

## ‘컴퓨팅 사고력(Computational thinking)’ 향상과 Sage 도구를 이용한 수학교육

박 경 은 (성균관대학교)

이 상 구 (성균관대학교)<sup>†</sup>

최근 주요 산업 분야에서 인간 사고와 컴퓨터 능력의 통합을 의미하는 ‘컴퓨팅 사고력(Computational thinking)’에 대한 요구가 급격히 증가해 왔다. 이에 따라 선진국은 지난 20여년간 수학교과와 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통을 하는 과정에 CAS(Computation Algebra System)를 활용하여 수학문제를 해결하는 방법으로 자연스럽게 학생들의 ‘컴퓨팅 사고력’을 향상시켜왔다. 이러한 변화에 발을 맞추어 우리나라의 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 교과서들도 다양한 CAS 도구에 대한 활용을 담아 ‘컴퓨팅 사고력’의 향상에 발을 맞추고 있다.

본 연구는 국내·외 ‘컴퓨팅 사고력’ 기반 교육 사례를 분석하고, ‘컴퓨팅 사고력’ 향상에 도움이 되는 CAS 도구 특히 PC 및 모바일 기기를 이용하여 언제 어디서나 무료로 사용할 수 있는 Sage 도구를 이용한 수학교육 및 수학교과목 구성에 대하여 논한다. 또 구체적인 ‘컴퓨팅 사고력’ 기반 수학교육 모델을 설계하여 대학 수학교육현장에 활용한 내용의 보고를 통하여, 향후 수학교육을 통한 ‘컴퓨팅 사고력’ 향상에 대한 구체적인 방안을 제시한다.

### I. 서론

미래창조과학부에서는 2013년 5월 ‘창조경제의 개념 및 창조경제 실현’을 위한 정부의 역할과 과학기술분야의 정책 과제를 제시하면서 창조경제를 ‘국민의 상상력과 창의성을 과학기술과 ICT에 접목하여 새로운 산업과 시장을 창출하고 기존 산업을 강화함으로써 일자리가 창출되는 성장전략’이라고 정의하였다. 이러한 취지는 미래사회의 주요 산업 분야에서 요구가 증가하고 있는 인간 사고와 컴퓨터 능력의 통합을 의미하는 Computational Thinking(컴퓨팅 사고력, CT)과 연결된다.

CT(컴퓨팅 사고력)이란 인간의 사고와 디지털 기술을 통합하여 문제를 해결하려는 접근법으로, 추상화를 통해 문제의 핵심요소를 추출하고 컴퓨팅 기기를 통해 해법을 자동화하는 능력을 말한다<sup>1)</sup>. 예를 들어, CT의 주요 기능으로는 데이터 수집·분석·표현, 문제 분해·추상화·모델링, 자동화·병렬화·시뮬레이션 등이며, 주로 유비쿼터스 컴퓨팅(컴퓨터 분야), 로봇 및 사용자 인터페이스/음성 인식(인공지능 응용 분야), 유전자 치료 및 게놈 스캐닝(바이오 의학 분야) 등에 응용되고 있다.

이러한 시대적인 분위기를 반영하여 한국과학창의재단 주최로 2013년 12월 6일 웨라톤 그랜드 워커히에서 개최된 ‘Computational Thinking 국제 세미나’에서는 인디애나 대학의 카일리 페플러(K. Peppler) 교수, 브루넬 대학의 로렌스 윌리엄스(L. Williams) 교수, 찰스톤 대학의 퀸 버크(Q. Burke) 교수 등이 참석하여 CT 기반의 교육이 선진국에서 활발하게 이루어지고 있으며, 중등학교 정규 교과과정은 물론 유치원, 초등학교 등으로 점차 확

\* 접수일(2014년 10월 31일), 심사(수정)일(2014년 12월 12일), 게재 확정일(2014년 12월 16일)

\* ZDM 분류 : M15, N80, U65

\* MSC2000 분류 : 97U70

\* 주제어 : 컴퓨팅 사고력(CT), 대학 수학교육, CAS, 모바일 수학교육, Sage

† 교신저자: sglee@skku.edu

1) 월간 과학창의, 2014년 2월호, Vol.197, (공)저 한국과학창의재단.

