韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.1.91
제 29집 제 1호, 2015. 2. 91-110

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 1, Feb. 2015. 91-110

초등수학 영재교육 대상자의 원주율 개념에 대한 이해

강 향 임 (한국교원대학교 강사)
최 은 아 (영등포여자고등학교)†

본 연구는 초등수학 영재교육 대상자들이 원주율 개념에 대해서 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보고자 하였다. 이를 위해 원주율 계산 방법의 역사 발달 단계를 토대로 세 가지 과제를 개발한 후 6학년 영재교육 대상자 12명을 대상으로 적용하여 그 반응을 분석하였다. 연구결과, 학생들은 '원주율 = 3.14'라는 사고의 고착화로 인하여 원주율의 개념, 근사성, 무한성을 제대로 이해하지 못하였으며, 원주율과 원주율의 근삿값을 혼동하는 오류를 보였다. 또한 학생들은 원주율을 '(원주) ÷ (지름)'의 대수적인 식으로 이해하려는 성향이 강하였으며, 원주율의 상수성과 무한성을 깊이 있게 이해하고 있는 학생은 극히 적었다. 반면에 과제에 대한 토론 활동은 학생들이 원주율의 근사성에 대한 아이디어를 발견할 수 있는 기회를 제공하였다. 이상의 결과를 종합하여, 초등학교에서의 원주율 지도와 관련하여 원주율을 원의 지름을 단위길이로 원의 둘레를 측정하여 얻을 수 있는 값으로 도입할 것과 공학적 도구 등을 이용하여 직관적인 방법을 통해 이해하도록 할 것, 원주율 개념이 가지는 본질적인 의미를 이해할 수 있도록 다양한 상황을 통해 도입할 것을 제안하였다.

Ⅰ. 서론

원주율 π는 수학사 관련 문헌(Boyer, 1968; Cajori, 1905, 1917; Eves, 2005; Needham, 2000; Smith, 1925)에서 빠지지 않고 등장하는 주제이다. 이집트와 바빌로니아, 중국 등의 고대 사회가 3 또는 3.14, $\frac{22}{7}$ 와 같은 원주율의 근삿값을 사용했다는 것은 잘 알려진 사실이다. 이후 원주율의 근삿값을 개선하고자 하는 많은 노력들이 지속되어왔다. 때로는 원주율의 정확도가 한 시대, 한 사회의 수학적 수준을 평가하는 잣대로 여겨지기도 하였다. 이런 측면에서 원주율 π의 역사는 인류의 역사를 비추어 볼 수 있는, 작지만 기묘한 거울이라 비유할 수 있다(Beckmann, 2002).

원주율의 역사가 수학사에서 중요한 이유는 보다 정확한 원주율을 계산하려는 지속적인 수학적 활동이 있었기 때문이기도 하지만, 원주율을 계산하는 과정에서 발생한 원주율 π의 다양한 의미와 용례의 발견이 새로운 수학적 지식의 확장으로 연결되었기 때문이다. 원주율의 수학적 정의는 지름에 대한 원주의 비율이지만, 역사적으로 볼 때, 원주율 π는 원주보다는 원의 넓이와 관련되어 연구되어 왔다. π는 반지름이 1인 원의 넓이이고, 원의 반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이에 대한 원의 넓이의 비율이기도 하다. 또한 π는 입체도형의 겉넓이와 부피 공식, 타원을 비롯한 여러 가지 곡선의 공식 등 기하학 분야에서 나타나는 값일 뿐 아니라, 수론, 통계학, 해석학 등의 수학의 다른 분야에서도 등장하는 중요한 수치이다(Baravalle, 1969).

지금까지 원주율과 관련한 연구는 원주율 π에 관한 수학적 관점, 수학사적 관점과 교수학적 관점, 그리고 이

---

* 접수일(2014년 10월 31일), 심사(수정)일(2015년 1월 15일), 게재 확정일(2015년 1월 29일)
* ZDM 분류 : D33, F73
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 원주율, 원주율의 근삿값, 근사성, 상수성, 무한성
† 교신저자 : silverah90@naver.com

두 관점이 결합된 수학사-교수학적 관점으로 나누어 살펴볼 수 있다. 수학적 관점의 연구들이 π의 근삿값을 구하는 새로운 방법을 제시하거나 황금비와의 관련 등 π의 새로운 용례를 탐색하고 있다면(Seitz, 1986; Singh, 2013; Thomas, Bell & Xiao, 2014, Velasco, Román, Gonzalez & White, 2006), 수학사적 관점의 연구들은 주로 π의 역사를 연대기적으로 기술하고 있다(Schepler, 1950; Scott, 2008). 교수학적 관점의 연구로는 각 교육과정별 교과서의 원주율과 원 넓이 단원을 분석한 강완(2001)의 연구와 초등학교에서 π의 근삿값으로 '3보다 약간 큰' 것으로 이해하게 하고 3.14를 사용할 때는 계산기를 사용할 것을 제안한 강문봉(2001)의 연구를 들 수 있다. 특히 신대윤(2009)은 원주율을 3으로 학습한 초등학생 집단이 그렇지 않은 집단에 비해 원과 원기둥 단원의 학업 성취도에서 통계적으로 유의미한 차이가 있음을 보여주었다. 국외에서는 주로 그래픽 계산기나 컴퓨터 프로그래밍을 사용하는 통계적 실험을 통해 π의 근삿값을 찾아가는 과정을 보여주는 연구들이 수행되었다(Burke & Taggart, 2002; Ebert, 2006, Linn & Neal, 2006). 수학사-교수학적 관점의 연구로는, 아르키메데스의 방법을 공학적 도구와 결부시켜 학생들로 하여금 π의 근삿값을 탐색하도록 한 Corris(1990), Santucci(2011)의 연구와 원주율과 관련된 수학사를 활용하여 학생들의 학습동기를 유발할 것을 주장한 Ofir(1991)의 연구를 찾아볼 수 있다.

그런데 원주율에 관한 수학적 관점과 수학사적 관점은 원주율 개념의 다양한 의미를 기술하고 있지만, 교육적 활용 방법을 언급하지 않았다. 교수학적 관점은 원주율의 근삿값을 '3'이나 '3보다 약간 큰' 것으로 다루는 것이 계산하기에 편리하다고 주장하거나 학생들이 원주율의 근삿값을 찾아가는 과정을 보여주었을 뿐, 학생들이 원주율 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 설명하지 않는다. 수학사-교수학적 관점에서도 수학사를 활용하는 방법을 언급하였을 뿐, 학생들의 원주율에 대한 이해를 분석하지는 않았다. 이와 같이 원주율에 관한 기존 연구에서 원주율의 다양한 의미에 대한 학생들의 이해 상태를 살펴본 연구는 찾아보기 힘들다.

현재 학교수학에서의 원주율은 초등학교 6학년에서 구체물에 대한 측정활동을 통해 '지름에 대한 원주의 비율'로 도입되고 있지만, 바로 약속하기를 통해 3.14라는 근삿값을 사용하도록 지도된다. 이 과정에서 교사는 무리수로서 '3.1415926535⋯'를 언급해야하며, 이어지는 원의 넓이 단원에서는 '무한소'의 부채꼴 모양으로 원을 재구성하여 실무한으로서의 '직사각형'을 언급해야 한다. 이것은 원주율이 갖는 본질적인 의미를 이해시키기 위한 방법일 수 있겠으나, 중학교 3학년에서 도입되는 무리수와 고등학교 2학년에서 함수의 극한을 학습한 이후에 이해할 수 있는 실무한을 언급하는 것은 초등학생들에게 다소 무리한 도입으로 판단된다. 또한 학생들에게 '원주율 = 3.14'라는 도식을 심어주는 것은 원주율과 원주율의 근삿값을 구분하지 못하는 등의 문제점을 야기한다. 이와 관련하여 Burke & Taggart(2002)는 대부분의 학생들이 무리수의 근삿값에 대해 깊은 사고를 하지 않으며, 무리수와 무리수의 근삿값의 차이를 구별하지 못함을 지적한바 있다. 이는 현재의 전개방식으로 학습한 초등학생들의 원주율 개념에 대한 이해 정도를 분석한 연구가 더욱 필요한 이유이다.

본 연구의 목적은 초등학생들이 원주율 개념에 대해서 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보는 것이다. 이는 초등학교에서의 원주율 지도 방안을 위한 시사점을 제공할 것이다. 본 연구에서는 원주율과 관련된 수학사 소재의 과제를 개발하고 초등수학 영재교육 대상자 12명을 대상으로 원주율에 대한 이해를 분석하였다. 과제개발과 분석틀 설정의 이론적 토대를 위해 원주율 개념의 여러 가지 의미와 원주율 계산의 역사적 발달 단계에 대한 수학사 문헌과 관련 연구들을 다음과 같이 살펴보았다.

Ⅱ. 이론적 배경

원주율 π의 역사를 기술하고 있는 Baravalle(1969), Beckmann(2002), Boyer(1968), Cajori(1905, 1917), Eves(2005), Smith(1925)의 수학사 문헌과 원주율의 의미가 언급된 Burke & Taggart(2002), Corris(1990), Linn

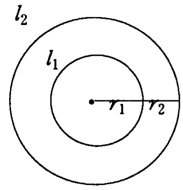
& Neal(2006), Schepler(1950), Scott(2008), 최영기, 홍갑주(2008)의 연구들을 요약하여 원주율의 의미와 원주율 계산방법을 다음과 같이 정리하였다.

