서의 미분계수를 구할 수 있어 도함수의 극한값을 이용하여 접선을 그린 학생들의 경우 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌는지를 판단하기가 어렵다. 또한 대수적 계산 없이 좌미분계수와 우미분계수를 언급한 후 접선을 그린 학생들의 경우 어떠한 방법으로 미분계수를 구하였는지 알 수 없으므로 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌는지를 판단하기가 어렵다. 이런 학생들의 경우 문항 10의 결과에서 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌는지를 판단할 수 있다.

문항 10은 문항 3과 같이 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항이다. 그러나 문항 3과는 달리 문항 10에서 제시한 함수 $f(x)$의 경우 $f'(x)$가 $x=0$에서 연속이 되지 않으므로 미분계수를 구할 때, 도함수의 극한값으로 계산할 수 없다. 따라서 문항 10의 경우 미분계수의 대수 표현 $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 기하학적으로 고정점 $(a, f(a))$와 동점 $(x, f(x))$사이의 할선의 기울기의 극한임을 이해하고 있는지를 확인할 수 있다. 문항 10에 대한 반응은 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<문항 10> 다음은 민호와 연서 두 사람이 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하는 과정을 설명한 것이다. 두 사람의 설명의 옳고 그름을 판정하고 그 이유를 설명하시오.

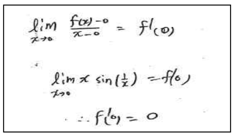


<민호> 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 기울기 $f'(x)$가 $x \to 0$일 때, $-1 \leq f'(x) \leq 1$로 진동하므로 $x=0$에서의 미분계수는 ± 1 사이의 값으로 진동하며 발산한다. 따라서 미분계수는 존재하지 않는다.
<연서> 고정점 $(0,0)$과 임의의 점 $(x, f(x))$ 사이의 기울기가 $x \to 0$일 때, 0으로 수렴하므로 $f'(0)=0$이다.

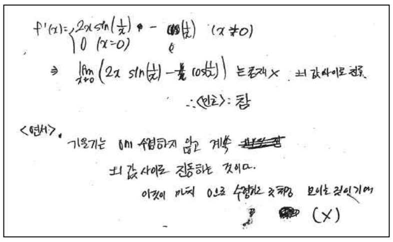
<표 Ⅳ-4> 문항 10에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	미분계수의 대수 표현을 이용하여 설명한 경우	10	26.3	10	26.3
DC	미분계수를 도함수의 극한값으로 설명한 경우	9	23.7	28	73.7
	적절한 설명을 하지 못한 경우	14	36.8		
	무응답	5	13.2		

[그림 Ⅳ-5]와 같이 연서의 설명을 미분계수의 대수 표현을 이용하여 설명한 학생들은 10명(26.3%)으로 이 학생들의 경우 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다. 10명의 학생 중 3명의 학생은 문항 3에서 도함수의 극한값을 이용하여 접선의 기울기를 구하였고, 2명의 학생은 문항 3에서 대수적 계산 없이 좌미분계수와 우미분계수를 언급한 후 접선을 그렸다. 이 학생들의 경우 문항 3에서는 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 판단하기 어려웠으나 문항 10에서의 결과를 통해 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 판단할 수 있다. [그림 Ⅳ-6]과 같이 미분계수를 도함수의 극한값으로 설명한 학생들은 9명(23.7%)으로 문항에서 주어진 함수의 경우 $x=0$에서 도함수가 연속이 아님에도 불구하고 미분계수를 도함수의 극한값으로 생각하는 오류를 보였다.



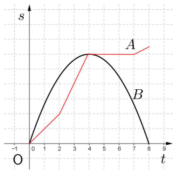
[그림 Ⅳ-5] 미분계수의 대수 표현을 이용하여 설명



[그림 Ⅳ-6] 도함수의 극한값으로 설명

4. 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결 : 문항 5, 7, 9

<문항 5> 다음 그림은 수직선 위를 움직이는 두 동점 A, B의 시각 t에서 위치 $s(t)$의 관계를 나타낸 그래프이다. 다음 보기 중에서 점 A의 속력이 점 B의 속력보다 빠른 구간을 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오.



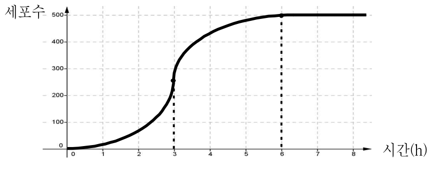
<보 기>
① $(0, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(4, 7)$ ④ $(7, 8)$

<표 Ⅳ-5> 문항 5에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	접선의 기울기의 절댓값을 이용한 경우	12	31.6	20	52.7
	접선의 기울기의 절댓값을 이용하여 풀었으나 착오로 틀린 경우	5	13.2		
	속력을 속도의 개념으로 오해한 경우	3	7.9		
DC	함수식을 구하여 해결한 경우	2	5.2	18	47.3
	구간에서의 평균속력을 이용하여 푼 경우	7	18.4		
	오답	9	23.7		