대되는 추세라고 언급했다<sup>2)</sup>. 그리고 기존의 컴퓨터 학습과 스크래치(Scratch) 프로그래밍 사이의 차이점을 설명하고 이를 통해 어린 학생들이 컴퓨터의 본질을 쉽게 이해할 수 있었던 사례들을 소개하며 ‘컴퓨팅 교육’의 중요성을 강조했다. 여기서 스크래치 도구란 미국 MIT 대학 미디어랩에서 개발한 교육용 프로그래밍 언어로 아이들이 마음대로 상상(imagine)하고 그 아이디어를 구현(program)하고 그 결과물을 공유(share)할 수 있으며 현재 우리나라 중학교 1~3학년 정보교과서에 포함되었을 뿐만 아니라 미국 대학에서는 스크래치로 프로그래밍 개념을 가르치기도 한다. 또한 한국과학창의재단에서는 2013년 10월 개시~2014년 3월 종료된 연구과제 “초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구”를 통해 창의성과 열정을 갖춘 창의인재 양성을 목표로 CT를 초·중등 단계에서부터 체계적으로 도입하기 위한 이론적인 개념 정립 및 학령별·과목별 적용방안 도출하기 위한 연구를 진행하였다. 즉, 올바른 CT 교육이 수학 교과를 통하여 효과적으로 이루어질 수 있다는 것을 보이고자 했다. 그리고 2014년 9월 24일 교육부는 ‘2015 문·이과 통합형 교육과정의 총론 주요 사항’ 보고에서 과학기술 소양 교육을 위하여 ‘컴퓨팅 사고력’ 함양을 위해 소프트웨어 교육을 활성화한다는 방침을 발표하였다<sup>3)</sup>.

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르며, 수학적 문제 상황을 수리·논리적 사고를 통하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 최근 CT에 대한 요구가 급격히 증가함에 따라 선진국은 수학교과와 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통을 하는 과정에 첨단 디지털 기술을 활용하여 수학문제를 해결하려는 접근방법에 의해 학생들의 CT를 향상시키는 노력을 해왔으며, 이는 지난 4반세기 동안 CAS(Computer Algebra System) 도구의 적용이라는 형태로 구체적으로 구현되어왔다. 즉, 문제의 해결과정에서 추상화를 통해 문제의 핵심요소를 추출하고 컴퓨팅 기기를 통해 해법을 자동화하는 과정을 수학교과가 가장 적극적으로 해 왔다는 의미이다. 본 연구는 이러한 교육환경의 변화를 수학교육에 반영하는 효과적인 방법으로 CAS 도구, 특히 Sage 도구를 이용한 수학교육을 통하여 컴퓨팅 사고력을 향상시키는 ‘CT 기반의 수학교육 프로그램’ 모델을 개발하여 제시한다.

## II. 본 론

CT 학습이란 MIT 교수인 시모어 페퍼트(Seymour Papert) 박사가 창안한 구성주의(Constructionism) 교육이론에 따라 ‘교사보다 학습자에게’ 더 큰 자율성을 부여하기 위한 수단으로 컴퓨터를 활용하는 교육이다. 수학박사인 페퍼트 교수는 MIT 인공지능 연구소 응용수학 교수와 교육학과 수학교육 교수로 활동하면서 지난 20년간 한국에서 사용되어온 Logo 언어<sup>4)</sup>를 처음 개발하기도 하였다. 카일리 페플러(Kylie Peppler) 교수는 이에 대해 마치 레고(Lego) 게임을 하듯이 학습 현장에서 학생이 자신의 의도에 따라 다양한 지식을 쌓아올릴 수 있도록 폭 넓은 지원이 이루어지고 있다고 하였다(Peppler, 2013). 즉, 수학·언어·과학 등 기존 과목을 가르치면서 컴퓨터를 적극적으로 활용하고 있는 것이다.

CT의 개념 정립 및 발전에 큰 공헌을 한 지넷 윙(Jeanette Wing)은, 다음과 같이 CT가 6가지 특성을 지닌다고 서술하였다(Wing, 2006).

- CT는 단순한 프로그래밍이 아닌 개념적인 해석이다.
- CT는 기계적인 기술(skill)이 아닌 기본원리 분석이다.

<sup>2)</sup> [http://www.youtube.com/watch?v=f35zYy\\_E8KU](http://www.youtube.com/watch?v=f35zYy_E8KU)

<sup>3)</sup> <http://if-blog.tistory.com/4211>

<sup>4)</sup> 서울대 조한혁 교수가 개발하여 영재교육에 사용되는 MAL 프로그램도 페퍼트 교수의 Logo 언어를 사용한다.