1. 원주율 개념의 다의성

원주율 π의 의미는 다음과 같이 4가지로 요약될 수 있다.

첫째, 원주율은 측도이다. 원의 지름의 길이에 대한 원주의 비율로 정의되는 원주율은 비(ratio)의 개념을 기본으로 원주와 지름이라는 두 양 사이의 관계로부터 얻어지는 값이다. 실제로, 원주율은 지름의 길이를 단위로 하여 원주가 지름의 몇 배인지를 측정하여 얻을 수 있다.

둘째, 원주율은 상수이다. 우리는 이 상수를 π로 약속한다. 원주율이 지름에 대한 원주의 비로 정의된다는 것은 이 비가 항상 일정하다는 것을 전제로 한다. 두 동심원의 닮음의 중심이 원의 중심이고, 대응하는 두 선분이 각각 반지름에 해당하므로 대응하는 변의 길이가 항상 일정하다(구광조, 라병소, 1997). 즉 닮은 도형인 두 원의 둘레와 지름의 비인 $\frac{l_1}{r_1}, \frac{l_2}{r_2}$ 는 항상 일정하며, 이 비를 원주율이라고 정의할 수 있다([그림 Ⅱ-1] 참조). 역사적으로 원주율의 상수성은 아르키메데스에 의해 밝혀진 것이다(Linn & Neal, 2006). 그는 원의 넓이와 지름을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 비가 상수(k)라는 사실로부터 원의 지름에 대한 원주의 비가 상수($4k$)임을 밝혀냈다.



[그림Ⅱ-1] 동심원

$$k = \frac{area(O)}{d^2} = \frac{r \cdot \frac{C}{2}}{d^2} = \frac{d \cdot \frac{C}{4}}{d^2} = \frac{C}{4d}$$

아르키메데스는 상수 k대신 원주율을 의미하는 상수 $4k$의 근삿값을 발견하였고, 이 때 사용된 방법이 바로 원의 내접다각형과 외접다각형의 둘레를 이용한 아르키메데스 알고리즘이다(Linn & Neal, 2006).

셋째, 원주율 π는 무리수이다. 즉 순환하지 않는 무한소수이다. 1767년 Lambert는 π가 무리수임을 최초로 증명하였다. 먼저 그는 몇몇 연분수들을 조사하여 'x가 0이 아닌 유리수이면 $\tan x$는 유리수가 아니다'라는 정리를 이끌어냈다. 이 명제의 대우인 '$\tan x$가 유리수이면, x는 무리수이거나 0이다'를 적용하면, $\tan\frac{\pi}{4}$가 유리수 1인 $\frac{\pi}{4}$는 무리수이므로, 결국 π가 무리수라는 것이 증명된다. 현재 6학년 1학기 수학 교과서에서는 '원주율은 3.1415926535…와 같이 끝없는 소수로 나타낸다고 합니다'로 원주율을 도입하고 있다(교육과학기술부, 2011, p. 72).

넷째, 원주율 π는 초월수(transcendental)이다. 즉 유리수 계수의 다항방정식의 근이 될 수 있는 대수적 수(algebraic number)가 아니다. 1882년 Lindemann은 Hermite 정리를 확장한 '$a, b, c, \cdots$와 $r, s, t, \cdots$가 대수적 수일 때, $ae^r + be^s + ce^t + \cdots + ne^z = 0$은 성립하지 않는다'와 Euler의 정리 '$e^{i\pi} + 1 = 0$'으로부터 π가 초월수임을 증명하였다. 원주율 π가 초월수라는 것은 학교수학과 거리가 있는 내용이나 고등수학에서는 원주율의 정밀한 계산보다도 오히려 더 중요한 의미로 해석되고 있다. π가 초월수라는 것은 $\sqrt{\pi}$ 또한 대수적 수가 아니므로, 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\pi}$인 선분의 작도가 불가능함을 의미한다. 오랜 시간동안 연구되어왔던 '주어진 원의 넓이와 같은 정사각형의 작도' 가 불가능함을 대수적으로 증명한 것이다(Smith, 1925).

2. 원주율 계산방법의 역사적 발달

원주율 계산의 역사에서 나타나는 다양한 계산방법을 다음과 같이 4가지 역사적 발달단계로 나누어 살펴보았다.

가. 경험적 추측 단계

Beckmann(2002)을 비롯한 많은 학자들은 고대 이집트, 바빌로니아, 인도, 중국 등에서 사용한 원주율의 근삿값이 많은 실험을 거친 경험으로부터 추측되었을 것이라고 주장한다. 아주 오래된 기하 문제 중의 하나는 원의 넓이와 같은 정사각형을 찾는 문제였다. 이집트의 린드 파피루스에는 지름이 9인 원과 한 변의 길이가 8인 정사각형의 넓이가 같다는 전제를 찾아볼 수 있다. 이는 이집트인들이 $\pi(\frac{9}{2})^2 = 8^2$로부터 3.16049라는 π의 근삿값을 유도하였음을 말해준다. 바빌로니아의 점토판에는 정육각형과 외접원의 둘레의 비의 값이 기록되어 있다. 이로부터 그들이 $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8} \fallingdotseq 3.125$라는 원주율의 근삿값을 사용했음을 알 수 있다. 이외에도 성경과 중국 산학서 《구장산술》은 좀 더 간단한 근삿값인 3을 사용하고 있다.

그러나 이 단계에서 원주율의 근삿값을 사용했다는 사실이 고대인들이 오늘날과 같은 원주율의 개념, 즉 지름에 대한 원주의 비가 일정하다는 사실을 인식하고 있었음을 의미하지는 않는다. 이미 살펴본 바와 같이, 원주율의 상수성은 이후의 아르키메데스에 의해 밝혀진 것으로, 이들은 단지 원의 넓이를 측정하는 상황을 해결하기 위해 원의 넓이에 근사하는 정사각형의 넓이, 원의 둘레에 근사하는 외접 다각형의 둘레를 찾는 과정에서 원주율을 경험적으로 추측한 수준이었던 것이다.

나. 기하적 근사 단계

Eves(1964)에 따르면, 아르키메데스는 π를 과학적으로 계산한 최초의 인물이다. 아르키메데스는 지름이 1인 원에 내접하는 외접육각형과 내접육각형에서 출발하여 변의 수를 두 배로 늘려가는 방식으로 정96각형에 이르렀으며, 이로부터 원의 둘레의 상한과 하한을 얻을 수 있었다. 그는 P_n과 p_n을 각각 외접n각형과 내접n각형의 둘레의 길이라 하고, 수열 $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \cdots$를 생각하여, 셋째 항부터 앞의 두 항의 조화평균($P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n}$)과 기하평균($p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$)을 번갈아 놓는 방식을 취하였다(Boyer, 1968). 이로부터 원주율 π가 $\frac{223}{71}$과 $\frac{22}{7}$사이에 있음을 유도하였으며, 그가 찾아낸 원주율의 근삿값은 3.141635였다. B.C. 240년경의 아르키메데스로부터 시작된 이 방법은 17세기 초 독일의 Ludolph가 2^{62}각형을 이용하여 소수 35자리까지의 원주율의 근삿값을 구할 때까지 이어졌다. Eves(1964)와 Baravalle(1969)가 '고전적 방법'이라고 부르고 있는 아르키메데스 방법은 가장 많은 사람에 의해, 가장 오랜 시간동안 원주율을 계산하는 방법으로 이용되었다.

한 가지 흥미로운 사실은 유럽이 아닌 다른 문화권에서도 아르키메데스와 유사하거나 동일한 방법이 사용되었다는 점이다. 263년경 중국의 유휘는 할원술을 사용하여 내접6각형에서 내접192각형에 이르러 휘율 $\frac{157}{50} = 3.14$를 산출하였으며, 3072각형으로부터 3.14159라는 보다 정확한 근삿값을 산출하기도 하였다. 5세기

의 조충지도 아르키메데스와 동일한 방법 사용하여 약률 $\frac{22}{7}$와 밀률 $\frac{355}{113} \fallingdotseq 3.141592$을 산출하였다(Boyer, 1968, Needham, 2000).

이 단계에서 중요한 것은 원에 내접하는 다각형과 외접하는 다각형의 변의 개수를 증가시킴으로써 원하는 만큼의 정확도를 가진 원주율의 값을 구할 수 있다는 아이디어이다. 특정한 근삿값을 얻는데 그치지 않고, 재귀적 알고리즘을 통해 원하는 만큼 얼마든지 정밀한 값을 산출할 수 있다는 원주율의 근사성을 인식하였다는 것이 중요한 발견이다. 최영기, 홍갑주(2008)는 바로 이 점이 아르키메데스 방법과 다른 방법과의 질적인 차이라고 말하고 있다.

그런데 원주율의 역사에서 한 가지 주목할 사실은 '원주율의 근삿값이 좀 더 정밀하다는 것이 더 유용하다는 것을 의미하지는 않는다'는 것이다(Burke & Taggart, 2002). 예를 들어, Ptolemy가 더 작은 분모를 가지면서도 좀 더 좋은 근삿값인 기존의 $\frac{355}{113}$를 사용하지 않고, $\frac{377}{120}$을 사용한 것은 이 값이 60진법으로 나타내기 쉬웠기 때문이었다. 십진법을 사용한 많은 문명권에서 $\frac{22}{7}$ 대신 $\frac{157}{50}\ (=3.14)$를 사용한 것 역시 같은 이유 때문이라도 추측할 수 있다.