문항 5는 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 순간변화율의 응용으로서의 속력을 접선의 기울기와 연결시켜 이해하고 있는지를 확인하고자 하는 문항이다. 문항 5에 대한 반응은 <표 Ⅳ-5>와 같다. 각 점에서의 속력은 그 점에서의 접선의 기울기의 절댓값과 같다는 사실을 이용하여 푼 학생들은 12명(31.6%)이었고, 접선의 기울기의 절댓값을 이용하였으나 착오로 A의 속력이 빠른 구간이 아닌 B가 빠른 구간을 구한 학생들은 5명(13.2%)이었다. 또, 속력을 속도의 개념으로 오해하여 각 점에서의 속력은 그 점에서의 접선의 기울기와 같다고 생각하여 푼 학생들은 3명(7.9%)이었다. 착오로 틀린 경우와 속력을 속도의 개념으로 오해한 경우에 해당하는 학생들의 경우 비록 문제 풀이에 실수가 있었으나 속력을 접선의 기울기와 연결하여 생각한 것으로 볼 때 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다. 따라서 20명(52.7%)의 학생들은 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.

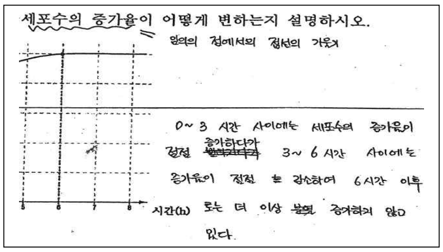
<문항 7> 다음은 실험실 배양에서 시간의 함수로서 이스트 세포수의 그래프를 보여준다. 배양 후 3시간과 6시간을 전후로 세포수의 증가율이 어떻게 변하는지 설명하시오.



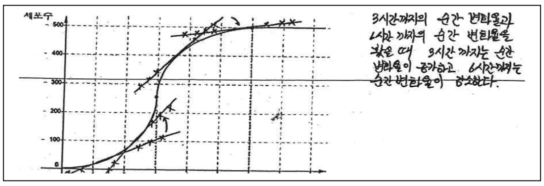
<표 Ⅳ-6> 문항 7에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	접선의 기울기를 이용하여 해석한 경우	19	50	24	63.2
	6시간 이후의 증가율을 일정하다고 해석한 경우	3	7.9		
	6시간 이후의 증가율을 해석하지 않은 경우	2	5.3		
DC	증가율을 함수의 y값의 증감으로 해석한 경우	5	13.2	14	36.8
	오답 또는 무응답	9	23.6		

문항 7은 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 순간변화율의 응용으로서의 증가율을 접선의 기울기와 연결시켜 이해하고 있는지를 확인하고자 하는 문항이다. 문항에 대한 반응은 <표 Ⅳ-6>과 같다. [그림 Ⅳ-7]과 같이 세포수의 증가율은 접선의 기울기와 같다는 사실을 이용하여 해석한 학생들은 19명(50%)이었다. 3명(7.9%)의 학생은 6시간 이후의 증가율을 일정하다고 해석하였는데 이 학생들의 경우 증가율이 0이 된다는 것을 증가율이 일정하다는 표현을 사용한 것으로 보인다. 2명(5.3%)의 학생은 6시간 이후의 증가율을 해석하지 않았는데 [그림 Ⅳ-8]에서 보듯이 증가율이 접선의 기울기와 같다는 사실은 인식한 것으로 볼 수 있다. 따라서 24명(63.2%)의 학생들은 미분계수의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.

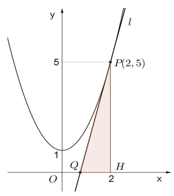


[그림 Ⅳ-7] 접선의 기울기를 이용하여 해석한 경우



[그림 Ⅳ-8] 6시간 이후의 증가율을 해석하지 않은 경우

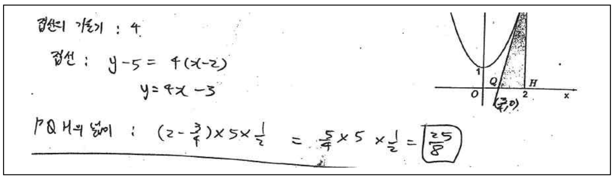
<문항 9> 다음과 같이 주어진 함수 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(2,5)$에서 그은 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\triangle$PQH의 넓이를 두 가지 이상의 방법을 이용하여 구하시오. (단, $f'(2)=4$이다.)



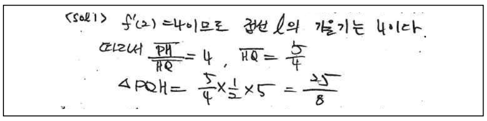
<표 Ⅳ-7> 문항 9에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	접선의 기울기($\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}$)가 4라는 사실을 이용	14	36.8	14	36.8
DC	접선의 기울기($\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}$)가 4라는 사실을 이용하여 구하지 않은 경우	22	58	24	63.2
	오답 또는 무응답	2	5.2		