- CT는 컴퓨터로서가 아닌 인간으로서 생각하는 방법이다.
- CT는 수학적·공학적 사고의 보완 및 결합이다.
- CT는 인위적인 것이 아닌 자연스러운 생각(idea)이다.
- CT는 우리 모두를 위한 방법이다(for everyone, everywhere).

창의적인 인재 양성이란 목표를 달성하기 위하여 wings 서술한 6가지 특성이 수학에서 가능하려면, CT 기반의 미래형 교육은 (교재와 강의록, 문제집과 해답집, 질문하면 답을 얻고, 궁금하면 찾아가며, 동영상 설명을 통해 교과내용을 이해하는 것은 물론이며) 클라우드 컴퓨팅이 가능한 테크놀로지를 이용하여 여러 측면의 수학 내용을 시각적으로 경험하고 추측하며 직접 계산해보고 시뮬레이션을 하면서 구체적인 답을 구한 후 그 답의 의미를 설명하면서 이해하고, 이를 통하여 자신의 추측이 맞는지 확인 해 볼 수 있는 것이어야 한다. 즉, 배운 내용을 알고리즘과 코딩 그리고 컴퓨팅 기기를 활용한 시각화를 통하여 직관적으로 이해하고 (명령어를 추가로 학습하는 긴 과정 없이) 즉시 실습한 후 제공된 알고리즘을 파악하여 주어진 함수 또는 조건에 해당하는 부분을 고쳐가면서 시뮬레이션 해보며, 자신의 문제를 해결해 나가는 데 사용할 수 있어야 한다.

### 1. 수학교과에서의 CT 교육에 대한 연구 현황

CT 기반 중·고등학교 교과목 구성 방안 관련 국내·외 연구 동향 및 현황은 다음과 같다. 미국과 영국, 호주, 캐나다 등 주요 국가들은 창의적인 인재 양성을 위해 시대의 변화(메가트렌드)와 테크놀로지를 반영한 미래형 교육을 갖추기 위하여, CT 기반의 초·중·고 소프트웨어(SW) 교육을 강화하며 의무화하고 있다. 그리고 오바마 대통령은 2013년 12월 ‘컴퓨터 과학 교육주간’을 기념한 연설에서 “코딩을 배우는 것이 미국의 미래를 위해 중요하다”며 코딩 교육을 강조하였다. 이에 따라 ‘컴퓨터 과학(Computer Science)’ 표준커리큘럼을 초·중등학교에 보급하고, 청소년에게 코딩을 가르치는 ‘Hour of Code(코딩하는 시간)’ 캠페인을 추진하고 있다. 또한 영국의 경우, 카메론 수상은 “국가의 번영을 위해 교육과정 혁신이 필수적이다”라고 선언한 후 초·중등 정보과목을 기존의 활용 중심에서 코딩 중심으로 개편하는 신교육과정을 발표하고 지난 2013년 7월에 CT 교육을 정규 과목으로 채택하였으며, 2014년 9월부터 각 급 학교에 신교육과정을 적용하고 있다<sup>5)</sup>.



[그림 II-1] 모바일 도구를 활용한 CT기반 수학교육

5) 월간 과학창의, 2014년 2월호, Vol.197, p.5. (공)저 한국과학창의재단.

우리나라의 경우, 2012년 이후 수행된 대표적인 수학과 교육 내용 관련 연구로는 「미래 사회 국가 수준 교육과정 방향 탐색 - 수학」(한국교육과정평가원, 2013. 7), 「행복교육, 창의인재 양성을 위한 교육과정, 교수 학습, 교육평가 패러다임 전환」(한국교육과정평가원, 2013. 6), 「초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구」(한국과학창의재단, 2013)를 들 수 있다. 특히 「초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구」에서는 CT에 대한 특성들을 다음과 같이 정리하였다.