다. 대수적 접근 단계

원주율 계산방법에 있어서 새로운 관점이 대두된 것은 아르키메데스 이후 약 이천년이 지나서야 가능했다(Baravalle, 1969). 1592년 Viète는 반지름이 1인 정다각형의 넓이의 역수와 원 넓이의 역수의 관계로부터 무한곱으로 표현되는 Viète 공식 $\pi = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdots}$ 을 발견했다. 이는 π에 대한 최초의 해석적 식으로(Boyer, 1968), 원주율 계산의 역사에서 대수적 접근이 시작된 계기가 되었다. 이후에 π의 근삿값을 무한 곱의 식이나 무한 연분수, 무한 급수로 나타낸 해석적 표현이 다수 등장하였다. 1658년 Brouncker는 연수분를 이용하여 π를 $4 \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}}$ 로 표현하였으며, 1650년 Wallis는 무한 곱의 식 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \cdots$ 를 발견하였다. Leibniz는 Gregory의 $\arctan x$ 전개식에 $x=1$을 대입하여 π에 대한 최초의 무한 급수 $\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)$를 얻었으며, Newton은 $\arcsin x$의 전개식에 $x=\frac{1}{2}$ 을 대입하여 Gregory-Leibniz 급수보다 훨씬 빠르게 수렴하는 급수 $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots$를 얻었다. 1717년의 Sharp와 1706년의 Machin은 수렴속도가 빠른 새로운 급수를 이용하여 각각 소수 72자리, 100자리까지 계산에 성공하였다. 이후에도 무한급수와 연분수 표현을 이용한 π 값의 계산은 계속되어, 소수 800자리에 이르는 근삿값을 얻는데 성공

하였다. 이 시기의 주된 연구방향은 수렴속도가 빠르면서 계산이 용이한 무한급수를 찾는 일이었다(정동권, 1998).

그러나 Cajori(1905)는 이러한 방식으로 구한 π의 긴 소수 자리수는 이론적으로나 실용적 차원에서 가치가 없다고 일침한다. 그에 의하면, π의 정밀한 근삿값보다 더 중요한 수학적 발견은 π가 유리수가 아니라는 Lambert의 증명과 π가 대수적인 수가 아니라는 Lindemann의 증명이다. 원주율을 뜻하는 기호 'π'를 사용하게 된 것도 이 시기의 중요한 사건이다. 1647년 Oughtred가 지름에 대한 원주의 비를 $\frac{\delta}{\pi}$로 나타낸 것을 시작으로 하여, 1706년 Jones가 처음으로 지름에 대한 원주의 비를 π로 나타내었고, 1737년 Euler가 그의 저서에서 이 기호를 사용하였다. Euler가 π 기호를 채택한 이래로, π는 원주율을 뜻하는 공식적인 기호가 되었다. 모든 원에서 원주율이 일정함을 밝힌 것은 아르키메데스였지만, 그 상수를 π로 표현한 것은 그가 아니었던 것이다. 아르키메데스 시대에 π는 '80'을 나타내는 그리스 문자였다.

라. 확률적 방법과 컴퓨터를 이용한 계산 단계

Buffon의 바늘문제, 즉 '일정한 간격의 평행선이 무수히 많이 그어져 있는 바닥에 임의로 바늘을 던졌을 때 바늘이 평행선에 닿을 확률은 얼마인가?' 로부터 원주율에 대한 확률적 접근 방법이 시도되었다. 바늘의 길이를 l, 평행선 사이의 거리를 d라고 할 때, $P=\frac{2l}{\pi d}$로 계산되었으며, $l=\frac{1}{2}d$ 인 경우에 확률 $P=\frac{1}{\pi}$을 얻을 수 있었다. 이후 Laplace는 Buffon의 식으로부터 $\pi=\frac{2l}{dP}$ 를 유도하여, 전혀 새로운 방법으로 π를 계산하였다(Beckmann, 2002). 즉 이 식에 주어진 l과 d, 충분히 많은 횟수만큼 바늘을 종이위에 던져 바늘이 선분위에 놓이는 횟수를 기록하여 구한 확률 P를 대입하여 π를 계산하였다.

이와 같은 방법은 서로 독립된 사건을 여러 번 시행하여 그 결과를 실험적으로 관찰하여 수치를 구하는 것이다. 현대에 들어와 컴퓨터가 등장함에 따라 시뮬레이션이 가능해졌으며, '몬테카를로 법'으로 알려진 이 방법은 더 큰 위력을 발휘하였다(Beckmann, 2002). 컴퓨터의 등장은 원주율 계산에 있어서 프로그래밍에 의한 계산 단계를 열었다. 1949년 ENIAC 컴퓨터가 70시간에 걸쳐 소수 2035자리까지를 계산한 것을 시작으로 1999년에는 일본의 가네다 야스마사가 소수 2061억5843만 자리까지 계산하였으며, 지금도 컴퓨터를 이용한 원주율 계산은 계속되고 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 과제 개발

원주율 개념에 대한 영재교육 대상자들의 이해 상태를 조사하기 위해 수학사의 소재를 활용하여 과제를 개발하였다. 원주율 계산 방법의 역사적 발달 단계 중에서 무한 곱이나 무한급수의 형태로 표현하는 대수적 접근 단계를 제외하고 초등수학 수준에서 접근 가능한 경험적 추측 단계와 기하적 근사 단계에 초점을 두어 과제를 개발하였다. 경험적 추측 단계에 기초한 과제는 이집트인의 방법을, 기하적 근사 단계에 기초한 과제는 아르키메데스의 방법을 활용하였다. 추가로 확률적 접근은 초등수학 교육과정을 벗어나는 내용이지만, 비례식 등 초등영재 학생이 접근 가능한 전략이 존재할 수 있다고 판단하여 과제로 개발하기로 하였다. 대신 학생들이 접근 가능하도록 몬테카를로 방법을 '다트던지기'로 초등화하여 개발하였다. 각 과제에는 다섯 개의 하위문항을 두어 학생들

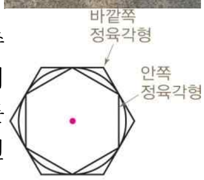
의 생각을 구체적으로 드러나도록 하였다. 하위문항은 (1) 원주율의 의미를 이해하는지, (2) 원주율의 근사성을 이해하고 있는지, (3) 원주율의 상수성을 이해하고 있는지, (4) 원주율의 무한성을 이해하고 있는지, (5) 원주율과 원주율의 근삿값을 구별할 수 있는지를 확인하는 문항으로 개발하였다([그림 Ⅲ-1] 참조). 과제는 초등학생 3명을 대상으로 한 예비실험을 통해 질문의 의도가 좀 더 명확하게 드러나도록 수정되었다([그림 Ⅲ-2] 참조).

(1) 원주율의 의미가 무엇인지 써 보시오.
(2) 과제에서 구한 원주율이 정확한지 판단하고 만약 정확하지 않다면 정확히 구하는 방안을 써 보시요.
(과제1: 이집트인 방법, 과제2: 아르키메데스 방법, 과제3: 몬테카를로 방법)
(3) 크기가 다른 두 원의 원주율 비교하고 그 이유를 써 보시오.
(과제1: 모래밭에 그린 크기가 다른 원, 과제2: 반지름의 길이가 다른 두 원, 과제3: 지름의 길이가 다른 두 원)
(4) '(원주) ÷ (지름)'은 다음 중 어떻게 계산됩니까?
① 나누어 떨어진다 ② 나누어 떨어지지 않는다 ③ 나누어 떨어질 때도 있고, 나누어 떨어지지 않을 때도 있다.
(5) 다음 원주율에 대한 설명 중 여러분의 생각과 일치하는 것은 무엇입니까?
① 3.14로 모든 원에서 항상 같다
② 약 3.14로 정확히 구할 수는 없지만 정해진 수로, 모든 원에서 항상 같다
③ 약 3.14일 뿐, 정확히 구할 수 없기 때문에 모든 원에서 항상 같은 것은 아니다

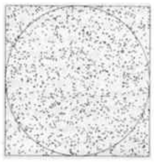
[그림 Ⅲ-1] 과제별 하위문항(지면 관계상 여백편집)

[과제1] 고대 이집트인들은 나일강변의 모래밭에 말뚝과 밧줄로 원을 그린 다음, 길이를 잴 수 있는 자가 없는 상태에서 말뚝과 밧줄만을 이용하여 원주율을 구했을 것이라고 짐작하고 있습니다. 만약 여러분이 고대 이집트인이라면, 어떻게 원주율을 구할 것인지 구체적인 방법을 써 보시오.

[과제2] B.C. 240년 경 그리스의 아르키메데스는 반지름이 1인 원의 안쪽과 바깥쪽에 꼭 들어맞는 정육각형을 그렸습니다. 그리고는 정다각형의 변의 개수를 계속해서 늘려가서 안쪽, 바깥쪽 정96각형을 얻었고, 이 두 도형의 둘레와 원의 둘레와 비교를 통해 원주율의 범위를 구했다고 합니다. 만약 여러분이 아르키메데스라면, 어떻게 원주율을 계산할 것인지 구체적인 방법을 써 보시오.