문항 9는 미분계수의 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 접선의 기울기($\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}$)가 4라는 사실을 이용하여 $\triangle PQH$의 넓이를 구할 수 있는가를 확인하고자 하는 문항이다. 문항에 대한 반응은 <표 Ⅳ-7>과 같다. 문항에서 두 가지 이상의 방법을 이용하여 구하라고 제시한 것은 이러한 문항의 경우 대부분의 학생들이 접선의 방정식을 사용할 것이라는 예상에서였다. 예상과 같이 36명(94.8%)의 학생들이 [그림 Ⅳ-9]와 같이 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결하였다. 36명 중 14명(36.8%)의 학생들은 [그림 Ⅳ-10]과 같이 접선의 기울기($\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}$)가 4라는 사실을 이용하여 $\triangle PQH$의 넓이를 구하였으나 22명(58%)의 학생들은 그렇지 못하였다. 따라서 14명(36.8%)의 학생들은 미분계수의 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있으며 나머지 24명(63.2%)의 학생들은 미분계수의 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어지지 않았다고 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-9] 접선의 방정식을 이용



[그림 Ⅳ-10] 접선의 기울기($\frac{\overline{PH}}{\overline{QH}}$)가 4라는 사실을 이용

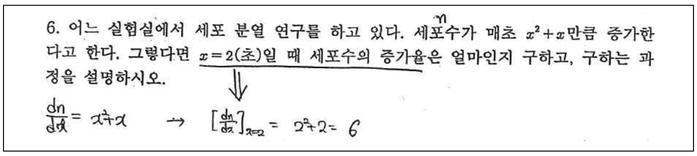
5. 미분계수의 응용과 미분계수 개념의 연결 : 문항 6

<문항 6> 어느 실험실에서 세포 분열 연구를 하고 있다. 세포수가 매초 x^2+x만큼 증가한다고 한다. 그렇다면 $x=2$(초)일 때 세포수의 증가율은 얼마인지 구하고, 구하는 과정을 설명하시오.

<표 Ⅳ-8> 문항 6에 대한 반응

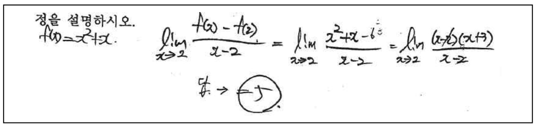
연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	$x=a$에서의 순간변화율이 a^2+a임을 인식하고 푼 경우	6	15.8	6	15.8
DC	x^2+x를 세포수 함수로 인식하고 푼 경우	31	81.6	32	84.2
	무응답	1	2.6		

문항 6은 미분계수 개념과 응용의 연결이 잘 이루어지고 있는지를 확인하는 문항으로 문항에 대한 반응은 <표 Ⅳ-8>과 같다. [그림 Ⅳ-11]과 같이 세포수가 매초 x^2+x만큼 증가한다는 것을 $x=a$에서의 순간변화율 즉, 미분계수가 a^2+a가 되는 것으로 인식하고 푼 학생은 6명(15.8%)으로 이 학생들의 경우 미분계수 개념과 응용의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다. [그림 Ⅳ-12]와 같이 세포수가 매초 x^2+x만큼 증가한다는 것을 세포수 함수로 잘못 인식하여 이를 미분하여 푼 학생들은 31명(81.6%)이었고 무응답인 학생은 1명(2.6%)이었다.


6. 어느 실험실에서 세포 분열 연구를 하고 있다. 세포수가 매초 x^2+x만큼 증가한다고 한다. 그렇다면 $x=2$(초)일 때 세포수의 증가율은 얼마인지 구하고, 구하는 과정을 설명하시오.

$\frac{dn}{dx}=x^2+x \rightarrow \left[\frac{dn}{dx}\right]_{x=2}=2^2+2=6$

[그림 Ⅳ-11] $x=a$에서의 순간변화율이 a^2+a임을 인식하고 푼 경우


정을 설명하시오.

$f(x)=x^2+x.$ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

답 → 5

[그림 Ⅳ-12] x^2+x를 세포수 함수로 인식하고 푼 경우

6. 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결 : 문항 8

<문항 8> 막대나 전깃줄이 균일한 경우에 선형밀도는 일정하며 $\frac{\text{질량}}{\text{단위길이}}$으로 정의된다. 여기서 길이와 질량의 단위는 각각 미터(m)와 킬로그램(kg)이다. 다음 표는 어떤 금속막대가 왼쪽 끝에서 오른쪽 방향으로 x(m) 떨어진 지점까지의 질량 $3x^2$(kg)을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.
(1) $x=1$인 지점부터 $x=5$인 지점까지의 선형밀도를 구하시오.
(2) $x=3$인 지점에서의 선형밀도를 구하고, 구하는 과정을 설명하시오.