*문제해결에 컴퓨터나 다른 도구를 사용할 수 있도록 문제 구성하기, 논리적으로 데이터를 조직하고 분석하기, 모델링이나 시뮬레이션 등의 추상화를 통해 데이터를 표현하기, 알고리즘적 사고를 통해 해결책을 자동화하기, 가장 효율적이고 효과적인 단계와 자원의 조합으로 목표를 달성하기 위한 해결책을 식별하고 분석하며 적용하기, 이러한 문제 해결과정을 다양한 문제들로 일반화하고 전환하기가 포함된다.*

따라서 CT은 아이들의 창의적인 사고 과정과 혁신 능력을 확장시킬 뿐만 아니라, 학생들이 좋은 사고 습관을 기를 수 있도록 하며, 논리적이고 창의적으로 사고하도록 한다고 보았다. CT 기반 교육적 활용에 대한 연구는 최근 활발히 이루어지고 있는 추세인데, 이은경(2013)은 최근 계산적 사고(Computational Thinking)<sup>6)</sup>의 중요성에 관한 인식이 확산됨에 따라 초·중등학생들을 대상으로 계산적 사고 능력 향상을 위한 교육 연구가 활발히 이루어지고 있다고 보고하였다. 이 연구에서는 스크래치를 활용한 창의적 프로그래밍 학습을 설계하고 해당 학습 활동이 중학교 1학년 학생들의 창의성 잠재력 및 계산적 사고 능력 발달에 미치는 영향을 확인하였다. 연구 결과, 학습자들의 창의성 잠재력은 유의하게 증진되었으며, 계산적 사고 능력의 토대가 되는 프로그래밍의 기본 개념과 원리를 습득하였음을 확인하였다. 계산적 사고의 경우 프로그래밍의 기본 개념인 순차, 반복, 조건, 이벤트 처리 및 연산자에 대한 개념 이해 수준이 높게 나타났다. 계산적 사고를 기반으로 한 교과교육 연구 중, 김지현 외(2014)는 계산적 사고를 기반으로 수학, 과학, 음악 분야의 내용을 IT와 융합하여 영재교육을 하는 내용으로 구성하였다. 즉, 실생활 중심의 융합 가능한 주제인 피보나치수열을 주제로 선정하고 계산적 사고 기반 IT 융합형 학습개념도의 흐름에 맞추어 계산적 사고와 관련된 학습요소를 단계별로 적용하여 내용을 구성한 결과, 학생들이 문제 상황을 분석하고 해결해가는 계산적 사고의 과정을 통해 창의적 문제해결력을 기를 수 있음을 확인하였다.

미래의 교육은 선생님이 특정 지식을 전달하는 것이 아니라 학생 스스로 자신의 문제를 해결하는데 필요한 정보를 구하고, 얻은 정보에서 신뢰할 수 있는 것을 골라내고, 그 정보를 활용하여 새로운 지식을 생산하는 능력을 체득할 수 있도록 해야 한다. 이를 위해서 인간의 생각과 디지털 기술을 통합하여 문제를 해결하려는 접근법, 즉 추상화를 통해 문제의 핵심요소를 추출하고 컴퓨팅 기기를 통해 해법을 자동화하는 능력인 CT을 기반으로, 학습자 스스로 문제 해결에 필요한 자료를 추출하고 이를 해결하기 위해 테크놀로지를 활용하는 능력을 갖추는 창의적인 인재 양성 과정이 반드시 필요하다<sup>7)</sup>.

이러한 CT에 대한 요구와 CT을 향상시키려는 노력은 꾸준히 CAS 도구의 적용이라는 형태로 구체적으로 구현되어왔다. 예를 들어, Mathematica, Maple, Math-lap 그리고 Graphic 계산기 등의 활용이 그러하다. 그러나 모바일이 대중화되고 있는 요즘은 오픈소스 기반의 클라우드 컴퓨팅 서버를 활용하여 인터넷(wifi 등)만 연결하

<sup>6)</sup> 컴퓨터 관련 연구 논문 및 문서(이은경, 2013, 김지현 외, 2014 등)에는 CT를 '계산적 사고'로 번역하였으나, 본 연구에서는 2014년 9월 교육부에서 발표한 문·이과 통합형 교육과정 발표문을 참조하고, 클라우드 컴퓨팅이 가능한 테크놀로지의 활용을 중점적으로 다루므로 Computational Thinking을 '컴퓨팅 사고력'으로 번역하였다.