[과제3] 정사각형 모양의 다트판에 정사각형 안쪽에 꼭 들어맞는 원이 그려져 있습니다. 이 다트판에 다트를 던지면 다트자국이 점으로 남아 셀 수 있습니다. 수학자들은 이 상황에서 정사각형의 넓이와 원의 넓이를 이용하여 원주율을 구했다고 합니다. 다트던지기를 1000번 하니 원 안에는 784개의 점이 있었다고 할 때, 다트 던지기 상황에서 원주가 아닌 원의 넓이를 이용하여 원주율을 구할 수 있는 방법을 써 보시오.



[그림 Ⅲ-2] 과제(지면 관계상 여백편집)

2. 연구 대상 및 자료 수집

본 연구에 참여한 학생들은 지방 소재의 J교육대학교 부설 영재교육원의 수학 분야 심화과정에 속한 6학년 학생 12명이다. 이들은 5학년을 대상으로 하는 기초과정 104시간을 이수하고 심화과정으로 진급한 학생들로 1학

기 출석수업 48시간을 받았으며, 연구 당시 3일간의 여름방학 집중교육에 참가 중이었다. 본 연구의 공동연구자 중 1인은 2013년부터 올해까지 이 영재교육원의 집중교육 담임강사로 참여하고 있는 중이었다. 본 연구자뿐 아니라 수년간 이 영재교육원에서 학생들을 지도한 경험이 있는 지도강사들은 이 영재교육원 학생들의 사고력 수준이 또래 학령보다 우수한 것은 사실이나 영재아라고 분류할 정도의 차별화된 수학적 능력을 보이지 않는다는 공통적인 의견을 보였다. 일부 강사는 영재학생보다는 영재교육 대상자, 성적 우수자라는 표현이 적절하다고 평가하고 있었다. 학생들은 이미 6학년 1학기에 학교 수업에서 원주율에 관한 기본적인 내용을 학습한 상태였으나, 영재교육원으로부터 원주율에 관한 심화된 수업을 받은 경험이 전혀 없는 상태였다. 따라서 수학사 소재를 활용한 과제를 탐구하는 과정 속에서 평소 학생들이 가지고 있는 원주율에 대한 수학적 이해가 드러날 수 있을 것이라고 보았다.

본 수업의 주제는 '원주율에 대해서 다시 생각해보기'였다. 먼저 12명의 학생들에게 세 가지의 과제를 차례로 제시하고 해결하게 한 후, 각 과제에 딸린 하위문항에 답하도록 하였다. [그림 Ⅲ-1]의 하위문항 중 선다형인 4)와 5)는 모든 과제를 완성하고 난 후에 한 번만 선택하도록 하여 반복되는 질문을 최소화하였다. 과제의 토론 활동의 전 과정을 녹음하였고, 녹음자료는 학생들의 과제활동지와 함께 수집하였다. 수집한 자료는 분석기준을 바탕으로 연구자 간의 지속적인 논의를 통해 회고적으로 분석되었다. 본 연구에서는 실명을 사용하지 않고 교사는 T2로, 학생 12명은 S1에서 S12까지 표기하고 발췌문에서 여러 학생들이 동시에 대답한 경우는 SS로 표기한다.

3. 분석기준

학생들의 과제에 대한 반응은 다음 세 가지 관점에 중점을 두어 분석한다.

(1) 경험적 추측: 지름을 단위길이로 원주를 측정하여 원주율을 구한다.

(2) 기하적 근사: 원주가 내·외접하는 정다각형의 사이에 있음을 이용하여 원주율을 구한다.

(3) 확률적 계산: 전체-부분의 비율을 이용한 비례식으로 원주율을 구한다.

위의 세 가지 관점을 포함할 때, 각각 경험적 추측 가능, 기하적 근사 가능, 확률적 계산 가능하다고 한다.

또한 각 하위문항에 대한 반응은 다음과 같은 기준에 근거하여 분석한다.

(1) 원주율이 원의 지름의 길이에 대한 원주의 비율임을 안다.

(2) 세 가지의 과제에서 자신이 구한 원주율이 모두 정확한 값이 아니며, 원하는 만큼 정확한 원주율을 구하기 위해 단위길이를 분할하고, 변의 개수를 늘리고, 다트를 더 많이 던진다와 같은 아이디어를 제시한다.

(3) 크기가 다른 두 원의 원주율은 같다는 것을 알고 타당한 근거를 제시하여 설명할 수 있다.

(4) ② '(원주)÷(지름)의 결과는 나누어 떨어지지 않는다' 를 선택한다.

(5) ② '원주율은 약 3.14로 정확히 구할 수는 없지만 정해진 수로, 모든 원에서 항상 같다'를 선택한다.

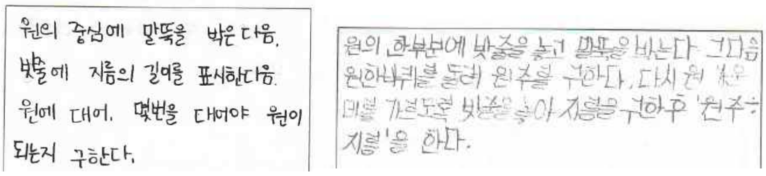
위의 반응에 대하여 각각 원주율의 개념, 근사성, 상수성, 무한성을 이해한다고 하고, 원주율의 근삿값과 원주율을 구별할 수 있다고 한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 과제에 대한 반응

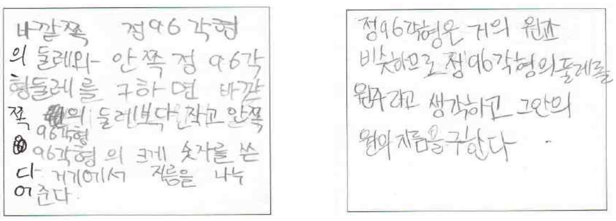
[과제1]에서, 원의 둘레에 해당하는 밧줄의 길이에 지름에 해당하는 밧줄의 길이를 대보아 약 몇 배 정도가

되는지를 알아본다고 답한 S3을 제외하고, 모든 학생들은 밧줄로 원주와 지름을 잰 후, '원주 ÷ 지름'을 한다고 답했다([그림 Ⅳ-1] 참조)). S3는 원주율을 구하기 위해 지름을 단위길이로 사용하고 있다고 판단할 수 있지만 나머지 학생들은 나누기를 한다고 답했기 때문에 측정이 아닌 계산식을 고려하고 있음을 알 수 있다. 따라서 경험적 추측 가능한 학생은 S3뿐이라 할 수 있다.



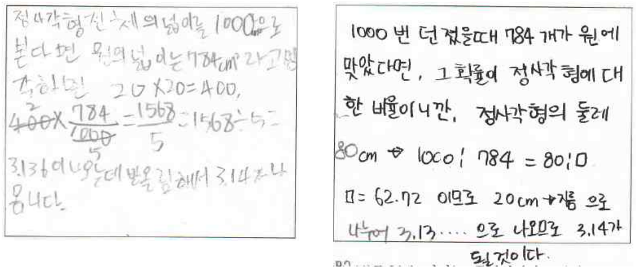
[그림 Ⅳ-1] 경험적 접근으로 원주율을 구하는 방법(S3, S8 사례)

[과제2]에서, 4명의 학생(S1, S4, S5, S6)이 원주가 바깥쪽 정96각형의 둘레의 길이와 안쪽 정96각형의 둘레의 길이 사이에 원주의 길이가 있다고 설명하였다([그림 Ⅳ-2] 왼쪽 참조). 이들은 비록 원의 둘레와 원주율의 범위를 부등식과 같은 형식화된 수학적 표현으로 제시하지는 않았지만, 외접·내접 정96각형을 모두 고려하여 원의 둘레를 추론하였다. 특히 S6은 내접다각형과 외접다각형 둘레의 평균이 원주와 같다고 설명했다. 또 다른 6명의 학생(S2, S7, S8, S10, S11, S12)은 96각형의 둘레의 길이는 원주의 길이와 같거나 유사하다고 답했다([그림 Ⅳ-2] 오른쪽 참조). 그 외에 2명(S3, S9)의 학생은 정6각형의 내접원과 외접원 사이에 원주가 있다는 반응을 보였다. [과제2]에서도 원주의 길이를 구체적으로 알 수 없는데도 불구하고 모든 학생이 다각형의 둘레를 구하여 원의 지름으로 나누면 원주율을 구할 수 있다는 반응에서 원주율의 계산공식을 고려하고 있는 것으로 판단할 수 있다. 따라서 기하적 근사 가능한 학생은 S1, S3, S4, S5, S6, S9라 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-2] 기하적 접근으로 원주율을 구하는 방법(S5, S10 사례)