거리(m)	질량(kg)
1	3
2	12
3	27
4	48
5	75
6	108
7	147

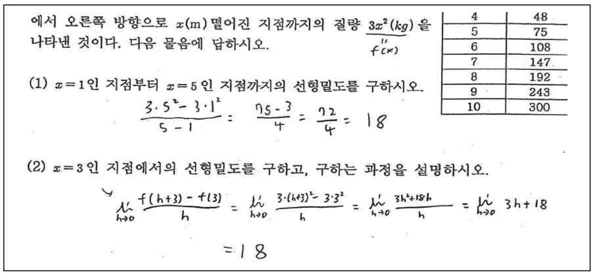
<표 Ⅳ-9> 문항 8-(1)에 대한 반응

반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)
구간에서의 선형밀도를 평균변화율을 이용하여 구한 경우	19	50
오답 또는 무응답	19	50

<표 Ⅳ-10> 문항 8-(2)에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	평균변화율의 극한을 이용하여 구한 경우	11	28.9	20	52.6
	평균변화율의 극한을 이용하여 구하였으나 계산오류로 틀린 경우	2	5.3		
	미분공식을 이용하여 구한 경우 ((1)에서 구간에서의 선형밀도를 평균변화율을 이용하여 구하였음)	7	18.4		
DC	미분공식을 이용하여 구한 경우 ((1)에서 구간에서의 선형밀도를 평균변화율을 이용하여 구하지 못하였음)	1	2.6	18	47.4
	오답 또는 무응답	17	44.8		

문항 8은 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하는 문항으로 순간변화율의 응용으로서의 선형밀도를 평균변화율의 극한과 연결시켜 이해하고 있는지를 확인하고자 하는 문항이다. 문항 8-(1)에서 구간에서의 선형밀도를 평균변화율을 이용하여 구한 학생들은 19명(50%), 오답 또는 무응답을 한 학생들은 19명(50%)이었다(<표 Ⅳ-9>). 문항 8-(2)에서 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있는 학생들은 20명(52.6%)으로 이 중 $x=3$인 지점에서의 선형밀도를 [그림 Ⅳ-13]과 같이 평균변화율의 극한을 이용하여 구한 학생들은 11명(28.9%), 평균변화율의 극한을 이용하여 구하였으나 계산오류로 틀린 학생들은 2명(5.3%), 미분공식을 이용하여 구한 학생들은 7명(18.4%)이었다(<표 Ⅳ-10>). 계산오류로 틀린 학생들의 경우 비록 답은 틀렸으나 평균변화율의 극한을 이용하여 구하려고 하였으므로 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 보았으며, 미분공식을 이용하여 구한 7명의 학생의 경우 비록 미분공식을 이용하여 구하였으나 8-(1)에서 평균변화율을 이용하였으므로 미분계수의 대수 표현을 이용하여 계산할 수 있는 능력을 가지고 있다고 판단하여 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결이 잘 이루어졌다고 보았다.


에서 오른쪽 방향으로 x(m) 떨어진 지점까지의 질량 $3x^2$(kg)을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.

$f(x)$

4	48
5	75
6	108
7	147
8	192
9	243
10	300

(1) $x=1$인 지점부터 $x=5$인 지점까지의 선형밀도를 구하시오.

$$\frac{3\cdot 5^2-3\cdot 1^2}{5-1}=\frac{75-3}{4}=\frac{72}{4}=18$$

(2) $x=3$인 지점에서의 선형밀도를 구하고, 구하는 과정을 설명하시오.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cdot(h+3)^2-3\cdot 3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+18h}{h}=\lim_{h\to 0}3h+18$$

$$=18$$

[그림 Ⅳ-13] 평균변화율의 극한을 이용

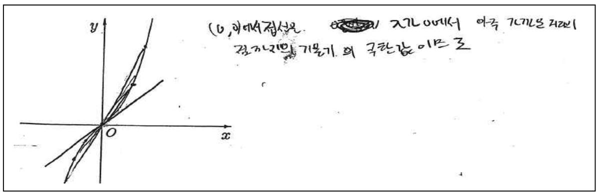
7. 미분계수의 발생맥락과 미분계수 개념의 연결 : 문항2-(2), 4

<문항 2> (2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선이 존재한다면 접선의 개형을 그리고 그 과정을 설명하시오.

<표 Ⅳ-11> 문항 2-(2)에 대한 반응

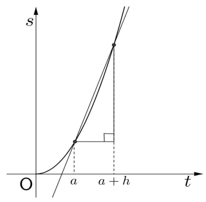
연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	할선의 극한을 이용한 경우	4	10.5	4	10.5
DC	접선의 방정식 $y=f'(0)x$를 이용한 경우	10	26.3	34	89.5
	접선의 기울기를 도함수의 극한값으로 생각한 경우	3	7.9		
	접선의 개형을 그렸으나 과정 설명이 옳지 않거나 부족한 경우	9	23.7		
	접선의 개형을 틀리게 그린 경우	10	26.3		
	무응답	2	5.3		

문항 2-(2)는 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하고자 하는 문항으로 할선의 극한으로서의 접선을 이해하고 있는지를 확인하는 문항이다. 문항 2-(2)에 대한 반응은 <표 Ⅳ-11>과 같다. [그림 Ⅳ-14]와 같이 할선의 극한을 이용하여 접선의 개형을 그린 학생은 4명(10.5%)으로 이 학생들의 경우 할선의 극한으로서의 접선을 이해하고 있으므로 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다. 그러나 할선의 극한으로서의 접선을 설명하지 못한 학생들은 34명(89.5%)으로 대부분의 학생들이 할선의 극한으로서의 접선에 대한 이해가 부족한 것으로 나타났다.