<sup>7)</sup> <http://www.youtube.com/watch?v=IHZxmcP-CHI>

면 어디서나 사용이 가능한 Sage 도구를 이용한 수학교육은 CT를 향상시키는 좋은 도구이다. 2005년 발표된 Sage<sup>8)</sup>는 서버(Server)용 무료 공개 소프트웨어로 자신의 PC에 설치하여 사용가능함은 물론 인터넷 환경만 제공되면 언제 어디서나 사용이 가능하다. 또한 Sage를 이용하여 워크시트(worksheet)<sup>9)</sup>를 제작하고, 그 워크시트에서 수학연산에 적합한 파이썬(python) 언어에 기반을 둔 Sage명령어들을 직접 실행해볼 수 있다<sup>10)</sup>. 특히 Sage의 수많은 명령어 및 새롭게 개발된 함수들은 구글(Google)과 같은 웹 검색 사이트를 이용하여 손쉽게 검색이 가능하며, 검색한 명령어들을 단순히 복사하여, 다음 <표 II-1>에서 소개된 서버를 포함하는 검증된 그리고 무료로 공개된 다양한 Sage 연산 서버에 붙여 넣는 방식만으로도 새로운 수학연산을 할 수 있다. Sage에 대한 관심으로 2012년도 대한수학회 봄 연구발표회에서 국내·외 Sage 사용자들이 모여 제37회 Sage Day<sup>11)</sup> 연구발표회가 운영되기도 하였다.

<표 II-1> 국내외 Sage 서버 목록

위치	서버명	주소
한국방송통신대학교	방송통신대학교 Sage 노트북 서버	<a href="http://sage.knou.ac.kr">http://sage.knou.ac.kr</a>
	방송통신대학교 Sage Cell 서버	<a href="http://mathlab.knou.ac.kr:8080">http://mathlab.knou.ac.kr:8080</a>
성균관대학교	성균관대학교 수학과 Sage 노트북 서버	<a href="http://math1.skku.ac.kr">http://math1.skku.ac.kr</a>
	성균관대학교 Sage 노트북 서버	<a href="http://sagenb.skku.edu">http://sagenb.skku.edu</a>
	성균관대학교 Sage Cell A 서버	<a href="http://sage.skku.edu">http://sage.skku.edu</a>
	성균관대학교 Sage Cell B 서버	<a href="http://sage1.skku.edu">http://sage1.skku.edu</a>
sagemath.com	Official Sage 노트북 서버	<a href="http://www.sagenb.org">http://www.sagenb.org</a>
	Official Sage Cell 서버	<a href="http://sagecell.sagemath.org">http://sagecell.sagemath.org</a>
	Sage-Math Cloud 서버	<a href="https://cloud.sagemath.com">https://cloud.sagemath.com</a>

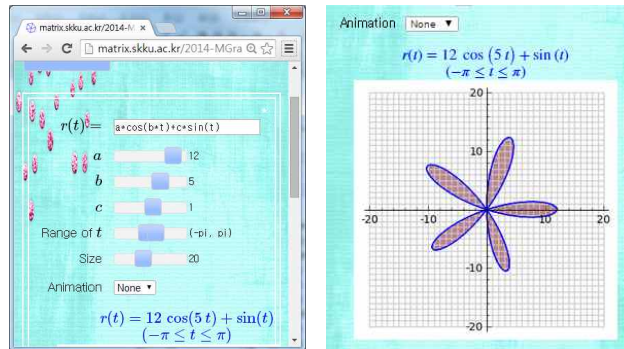
8) 무료 오픈소스 수학소프트웨어 System for Algebra and Geometry Experimentation <http://www.sagemath.org>

9) 크롬 <http://www.google.com/chrome/> 브라우저에서 Sage를 이용해 수학연산을 실행할 수 있는 각 문서.

10) Sage 사용법: <https://www.youtube.com/watch?v=BCv8jPDsQ6k>

11) <http://wiki.sagemath.org/days37>

다음 예시는 크롬 브라우저에서 주소 <http://matrix.skku.ac.kr/2014-MGrapher-Apk/knou-knowls/m-sage-grapher-polar.html> 를 클릭하고, Sage를 이용해 [그림 II-2] 함수  $r(t) = a \cos bt + c \sin t$ 를 그린 후, 매개변수 값과 시간을 다양하게 변화시키면서 수식으로 꽃잎을 그려보는 시뮬레이션 과정이다.