[과제3]에서, 무응답(S10)과 부적절한 반응(S1, S5, S7, S8, S9, S12)을 제외하고 5명의 학생이 원 안의 점과 원 밖의 점의 비율을 언급하였다. 이 아이디어는 전체-부분을 인식하고 있음을 보여준다. 그러나 이 아이디어를 언급한 5명의 학생 중에서 단 1명의 학생(S2)만이 자신의 아이디어를 적용하여 원주율을 구하였고([그림 Ⅳ-3] 왼쪽 참조), 3명(S4, S6, S11)의 학생은 언급한 아이디어를 적용하지 못했으며 나머지 1명(S3)은 넓이의 비와 길이의 비를 동일시하는 수학적 오류를 범함으로써 부적절한 비례식을 세우게 되어 원주율을 도출하지 못했다([그림 Ⅳ-3] 오른쪽 참조). [과제3]의 반응에서 전체-부분의 비율을 인식하고 원주율을 구한 S2는 확률적 계산이 가능했으며, 나머지 4명의 학생(S3, S4, S6, S11)은 비록 원주율을 구하는 단계까지 도달하지 못하였지만 전체-부분의 비율을 인식하였다는 점에서는 확률적 접근이 부분적으로 가능하였다고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-3] 비례 개념을 적용한 확률적 접근(S2, S3 사례)

2. 하위문항에 대한 반응

가. 원주율의 개념에 대한 이해

원주율에 대한 개념정의를 정확하게 답한 학생은 한 명도 없었다. 4명(S1, S2, S7, S12)의 학생이 원주율의 계산공식인 '(원주)÷(지름)'이라 답했고, 2명(S5, S8)의 학생이 '3.14'라 답했다. '3.14' 라는 반응은 원주율과 원주율의 근삿값을 혼동하고 있다고 볼 수 있으며, '원주율 = 3.14'라는 고착이 형성된 것으로 보인다. 원주율을 원주와 지름사이의 관계로서 비율을 언급한 4명(S3, S6, S10, S11)의 학생이 있었으나 이들은 모두 '원의 둘레에 대한 지름의 비율'이라 설명하였다는 점에서 기준량과 비교하는 양을 엄밀하게 구분하지는 못하고 있다고 판단할 수 있다. 그 외에 2명(S4, S9)의 학생이 원주율을 '원의 둘레나 원의 넓이를 구할 때 꼭 필요한 것(도와주는 수)'으로 답했다. 이들은 원주율의 의미를 원주율이 사용되는 상황으로 설명하였다.

각 과제에서 구한 원주율이 정확한지 아닌지를 판단하는 하위문항에 대한 반응에서, 7명(S1, S3, S4, S6, S8, S9, S10)의 학생이 각각의 과제에서 제시된 방법으로 원주율을 구했을 때 정확하지 않다고 답했다. 그러나 좀 더 정확한 원주율을 구하는 방안을 적절하게 제시한 학생은 없었다.

경험적 접근으로 구한 원주율이 정확하지 않은 이유로 '눈금 있는 자가 없기 때문에 원주와 지름의 정확한 길이를 알 수 없어서'가 가장 많았으며, 보다 정확한 원주율을 구하기 위해 '원의 둘레를 구한 다음 지름으로 나눈다'는 사례가 있었다. 기하적 접근으로 구한 원주율이 정확하지 않은 이유로는 '정96각형의 둘레가 정확한 원의 둘레가 아니라서', '아무리 96각형이어도 정확히 원의 둘레가 나오지 않기 때문이다'라는 의견이 있었다. 특징적인 결과는 학생들이 원의 둘레와 지름의 측정값으로 정확한 원주율을 계산할 수 있다고 생각하고 있다는 것과 원주율의 부정확성을 판단하는 근거가 원주율 자체 속성인 무한성에 기인한 것이라고 언급한 학생이 없었다는 것이다. 확률적 접근으로 구한 원주율이 정확하지 않다는 이유에 대해서는 크게 두 가지 유형이 있었다. 하나는 원주율 자체의 속성인 무한성에 기반하여 설명하는 방식이었고, 다른 하나는 다트를 던지는 상황의 불균등성에 기반하여 설명하는 방식이었다. 무한성에 기반한 설명 방식에는 '본래 원주율은 나누어 떨어지지 않기 때문에'와 '원주율은 소수점이 계속 이어지기 때문에'라는 사례가 속한다. 불균등성에 기반한 설명 방식은 '다트를 정확하게 던지지 않았으니까', '원 안에 다트가 정확하게 골고루 펴져있지 않아서'라는 사례가 속한다. 그러나 두 경우 모두 서로 독립된 사건을 유한 번 시행하여 그 결과를 실험적으로 관찰함으로써 수치를 구하는 확률적 접근의 한계를 인식한 것이라고는 볼 수 없다.

세 가지 방법 모두에서 정확하다고 답한 S5를 제외하고, 4명(S2, S7, S11, S12)의 학생은 공식을 사용하여 원주율을 구했기 때문이라고 답했다. 실제로, 3명(S2, S7, S12)의 학생은 하위문항 (1)에서 원주율의 의미를 '(원주)÷(지름)'이라 설명한 바 있다. 학생들은 측정과정에서 발생될 수밖에 없는 필연적인 오차를 인식하지 못하고

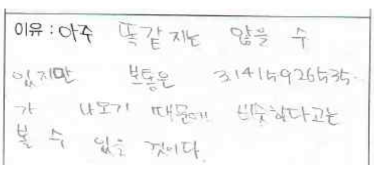
있으며 원주율을 구하는 계산공식이 원주율의 정확성을 확보해주는 근거라고 생각하고 있음을 알 수 있다.

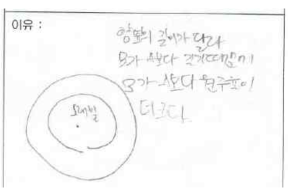
<표 Ⅳ-1> 원주율의 의미와 각 과제에서 구한 원주율의 정확성 여부에 대한 반응

문항 / 학생	원주율의 의미	과제1. 경험적 접근		과제2. 기하적 접근		과제3. 확률적 접근	
		정확하다	정확하지 않다.	정확하다	정확하지 않다.	정확하다	정확하지 않다.
S1	(원주)÷(지름)		○		○		○
S2	(원주)÷(지름)	○			○	○	
S3	비율		○		○		○
S4	원주와 넓이구할 때 필요한 수		○		○		○
S5	3.14	○		○		○	
S6	비율		○		○		○
S7	(원주)÷(지름)	○			○		○
S8	3.14		○		○		○
S9	원주와 넓이구할 때 도와주는 수		○		○		○
S10	비율		○		○		○
S11	비율		○	○		○	
S12	(원주)÷(지름)		○	○		○	

나. 원주율의 상수성에 대한 이해

2명의 학생들 제외하고 모든 학생들이 서로 다른 크기의 두 원의 원주율은 그 크기가 항상 같다고 답했다. 그러나 S9의 '원이 커지면 원주와 지름이 같은 비율로 커진다'는 설명을 제외하면, '크기가 달라도 원주율은 항상 같으니까'라든지 '원주율이 (원주) ÷ (지름)이니까' 등 정당화에 미흡한 경우가 다수 파악되었다. 일부 학생들은 '원주율은 항상 3.14이므로'와 '원주율은 항상 약 3.14가 나온다'고 했다. 원주율이 달라진다고 반응한 2명의 학생 중, S6은 원에 따라 원주율이 똑같지는 않지만 비슷하다고 하였고 S12는 큰 원의 원주율이 작은 원의 원주율보다 더 크다고 하였다([그림 Ⅳ-4] 참조). 따라서 원주율의 상수성을 정확히 이해하고 있는 학생은 S9뿐이라고 볼 수 있다.





[그림 Ⅳ-4] 원의 크기에 따라 원주율이 다른 이유(S6, S12)

다. 원주율의 무한성에 대한 이해

원주율 계산공식 '(원주)÷(지름)'의 결과가 어떠한지를 묻는 질문에 대하여 '① 나누어 떨어진다'라고 답한 학

생이 3명(S1, S2, S5), '② 나누어 떨어지지 않는다'를 선택한 학생이 4명(S3, S4, S7, S9), '③ 나누어 떨어질 때도 있고, 나누어 떨어지지 않을 때도 있다'라고 답한 학생이 5명(S6, S8, S10, S11, S12)으로 조사되었다. '나누어 떨어지지 않는다'를 선택한 학생들은 '원주율이 3.14가 아니라 3.14 뒤로 계속 나가는 소수, 끝나지 않는 소수, 무한소수'라고 설명했다. '나누어 떨어진다'를 선택한 일부 학생에게서는 원주율의 상수성과 유한소수 개념 사이를 혼동하는 모습이 확인되었다.

T2 : S1은 나누어 떨어진다를 선택했구나. 왜 그렇게 생각했는지 말해줄 수 있니?
S1 : 어떤 책에서 봤는데요. 3.14가 계속 이어지잖아요. 근데 맨날 원주율은 똑같다고……
T2 : 원주율이 항상 똑같다고 책에서 봤다구요?
S1 : 네
T2 : 그러면 항상 원주율이 똑같으면 그게 나누어 떨어지는 거구나?
S1 : 네

S1은 모든 원에서 원주율이 똑같다는 것은 원주율이 유한소수로 표현된다는 것을 의미한다는 오류를 쉽게 수정하지 않았다. S1은 원주율이 무한소수인 이상 같을 수는 없으며, 역으로 같기 위해서는 원주율이 유한소수이어야 한다고 말했다. 다른 사례로, 경우에 따라서 원주율이 유한소수이거나 무한소수일 수 있다고 생각하는 학생도 있었다.