[그림 Ⅳ-14] 할선의 극한을 이용

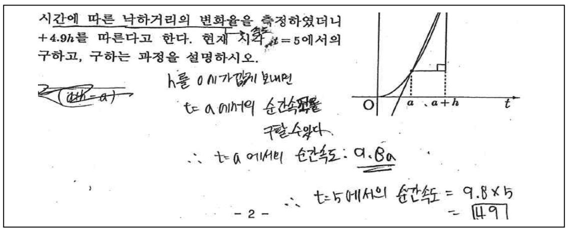
<문항 4> 지연이는 200m 높이의 건물위에서 공을 떨어뜨려 자유낙하 실험을 하고 있다. 공을 떨어뜨린 후 $t=a$일 때, 공의 위치를 측정하고, 그로부터 h초 후 낙하거리를 측정하여 시간에 따른 낙하거리의 변화율을 측정하였더니 약 $9.8a+4.9h$를 따른다고 한다. 현재 시각 $t=5$에서의 속도를 구하고, 구하는 과정을 설명하시오.



<표 Ⅳ-12> 문항 4에 대한 반응

연결 상태	반 응 유 형	인원 (명)	비율 (%)	소계 (명)	비율 (%)
C	시간에 따른 낙하거리의 변화율을 평균속도로 인식하고, 시간의 변화량을 0으로 보냄으로써 순간속도를 구한 경우	20	52.6	20	52.6
DC	시간에 따른 낙하거리의 변화율을 거리함수 혹은 순간속도로 생각한 경우	2	5.3	18	47.4
	거리함수를 유추하여 미분하여 구한 경우	1	2.6		
	오답 또는 무응답	15	39.5		

문항 4는 미분계수의 발생맥락인 속도 문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어지고 있는가를 확인하고자 하는 문항으로 시간에 따른 거리의 변화율의 개념으로부터 평균속도(평균변화율)의 개념을 이해하고 평균속도로부터 순간속도(순간변화율)의 개념을 유추할 수 있는지를 확인하고자 하였다. 문항 4에 대한 반응은 <표 Ⅳ-12>와 같다. [그림 Ⅳ-15]와 같이 시간에 따른 낙하거리의 변화율을 평균속도로 인식하고, 시간의 변화량을 0으로 보냄으로써 순간속도를 구한 학생들은 20명(52.6%)으로 이 학생들의 경우 평균속도의 개념을 이해하고 있으며 평균속도로부터 순간속도(순간변화율)의 개념을 유추하였으므로 미분계수의 발생맥락인 속도 문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어졌다고 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-15] 시간의 변화량을 0으로 보냄으로써 순간속도를 구한 경우

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 고등학교 상위권 학생들이 미분계수 개념을 통합적으로 이해하고 있는지를 알아보는데 목적이 있다. 여기서 미분계수 개념의 통합적 이해란 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 속도문제를 미분계수 개념과 연결하여 이해하고, 미분계수 개념, 미분계수의 대수적·기하적 표현, 미분계수를 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것을 의미한다.

본 연구를 수행하기 위하여 청주시에 소재한 S고등학교 2학년 상위권 학생 38명을 연구대상으로 선정하였다. 검사지는 총 11개의 문항으로 구성되었으며 문항 1과 2-(1)은 미분계수 개념과 대수·기하 표현의 연결을, 문항 2-(2)와 4는 미분계수 개념의 발생맥락과 미분계수 개념의 연결을, 문항 3과 10은 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결을 볼 수 있도록 하였다. 문항 5~9는 미분계수의 응용상황들로 구성되었는데 문항 6은 미분계수 개념과 응용의 연결을, 문항 8은 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결을, 문항 5와 7은 미분계수의 수학 외에서의 응용과 기하 표현의 연결을, 문항 9는 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결을 볼 수 있도록 하였다. 본 연구 결과에 따른 결론은 다음과 같다.

첫째, 미분계수의 개념과 대수 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 86.8%로 높게 나타났다. 이는 고등학교 교육과정에서 미분계수를 평균변화율의 극한값 즉, 미분계수의 대수 표현으로 정의하고 있기 때문인 것으로 해석된다.

둘째, 미분계수의 개념과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 78.9%로 나타났다. 고등학교 교육과정에서는 접선의 기울기를 미분계수의 기하학적 의미로 도입하고 있는데 교과서에서 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다고 기술하고 있어 많은 학생들이 미분계수의 개념과 기하 표현을 잘 연결시키고 있는 것으로 보인다.