T2 : 그럼 언제 나누어 떨어지고 언제 나누어떨어지지 않는 걸까?
S12 : 원주 나누기 지름에 따라서 달라져요.
SS : 그럼 똑같잖아. 원주율이니까……
S12 : 아니 달라져요…… 학교에서 직접 재보았는데요. 만약에 원주가 3센티이고 지름이 1센티이면 나누어 떨어지잖아요. 근데 원주가 10센티이고 지름이 3센티이면 계속 무한소수로 반복되니까요.

S12는 직접 측정을 통해 얻은 원주와 지름의 측정값에 따라 그 몫인 원주율이 나누어 떨어질 때도 있고, 나누어 떨어지지 않을 때도 있다고 생각하는 것이다. 학교 수업시간의 직접 측정활동의 경험이 오히려 원주율의 상수성과 무한성 이해에 장애가 된 사례라 할 수 있다.

라. 원주율과 원주율의 근삿값의 차이에 대한 이해

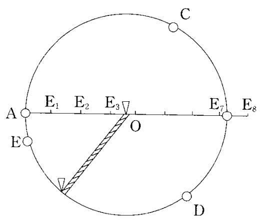
하위문항 (5)에서 '① 3.14로 모든 원에서 항상 같다'를 선택한 학생이 2명(S2, S5), '② 약 3.14로 정확히 구할 수는 없지만 정해진 수로, 모든 원에서 항상 같다'를 선택한 학생이 7명(S3, S4, S6, S8, S9, S10, S11), '③ 약 3.14일 뿐, 정확히 구할 수 없기 때문에 모든 원에서 항상 같은 것은 아니다'를 선택한 학생이 3명(S1, S7, S12)으로 나타났다. 따라서 7명의 학생이 원주율의 근삿값과 원주율 사이의 차이를 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 여기서 '3.14로 모든 원에서 항상 같다'를 선택한 2명의 반응은 '원주율 = 3.14'라는 도식에서 벗어나지 못하고 있다고 할 수 있으며, 특히 S5는 원주율의 계산공식을 사용하면 항상 같은 원주율이 나온다고 설명하였다. 이러한 반응은 계산공식이 원주율의 정확성을 확보해주는 근거라고 생각하고 있음을 알 수 있다.

T2 : 원주율은 3.14로 모든 원에서 항상 같다를 선택했구나. 이유를 말해줄 수 있겠니?
S5 : 원의 둘레를 구하는 공식이요. 지름 곱하기 3.14잖아요. 그런데 여기에서 3.14를, 약 3.14가 아니라

3.14를 쓰기 때문에…… 거꾸로 원의 둘레 나누기 지름을 할 때도 약 3.14가 아니라 3.14가 나와야 돼요.

마. 원주율의 근사성 아이디어의 발견

[과제1]의 경험적 접근에서 지름의 3배를 하고 남는 양을 다루기 위한 구체적인 방법을 기술한 학생은 없었다. [그림 Ⅳ-5]은 지름의 길이에 해당하는 밧줄을 원주에 3번 대어본 후에 남은 길이 EA를 지름을 단위길이로 하여 나타내보는 생각, 즉 EA의 밧줄 길이가 지름 위에 몇 번 표시할 수 있는지를 세어봄으로써 좀 더 정확한 원주율을 얻을 수 있다는 생각을 구현한 이집트인들의 방법이다.*



[그림 Ⅳ-5] 이집트인이 원주율 구한 방법(Beckman, 1971, p.8)

다음은 이집트인의 경험적 접근 방법을 활용하여 좀 더 정확한 원주율을 구하기 위해 원의 지름의 길이를 이용하여 원의 둘레의 길이를 측정하는 대화의 일부이다. 토론을 통해 일부 학생들은 원주율의 근삿값을 얻는 방법으로 분수로 표현한다고 설명했다.

T2 : 여러분은 원주율이 정확하지 않다고 했어요. 그럼 어느 정도 나온다고 생각해요? 대략적으로……
S8 : 3? 4?
T2 : S8은 아까 이렇게 지름을 가지고 원주에 대본다고 했어요. 그러면 이렇게 한 배, ……
S8 : 세 배나 네 배 정도……
T2 : 그럼 원주율은 얼마다라고 이야기할 수 있을까요?
S1 : 3에서 4가운데니까 3.5?
SS : (웃음)
T2 : 그래도 좀 더 정확하게 잴 수 있는 방법은 없을까? 정말 자는 없지만 밧줄을 가지고요.
T2 : 이렇게 세 배하면 좀 남는다는 말이죠? 그럼 그 부분을 네 배라고 하기도 그렇고, 버리기도 그렇고…
S8 : 분수로 해가지고……, 이렇게 한 번 더 대가지고……
남는 부분이 얼마를 차지하는지 분수로 표현하면……
S12 : 약, 약, 정확하게 분수요. 약 사분의 일이 나올 것 같아요.
S8 : 사분의 일이랑 삼분의 일

---

*) EA의 밧줄 길이가 지름 위에 7번 이상 8번 이하 표시되므로, 이집트인들은 원주율의 범위 $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ 임을 알았다고 한다.

일부 학생들은 자를 사용하지 않고 밧줄만을 이용하여 원주율의 근삿값을 좀 더 정확하게 하는 방법을 전체 토론의 과정에서 발견하였다. 이는 교사가 자가 없는 상황에서 수치로 측정하는 것이 불가능함을 강조한 것과 남는 부분([그림 Ⅳ-5]의 EA)을 어떻게 처리할 것인가에 대한 탐구를 격려한 것에 반응한 것으로 보인다. 비록 원주율을 $3\frac{1}{4}$과 $3\frac{1}{3}$이라는 다소 부정확한 근삿값으로 예측하였지만, 처음의 3보다는 훨씬 개선된 근삿값임에는 틀림없다. 이 과정에서 지름이 남는 부분의 몇 배인지를 다시 한번 재본다는 아이디어를 떠올린 것은 상당히 좋은 추론의 사례라고 볼 수 있다. 이와 같은 추후 토론활동을 통해서 일부 학생들은 이집트인의 경험적 접근에서 원주율의 근삿값을 좀 더 정확하게 얻을 수 있는 방법을 발견할 수 있었다.

다음은 아르키메데스의 기하적 접근 방법을 활용하여 좀 더 정확한 원주율을 구하기 위해 원의 둘레의 길이에 대하여 토론한 내용의 일부이다. 토론을 통해 일부 학생들은 원주율의 근삿값을 얻는 방법으로 변의 개수를 '두 배씩 늘린다', '더 많이 늘린다' 등의 표현을 사용했다.

T2 : 지금 아르키메데스는 정육각형에서 출발해서 어떻게 하고 있나요?
SS : 변을 늘리고 있어요.
T2 : 그럼 아르키메데스가 정말로 재고 싶은 것은 무엇인가요? 정다각형의 둘레인가요?
S7 : 원의 둘레요.
T2 : 네. 그런 것 같아요. 그렇다면 원의 둘레를 조금 더 정확하게 잴 수 있는 방법은 무엇일까요?
S8 : 계속 변의 개수를 두 배씩, 두 배씩 늘려나가서요. 192각형으로 해요. 그리고 또 두 배해요.
T2 : 아, 그렇게 할까요? 그럼 S1의 생각은 어때요?
S1 : 변의 개수를 더 많이요. 더 많이 늘리면 원과 비슷하게 될 것 같은데요.
S7 : 그럼 원이랑 변이 맞닿아 있어서 그릴 수가 없어요. 이제 그만 해요. 아님 엄청 큰 원을 그려야 해요.
S12 : 그래도 아무리 늘려도 원이 안돼요. 정확하지 않아요.

정다각형의 변의 개수를 계속해서 두 배씩 늘려 가면 그 정다각형의 둘레는 점점 원의 둘레에 가까워질 것이라고 답했다. 이러한 반응은 아르키메데스가 정육각형에서 출발하여 정96각형까지 도달하기 위해 썼던 것과 동일한 아이디어이다. 하지만 학생들은 자신들의 아이디어로부터 원하는 만큼 정확한 값을 얻을 수 있고는 확신하지 못했다. 실제로 S12는 정다각형의 변의 개수를 아무리 증가시켜도 원에 근사할 뿐 정확한 원의 둘레를 구할 수 없다고 답했다.

[과제3]의 확률적 접근은 학생들이 가장 많은 어려움을 호소했던 과제로 원주율을 좀 더 정확하게 구하는 아이디어가 원래의 의도에 접근한 경우를 찾아보기 힘들었다. 대부분의 학생들은 규칙적으로 다트 자국을 만들면 된다든지, 원주와 지름을 구하여 공식을 이용하여 구하면 좀 더 정확한 원주율을 구할 수 있다고 답변하였다. 이로부터 다트의 균등한 분포 또는 원주와 지름의 측정값의 계산공식이 원주율의 정확성을 보장한다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 학생들에게는 원주율을 원주가 아닌 원의 넓이를 이용해서 구한다는 방식 자체가 낯설게 인식되는 것으로 보인다. 앞의 두 가지 접근과 달리, 개인별 탐구활동이 끝난 후 이어진 교사와 학생과의 토론에서 학생들은 좀 더 개선된 원주율의 근삿값을 얻는 방법을 쉽게 찾지 못하였다.

T2 : 그런데 다트던지기 방법으로 원주율을 좀 더 정확하게 구하려면 어떻게 해야 할까요?
SS : (침묵)
T2 : 다트던지기를 이용해서요. 아까 아르키메데스는 어떻게 했지요?
SS : 변의 개수를 늘려갔어요.

T2 : 그럼 이 경우는?
S10 : 원 안에 다 들어가게 잘 던져요.
S5 : 아니, 골고루 퍼지게 던져요.
T2 : 골고루 퍼지게 던졌다면요.
SS : (침묵)
T2 : 다트만을 가지고 생각해보세요. 이 실험을 했을 때는 어떻게 하면 좀 더 정확하게 할까?
S3 : 더 많이 던져요.
T2 : 어, 더 많이 던진다? 몇 번 정도? 어떻게 한다?
S3 : 만 번?
T2 : 그러면 좀 더 정확해지는구나? 그런데 왜 그러지?
SS : (침묵)

학생들은 다트던지기 방법으로 원주율을 좀 더 정확하게 구하는 방법을 묻는 교사의 질문에 오랜 시간동안 침묵하였다. 결국 아르키메데스 방법에서 변의 개수를 늘려 점점 원주에 가까운 값을 얻고 좀 더 정확한 원주율을 얻을 수 있었다는 사실을 상기시키는 전략을 사용하였다. 이와 유사한 아이디어를 다트던지기 실험에서도 사용할 수 있다는 발문으로 학생들로 하여금 유추적 사고 전략을 사용하도록 의도한 질문이었다. S3의 경우 더 많이 던지는 방법을 발견했지만 그 이유를 설명하는 수준에는 이르지 못하였다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 초등수학 영재교육 대상자들이 원주율 개념에 대해서 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보았다. 이를 위해 원주율 계산 방법의 역사적 발달 과정에서 나타나는 경험적 추측, 기하적 근사, 확률적 계산 단계를 토대로 과제를 개발하였고 이를 학생들에게 적용하여 그 반응을 분석하였다. 본 연구에서 얻은 결과를 토대로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 학생들은 '원주율 = 3.14'라는 사고의 고착화로 인하여 원주율의 개념, 근사성, 무한성을 제대로 이해하지 못하였으며, 원주율과 원주율의 근삿값을 혼동하는 오류를 범하였다. 이 결과는 많은 학생들이 무리수와 무리수의 근삿값의 차이를 구별하지 못한다는 Burke & Taggart(2002)의 주장과도 일치하는 것이다. 학생들의 이러한 반응은 '끝없는 소수를 간단히 나타내기 위하여 소수 셋째 자리에서 반올림하여 3.14로 사용합니다'라는 교과서의 제시 방식과 무관하지 않다. 원주율은 '지름에 대한 원주의 비율'로 도입되고 있지만, 바로 약속하기를 통해 3.14라는 근삿값을 사용하도록 지도된다. 이후에 학생들은 3.14가 근삿값임을 상기할 수 있는 상황에 놓이지 않는다. 이러한 지도방식은 '원주율 = 3.14'라는 사고를 고착화시킴으로써 학생들에게 원주율 개념의 다의성을 이해하는 기회를 제공하기 어렵다.

둘째, 학생들은 원주율을 '(원주) ÷ (지름)'의 대수적인 식으로 이해하려는 성향이 강하였다. 다수의 학생들이 하위문항 (1)에서 원주율의 의미를 '원의 지름의 길이에 대한 원주의 비율'로 답하지 않고 '(원주) ÷ (지름)'으로 답하였다. 또한 하위문항 (2)에서 과제의 원주율이 정확하지 않다고 답한 학생들이 원주율을 정확하게 구할 수 있는 방법으로 제시한 것은 원주를 구해서 지름으로 나눈다는 것이었다. 이 학생들은 경험적 추측, 기하적 근사, 확률적 계산 과제의 고유한 문제 상황에 상관없이, 눈금 있는 자로 원주와 지름을 측정할 수만 있다면 '(원주) ÷ (지름)'의 대수적 공식을 사용하여 정확한 원주율을 구할 수 있다고 이해하고 있었다. 심지어 일부 학생들은 '(원주) ÷ (지름)' 공식을 사용하기 때문에 정확한 원주율을 구할 수 있다고 생각하고 있었다. 예를 들어, S5는 원주

율의 계산공식을 사용하면 항상 같은 원주율이 3.14로 나온다고 설명하였다. 이 학생에게 원주율의 계산공식은 원주율의 정확성을 확보해주는 근거라고 할 수 있다.

셋째, 원주율의 상수성과 무한성을 깊이 있게 이해하고 있는 학생은 극히 적었다. 대부분의 학생들이 크기가 다르더라도 두 원의 원주율은 같다고 답했지만, 왜 그런지에 대한 근거를 제시하지 못했다. 따라서 학생들은 상수성에 대한 깊이 있는 이해가 부족하다고 볼 수 있다. 무한성의 이해 문항에서 '(원주) ÷ (지름)'의 결과가 '나누어 떨어지지 않는다'고 답한 4명의 학생 중에는 '무한소수'라는 용어를 사용하는 학생이 있었던 반면에 상수성과 유한소수 개념 사이를 혼동하거나 무한성에 대해서 미흡하게 이해하고 있는 학생들도 있었다. 여기서 주목할 점은 (원주) ÷ (지름)의 결과가 '나누어 떨어질 때도 있고 떨어지지 않을 때도 있다'고 답한 학생이 적지 않았다는 점이다. 학생들이 교과서에서 제시된 직접 측정활동을 해 본 과거의 경험에서 실제로 나누어 떨어질 때도 있고 떨어지지 않을 때도 있었던 기억이 영향을 준 것으로 보인다.

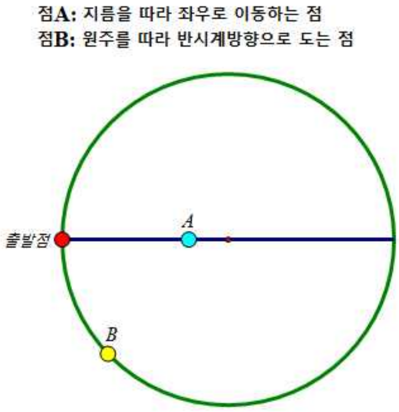
넷째, 학생들은 개별적 과제 응답 시에는 원주율의 근사성에 접근하지 못했지만, 과제탐구활동의 토론과정에서 원주율의 근사성에 대한 아이디어를 발견하는데 성공하였다. 이는 본 연구에서 개발한 과제가 원주율의 근사성을 이해하는데 긍정적인 역할을 하였음을 의미한다. 학생들은 이집트인들의 방법을 활용한 [과제1]에서 단위길이인 지름을 더 작게 분할하여 분수를 사용한다는 아이디어를 발견했고, 아르키메데스의 방법을 활용한 [과제2]에서 정다각형의 변의 개수를 계속해서 증가시키는 아이디어, 몬테카를로의 방법을 활용한 [과제3]에서는 다트를 더 많이 던져서 원주율을 더 정교하게 구할 수 있다는 아이디어를 발견할 수 있었다. 따라서 과제탐구활동은 학생들에게 원하는 만큼 얼마든지 정밀한 값을 구할 수 있다는 원주율의 근사성을 이해할 수 있는 기회를 제공하였다고 볼 수 있다.

본 연구에 참여한 학생들은 초등수학 영재교육 대상자로, 6학년 학생들 중에서 수학적으로 우수한 성취를 보이는 학생들이다. 그럼에도 불구하고 이들은 원주율 개념에 대해서 불완전한 이해상태를 보여주었다. 이와 같은 결과는 다른 일반 학생들의 원주율 개념의 이해상태 또한 불완전할 수 있음을 시사한다. 학생들이 원주율 개념의 다양한 의미를 이해하게 하기 위해서는 초등학교에서의 원주율 지도방식에 변화를 모색할 필요가 있다. 이에 다음과 같은 지도 방안을 제언하고자 한다.

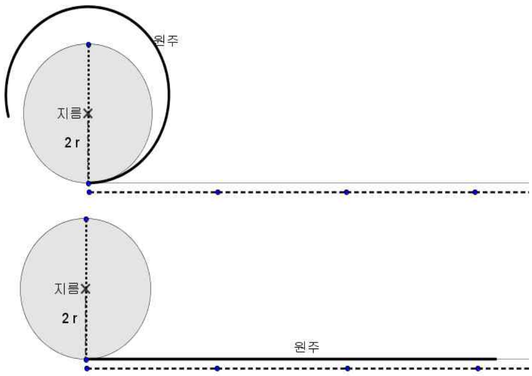
첫째, 원주율은 '원의 지름의 길이에 대한 원주의 비율'뿐 아니라 '원의 지름을 단위 길이로 하여 원의 둘레를 측정하여 얻을 수 있는 값'으로 도입해야 한다. 현재 교과서는 [생각하기]에서 '원의 지름을 기준으로 할 때 원의 둘레의 길이는 지름의 몇 배인가를 알아보는 방법을 제시하시오'라고 진술하고는 있으나, 함께 제시된 표는 직접 측정활동에서 원주와 지름을 각각 따로 측정할 것과 그 몫을 계산하기를 요구하고 있다. 이러한 방법에 앞서, 지름의 길이를 측정하고 이 길이를 원의 둘레에 대어 보면서 원의 둘레를 측정하게 하는 방법을 수행해볼 수 있다. 또한 원주율을 원의 지름의 길이에 대한 원주의 비율로 정의하고 그 바로 밑에 '(원주율) = (원주) ÷ (지름)'으로 기술한 교과서 방식은 '(원주) = (원주율) × (지름)'을 유도하기 위한 진술로 보인다. 그러나 이러한 진술방식은 학생들로 하여금 원주율을 대수적 공식으로 기억하도록 한다. 따라서 '원주는 지름의 몇 배인가'라는 질문에 대하여 '원주는 지름의 3배보다 약간 넘는다', 또는 '(원주) = (지름)의 약 3배'로 설명하는 방식도 고려해볼 만 하다.