셋째, 미분계수의 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 26.3%로 미분계수의 개념과 대수 표현의 연결이나 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 높게 나타난 반면 대수 표현과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 낮게 나타났다. 이는 교육과정에서 미분계수를 평균변화율의 극한

값으로 정의한 후 미분계수의 기하학적 의미로 접선의 기울기를 제시하고 있어 학생들이 둘을 연결하여 이해하지 못한 것으로 해석된다. 또한, 미분계수를 도함수의 극한값으로 잘못 이해한 학생들이 많이 나타났다. 고등학교에서 다루어지는 대부분의 함수의 도함수는 연속이 되는데 도함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우에 $\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$가 성립한다. 이러한 이유로 학생들은 미분계수를 구할 때 미분계수의 대수 표현을 이용하지 않고 도함수의 극한값 즉, $\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$를 이용하여 미분계수를 구하는 경우가 있다. 실제로 미분계수를 대수 표현을 이용하여 구하는 것보다 도함수의 극한값으로 계산하는 것이 편리하여 많은 학생들이 도함수의 극한값으로 미분계수를 구하고 있다. 이렇다 보니 학생들이 미분계수를 도함수의 극한값으로 잘못 이해하여 미분계수의 대수 표현 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 기하학적으로 고정점 $(a,f(a))$와 동점 $(x,f(x))$사이의 할선의 기울기의 극한임을 이해하지 못한 학생들이 많이 나타난 것으로 해석된다.

넷째, 미분계수의 응용으로서의 속력과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 52.7%, 미분계수의 응용으로서의 증가율과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 63.2%, 미분계수의 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 36.8%로 나타났다. 수학 외에서의 응용상황인 속력과 증가율을 기하 표현과 잘 연결한 학생들의 비율은 비슷하게 나타났으나 수학 내에서의 응용과 기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 낮게 나타났다. 수학 내에서의 응용문제를 제시한 문항 9에서 문제를 해결하기 위하여 접선의 방정식을 이용한 학생들의 비율은 94.8%로 나타난 반면 접선의 기울기를 이용한 학생들의 비율은 36.8%로 학생들이 응용문제를 해결할 때 문제를 해결할 수 있는 알고리즘을 적용하는 것에 익숙해져 미분계수의 기하 표현의 의미를 생각하지 못한 것으로 해석된다.

다섯째, 미분계수의 응용과 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 15.8%로 낮게 나타났다. 문항에서 순간변화율을 제시하였으나 이를 순간변화율로 인식하지 못하고 주어진 함수식을 미분하여 문제를 해결하려 한 학생의 비율은 81.6%로 많은 학생들이 문항에 주어진 응용상황에 대한 해석 없이 기계적으로 미분계수를 구한 것으로 보인다. 이는 고등학교 교육과정에서 미분의 응용으로 속도, 가속도에 대한 문제만을 다루고 있어 다양한 응용상황을 경험하지 못한 학생들이 주어진 응용상황을 미분계수 개념과 연결시키지 못한 것으로 해석된다.

여섯째, 미분계수의 응용과 대수 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 52.6%로 나타났다. 이는 학생들에게 익숙하지 않은 응용상황인 선형밀도가 제시되어 대수 표현과 연결이 잘 이루어지지 않은 것으로 보인다.

일곱째, 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 10.5%, 속도문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 52.6%로 나타났다. 접선문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율이 낮게 나타난 것은 고등학교 교육과정에서 미분계수를 평균변화율의 극한값으로 정의한 후 미분계수의 기하학적 의미로 접선의 기울기를 제시하고 있어 학생들이 할선의 극한으로서의 접선의 의미를 이해하지 못하고 한 점에서의 미분계수가 그 점에서의 접선의 기울기와 같다는 사실만을 이해하고 있는 것으로 보인다. 또한 속도문제와 미분계수 개념의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율이 좀 더 높게 나타난 것은 미분의 응용에서 속도문제를 다루고 있기 때문인 것으로 해석된다.

연구결과를 종합해보면 미분계수의 개념과 대수・기하 표현의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 높게 나타났으나 그 외의 연결이 잘 이루어진 학생들의 비율은 거의 절반이거나 절반에 미치지 못하는 것으로 나타났다. 고등학교 상위권 학생들을 연구대상으로 삼았음에도 불구하고 미분계수 개념의 통합적 이해의 관점[3)]에서 보

3) 미분계수 개념을 통합적으로 이해한다는 것은 미분계수의 발생맥락인 접선문제와 속도문제를 미분계수 개념과 연결하여 이해하고, 미분계수 개념, 미분계수의 대수적・기하적 표현, 미분계수를 다루는 응용 상황을 서로 유기적으로 연결하여 이해하는 것으로 연구 문항에서 제시된 연결들이 모두 잘 이루어졌을 때 학생들이 미분계수 개념을 통합적으로 이해했다고 간주한다.

았을 때 학생들의 이해도가 높지 않은 것으로 보인다. 이는 수업에서 대수 표현과 기하 표현의 연결이 이루어지지 못하고 있으며 응용상황을 다룰 때 그 의미를 생각하지 않고 미분계수를 계산하는 것에 초점을 맞추고 있기 때문인 것으로 해석된다.

송정화와 신은주(2006)에 의하면 고등학교 수학 교재 대부분은 변화하는 현상을 실험적으로 다루는 것을 배제하고, 문제를 풀기 위한 알고리즘을 강조하여 왔다고 한다. 미분의 응용에서는 속도, 가속도를 다루는 정도에 그치고 있으며 학생들이 상황과 미분계수의 의미를 연결하지 않고서도 단지 미분계수의 공식만 알고 있으면 충분히 풀 수 있는 문제가 대부분이라고 지적하고 있다.