둘째, 원주율은 공학적 도구 등을 이용하여 직관적인 방법을 통해 이해되어야 한다. 본 연구에 참여한 학생들은 과제탐구활동에 대한 토론 과정에서 원주율의 근삿값을 정교화해 보는 경험을 통하여 원주율의 근사성에 대한 아이디어를 발견할 수 있었다. 그러나 지필환경으로 제공된 개별적 과제탐구과정에서 이러한 아이디어를 실제로 확인하기는 어려웠다. 현재 교육과정에서는 원주율을 '3.1415926535⋯와 같이 끝이 없는 소수'로 제시하고 있다. 그러나 이러한 수치만을 언급하는 것보다는 시각적이고 직관적으로 제시하는 것이 학생들의 이해에 도움이 될 것이다. 예를 들어, [그림 Ⅴ-1]와 같이 원주를 따라 회전하는 점 A와 지름을 따라 좌우로 이동하는 점 B를 동시에 한 점에서 출발하게 하고 두 점이 다시 만나지 않는다는 것을 실제로 확인할 수 있도록 하는 활동

은 무리수를 도입하지 않고서 원주율이 나누어 떨어지지 않는다는 것을 직관적으로 이해시킬 수 있다. 또한 [그림 Ⅴ-2]는 원주가 지름의 3배 보다 약간 큰 값임을 시각적으로 보여줄 수 있는 공학 자료이다. 화면을 확대하여 원주가 단위길이인 지름의 몇 배인지를 소수점 아래까지 확인해볼 수 있다.



[그림 Ⅴ-1] GSP 환경에서 원주율 측정하기



[그림 Ⅴ-2] GeoGebra 환경에서 원주율 측정하기

셋째, 원주율은 원주율 개념이 가지는 본질적인 의미를 이해할 수 있도록 다양한 상황을 통해 도입되어야 한다. Chevallard는 수학적 지식의 이면에 들어 있는 광범위한 아이디어가 본래의 지식이 가지는 의미를 설명하는데 큰 도움을 준다고 주장한다(이경화, 1996). 본 연구에서는 수학사를 토대로 세 가지의 과제를 통해 원주율을 탐구하도록 하였다. 개발한 과제에는 지름을 단위길이로 하여 원주를 측정하는 활동이 포함되어 있다. 또한 원하는 만큼 정확한 원주율을 구할 수 있는 근사성을 도입할 수 있도록 개발되었으며, 전체-부분의 비율을 이용하여 확률적으로 계산할 수 있는 과제를 제공하였다. 이와 같은 과제는 원주율이 갖는 광범위한 아이디어를 살펴보는 상황으로 활용될 수 있다.

앞으로 의미 있는 원주율 학습이 이루어지기 위해서는 원주율을 주제로 한 초등 수학수업을 관찰하고 분석하는 후속 연구가 필요하다. 특히 본 연구에서 제안한 지도방안을 포함한 다양한 교수·학습방법을 적용하여 교실수업을 분석하는 연구들이 이어지기를 기대해 본다.

참 고 문 헌

강문봉 (2001). 초등학교에서 π= 3.14 의 사용에 대하여, 과학교육논총, 13, 51-62.

Kang, N. B. (2001). On the using the pi(π) in the elementary mathematics, *The bulletin of science education*, 13, 51-62.

강완 (2001). 원의 넓이 공식에 대한 교수학적 변환 분석, 과학과 수학교육 논문집, 27, 37-68.

Kang, W. (2001). An analysis of didactic transpositions of area of a circle in elementary mathematics textbooks, *J. research. sci. & math. edu.*, 27, 37-68.

교육과학기술부 (2011). 수학 6-1, 서울: 두산동아.

Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics 6-1*, Doosan Dongah.

신대윤 (2009). 원주율 π를 3으로 했을 때 수학학습에 미치는 영향, 석사학위논문, 춘천교육대학교.

Shin, D. Y. (2009). A study on the influences on mathematics learning when π is taught as 3, *Master's Thesis*, Chuncheon National University of Education.

이경화 (1996). 교수학적 변환론의 이해, 대한수학교육학회 논문집, 6(1), 203-213.

Lee, K. H. (1996). Understanding of didactic transposition theory, *Journal of the Korea Society of Educational Studies of Mathematics*, 6(1), 203-213.

정동권 (1998). 교사를 위한 수학사개론, 인천교육대학교(수학문화사 강좌 자체 교재).

Jeong, D. G. (1998). *An introduction to the history of mathematics for teachers*, Incheon National University of Education.

최영기・홍갑주 (2008). 원주율의 상수성과 아르키메데스의 계산법, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47(1), 1-10.

Choi, Y. G & Hong, G. J. (2008). The nature of pi as a constant and Archimedes calculation method, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 47(1), 1-10.

Baravalle, H. (1969). The number π, In J. K. Baumgart (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.

Beckmann, P. (2002). 파이의 역사 (박영훈 역), 서울: 경문사. (원저 1971년 출판)

Park, Y. H. (2002). *The history of pi* (translation of the book by Beckmann, Petr., Macmillan, 1971), Kyungmoon Sa.

Binongo, J. N. G. (2002). Randomness, statistics, and π, Mathematics teacher, 95(3), 224-230.

Boyer, C. B. (1968). *A History of mathematics*. John Wiley & Sons.

Burke, M. J., Taggart, D. L. (2002). So that's why 22/7 is used for π, *Mathematics teacher,* 95(3), 164-169.

Cajori, F. (1905). *History of mathematics,* London: the Macmillan Company.

Cajori, F. (1917). *History of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. London: the Macmillan Company.

Corris, G. (1990). Experimental pi, *Mathematics in school,* 19(1), 18-21.

Ebert, D. (2006). Using statistical testing to approximate π, *Mathematics teacher,* 100(3), 216-219.

Eves, H. (2005). 수학사 (이우영, 신항균 역), 서울: 경문사. (원저 1953년 출판)

Lee, W. Y. & Shin, H. G. (2005). *An Introduction to the History of Mathematics* (translation of the book by Eves, Howard. New York: Rinehart & Co. 1953), Kyungmoon Sa.

Linn, S. L., Neal, D. K. (2006). Approximating Pi with the golden ratio. Mathematics teacher, 99(7), 472-477.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM

Needham, J. (2000), 중국의 과학과 문명: 수학, 하늘과 땅의 과학, 물리학 (이면우 역), 서울: 까치글방. (원저 1959년 출판)

Lee, M. W. (2000). *Science and Civilisation in China: Mathematics and the Science of the Heavens and the Earth* (translation of the book by Needham, Joseph. University, 1959), Kachi Publishing.

Ofir, R. (1991). Historical happenings in the mathematical classroom, *For the learning of mathematics,* 11(2), 21-23.

Santucci, L. C. (2011), Recreating history with Archimedes and Pi, *Mathematics teacher, 105*(4), 298-303.

Schepler, H. C. (1950), The Chronology of PI, *Mathematics Magazine,* 23(4), 216-228.

Scott, P. (2008), π The chronicle, *Australian Mathematics Teacher,* 64(4), 3-5.

Seitz, D. T. (1986), A geometric figure relating the golden ratio and pi, *Mathematics teacher,* 79(5), 340-341.

Singh, U. (2013), Estimation of the value of π using Monte Carlo method and related study of errors, *Mathematics in School, 2013(November)*, 21-23.

Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics vol. 2 special topics of elementary mathematics*, NY: Dover Publications.

Thomas, C., Bell, A. & Xiao, R. (2014), Finding π, *Mathematics in School, 2014(March)*, 4-11.

Velasco, S., Román, F. L., Gonzalez, A., & White, J. A. (2006). Statistical estimation of some irrational numbers using an extension of Buffon's needle experiment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 37(6), 735-740.

Elementary mathematically gifted students' understanding of Pi

Kang, Hyangim
Korea National University of Education, Cheongwon-gun Korea
E-mail : hikang2002@hanmail.net

Choi, Eunah†
Yeongdeungpo Girls' High School, Seoul Korea
E-mail : silverah90@naver.com

The purpose of this study is to investigate the understanding of pi of elementary gifted students and explore improvement direction of teaching pi. The results of this study are as follows. First, students understood insufficiently the property of approximation, constancy and infinity of pi from the fixation on 'pi = 3.14'. They mixed pi up with the approximation of pi as well. Second, they had a inclination to understand pi as algebraic formula, circumference by diameter. Third, few students understood the property of constancy and infinity of pi deeply. Lastly, the discussion activity provided the chance of finding the idea of the property of approximation of pi. In conclusion, we proposed several methods which improve the teaching of pi at elementary school.

* ZDM Classification : D33, F73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : Pi, the approximation of pi, the property of approximation, the property of constancy, the property of infinity
† corresponding author