이처럼 수학교육이 형식적이고 절차적인 지식만을 강조하여 학생들이 미분계수 개념을 통합적으로 이해하고 있지 못한 것으로 보인다. 따라서 학생들의 미분계수 개념에 대한 이해도를 높이기 위해서는 역사적 발생맥락 문제인 접선문제와 속도문제를 비롯하여 현실적인 맥락 문제를 제시하여 변화를 다루는 상황에서 개념의 필요성과 의미를 도출하고 그것을 대수·기하 표현과 연결시켜서 미분계수의 의미를 이해하도록 하는 활동이 필요할 것이다.

본 연구는 통합적 이해의 관점에서 학생들의 이해를 분석하는 것에 그쳤다는 제한점이 있다. 따라서 학생들의 미분계수 개념의 통합적 이해를 도울 수 있는 실천 가능한 지도 방안을 개발하고 지도 방안을 바탕으로 한 교수 실험을 통하여 학생들의 미분계수 개념에 대한 이해에서의 변화가 어떻게 일어나는지를 분석하는 후속 연구가 필요하다고 본다.

참 고 문 헌

강향임 (2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화. 학교수학, 14(4), 409-429.

Kang, H. I. (2012). Students' Reinvention of Derivative Concept through Construction of Tangent Lines in the Context of Mathematical Modeling, *School Mathematics,* 14(4), 409-429.

김승호 (1987). 교육의 과정에 있어서 개념의 위치 -인식의 틀로서의 개념의 성격을 중심으로-. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Kim, S. H. (1987). *Position of the Concept of the Process of Education: Focusing on the Nature of the Concept as a Framework for Recognition,* Master's thesis, Seoul National University.

김혁재 (2000). 고등학교 학생의 미분에 대한 이해와 오개념 및 오류에 관한 연구. 아주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, H. J. (2000). *A Study on the Understanding and Misconception and Error for the Differentiation of High School Students,* Master's thesis, Ajou University.

김현정 (2008). 로그 개념에 대한 이해 실태 분석. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Kim, H. J. (2008). *An Analysis on the Actual State of Understanding the Concept of Logarithm,* Master's thesis, Korea National University of Education.

류희찬·조완영·손홍찬·조정묵·이병만·김용식·임미선·선미향·유익승·한명주·박원균·남선주·정성윤 (2010). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울: ㈜미래엔

Lew, H., C. Cho, W. Y. , Son, H. C., Cho, J. M., Lee, B. M., Kim, Y. S., Lim, M. S., Seon, M. H., Lyou, I. S., Han, M. J., Park, W. G., Nam, S. J. & Jeong, S. Y. (2010). *High School Math II,* Seoul:

Mirae-N.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Park, S. H. (1998). *A Study on the Understanding of the Mathematical limit concept,* Doctoral thesis, Seoul National University.

박희진 (2007). 학생들의 미분개념 오류유형에 대한 교사들의 인식조사. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Park, H. J. (2007). *A Research on the Teachers' Perception of the Errors that Students Make in the Concept of Differentiation,* Master's thesis, Ewha Womans University.

송정화・신은주 (2006). 역사발생적 원리에 따른 미분개념의 도입 방안. 교과교육학연구, 10(2), 595-614.

Song, J. H., Shin, E. J. (2006). A Study on the Teaching of Calculus Based on Historico-Genetic Principle, *Journal of Subject Matter Education Studies,* 10(2), 595-614.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. H. (2007). *Educational Foundation of the School Mathematics,* Seoul: Seoul National University Press.

윤종관 (2003). 고등학교 학생들의 삼각함수에 대한 이해 실태 분석 및 오류 지도에 관한 연구. 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Youn, J. G. (2003). *A Study on the Analysis of High School Students Understanding on Trigonometric Function and Correcting their Errors,* Master's thesis, Kong Ju National University.

이경화・신보미 (2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. 수학교육학연구, 15(1), 39-56.

Lee, K. H., Shin, B. M. (2005). High Achieving Students' Understanding of Continuity of Function, *The Journal of Educational Research in Mathematics,* 15(1), 39-56.

이종희 (1999). 이해에 대한 수학교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Lee, J. H. (1999). *A Study on Understanding in Mathematics Education,* Doctoral thesis, Seoul National University.

이호철 (2005). 미분문제 해결과정에서 발생하는 오류에 관한 연구 -수학Ⅱ 중에서-. 계명대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Lee, H. C. (2005). *Research on the Error that Results during Differential Problem-Solving Process: in Math Ⅱ,* Master's thesis, Keimyung University.

임선정 (2005). 고등학교 학생들의 미분개념 이해와 수학적 사고 스타일 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Lim, S. J. (2005). *A Study of the Understanding of the Concepts of Differentiation and Mathematical Thinking Style of Highschool Students,* Master's thesis, Seoul National University.

정연준 (2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. 학교수학, 12(2), 239-257.

Joung, Y. J. (2010). An Investigation on the Historical Development of the Derivative Concept, *School Mathematics* 12(2), 239-257.

정영옥 (2012). 수학적 지식 구성의 사회적 인식론 고찰 -Steinbring의 인식론적 삼각형을 중심으로-. 과학교육논총, 25(1), 23-53.

Chong, Y. O. (2012). Reflections on the Social Epistemology of Construction of Mathematical Knowledge: Focused on Steinbring's Epistemological Triangle, *The Bulletin of Science Education* 25(1), 23-53.

정인철 (2003). 수학교육에서 이해의 의미와 구조에 대한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(1), 11-18.

Jung, I. C. (2003). Meaning and Structure of Understanding in Mathematics Education, *The Mathematical*

Education 42(1), 11-18.

정현아 (2008). 고등학교 10-나 단계 삼각함수 개념의 이해와 지도에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Jeong, H. A. (2008). *A Study on Understanding and Teaching about Concept of Trigonometric Function on Step 10-Na of High School,* Master's thesis, Ewha Womans University.

조완영 (2012). 예비교사의 미분영역에 관한 내용지식의 분석. 학교수학, 14(2), 233-253.

Cho, W. Y. (2012). Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Content Knowledge about Differential area, *School Mathematics,* 14(2), 233-253.

최나영 (2001). 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구 -함수와 도함수 사이의 그래프 표현을 중심으로-. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Choi, N. Y. (2001). *A Study of Error and Misconception in the Concepts of Calculus: On the Basis of the Graphical Relationship between Function and Derivative,* Master's thesis, Ewha Womans University.

최승현 (2014). 고등학생들의 함수 개념에 대한 이해 분석. 충북대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Choi, S. H. (2014). *Analysis on the Understanding of High School Students About The Concept of Functions,* Master's thesis, Chungbuk National University.

현원동 (2003). 수학교과서에서 나타난 미적분 개념의 접근방식과 학생들의 미적분 개념의 이해. 건국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Hyeon, W. D. (2003). The *Approach of the Concept of Calculus Shown in Mathematics Textbooks and The Understanding of Concept of Calculus*, Master's thesis, Konkuk University.

Ferrini-Mundy, J. and Lauten, D. (1993). Teaching and learning calculus. In P. S. Wilson(Ed.), *Research ideas for the Classroom, High School Mathematics* (pp. 155-176). National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project.

Giambrone, T. M. (1983). *The Philosophy Study of Epistemological nature of the Attainment of Understanding Mathematics*. Ph. D Dissertation. State University of New York at Buffalo.

Haylock, D. W. (1982). Understanding in mathematics: Making connections. *Mathematics Teaching,* 98, 54-56.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction-An epistemological perspective*. NY: Springer.

Stewart, J. (2008). *Calculus*. Albert Complex: Brooks/Cole. 수학교재편찬위원회 역(2009). 미분적분학. 서울: 청문각.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of PME 11, Montreal,* 3, 69-75.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* 류희찬・조완영・김인수 역(2003). 고등수학적 사고. 서울: 경문사.

Zandieh, M. (1998). The Role of a formal definition in nine students' concept image of derivative. In S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Klob, K. norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 136-141). Columbus OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

An Analysis on the Understanding of High School Students about the Concept of a Differential Coefficient Based on Integrated Understanding

Lee, Hyun Ju
kyungdeok middle School, Chongju-si, Chungchongbukdo, 361-802, Korea
E-mail : hyunju0707@hanmail.net

Ryu, Jung Hyeon
Sannam High School, Chongju-si, Chungchongbukdo, 361-160, Korea
E-mail : rjh8805@daum.net

Cho, Wan Young†
Dept. of Mathematics Education, Chungbuk National Univeristy, Chongju-si, Chungchongbukdo, 362-763, Korea
E-mail : wycho@cbu.ac.kr

The purpose of this study is to investigate if top-ranked high school students do integrated understanding about the concept of a differential coefficient. For here, the meaning of integrated understanding about the concept of a differential coefficient is whether students understand tangent and velocity problems, which are occurrence contexts of a differential coefficient, by connecting with the concept of a differential coefficient and organically understand the concept, algebraic and geometrical expression of a differential coefficient and applied situations about a differential coefficient. For this, 38 top-ranked high school students, who are attending S high school, located in Cheongju, were selected as subjects of this analysis. The test was developed with high-school mathⅡ textbooks and various other books and revised and supplemented by practising teachers and experts. It is composed of 11 questions. Question 1 and 2-(1) are about the connection between the concept of a differential coefficient and algebraic and geometrical expression, question 2-(2) and 4 are about the connection between occurrence context of the concept and the concept itself, question 3 and 10 are about the connection between the expression with algebra and geometry. Question 5 to 9 are about applied situations. Question 6 is about the connection between the concept and application of a differential coefficient, question 8 is about the connection between application of a differential coefficient and expression with algebra, question 5 and 7 are about the connection between application of a differential coefficient, used besides math, and expression with geometry and question 9 is about the connection between application of a differential coefficient, used within math, and expression with geometry. The research shows the high rate of students, who organizationally understand the concept of a differential coefficient and algebraic and geometrical expression. However, for other connections, the rates of students are nearly half of it or lower than half.

* ZDM Classification : D34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : integrated understanding, differential coefficient
† Corresponding author