[그림 II-2] 매개변수 값과 시간을 변화시키면서 꽃잎을 그려보는 시뮬레이션

## 2. Sage를 활용한 수학교과에서의 CT 교육

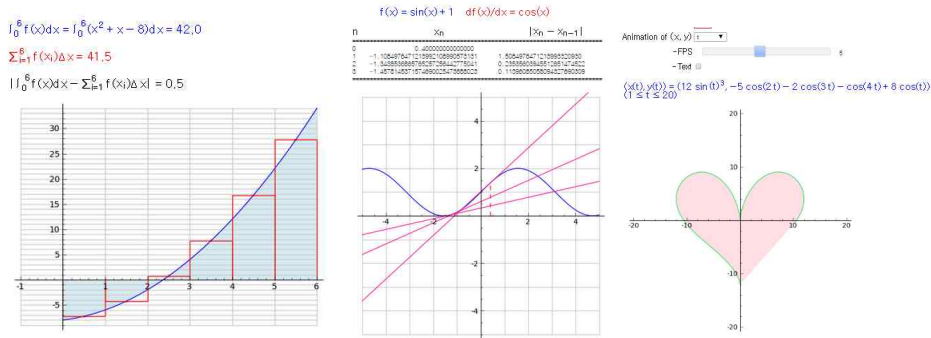
본 연구는 2005년 발표된 Sage 도구를 활용한 수학교육을 통하여 학생들의 CT를 크게 향상시킬 수 있음을 확인하는 과정이다. 지난 4반세기 동안 CAS(Computer Algebra System) 도구는 수학교과에서의 CT를 향상시키는데 구체적이고 다양한 형태로 활용되어 왔다. 특히 지렴하기에 경제적으로 부담이 덜 가는 그래픽 계산기에 명령어 코드를 입력하고 그 결과를 확인하는 방법이 중심이었다([그림 II-3]).



[그림 II-3] TI를 이용한 수학 개념의 시뮬레이션

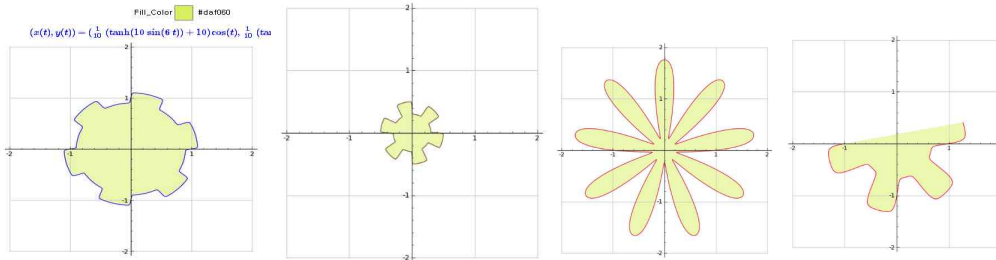
그러나 현재는 클라우드 컴퓨팅을 이용한 울프램 알파(Wolfram alpha)나 웹워크(WebWork), 스마트폰 어플을 이용하는 형식 등이 혁신적으로 발전해 왔다. 즉, 문제해결과정에서 추상화를 통해 문제의 핵심요소를 추출하고 컴퓨팅 기기를 통해 해법을 자동화하는 과정인 CT 교육을 수학교과가 가장 적극적으로 주도해 왔다는 의미이다. 이러한 흐름의 연장선으로 본 연구는 교육환경의 변화 특히 변화된 모바일 교육환경에 맞는 클라우드 컴퓨팅을 이용한 새로운 CT 기반 수학교육의 모델을 Sage를 이용하여 제시한다.

(1) **수학개념의 시각화** : 시각화는 학생들이 그 개념을 직접 눈으로 확인할 수 있도록 하여 이론 전개를 직관적으로 이해하고 보다 흥미롭게 학습하는 교육환경을 제공한다. 더구나 애니메이션 기능 등이 접목된 동적인 시각화는 수학적 개념의 전개과정을 이해하고 예측하는 데 많은 도움을 줄 수 있다(류희찬·이지요, 1993). 따라서 시각화는 앞서 서술한 CT의 6가지 특성 중 개념적 해석을 갖게 하는 데 중요한 역할을 한다. 아래 [그림 II-4]는 Sage 그래퍼(<http://matrix.skku.ac.kr/grapher-html/sage-grapher.html>)를 이용하여, 면적으로 구하는 구분구적법, 근을 구하는 뉴우튼의 해법, 매개변수 함수를 이용하여 심장을 그리는 과정을 동영상으로 보여준다.



[그림 II-4] Sage Grapher를 이용한 함수의 시각화 (Kim · Lee · Sun, 2013)

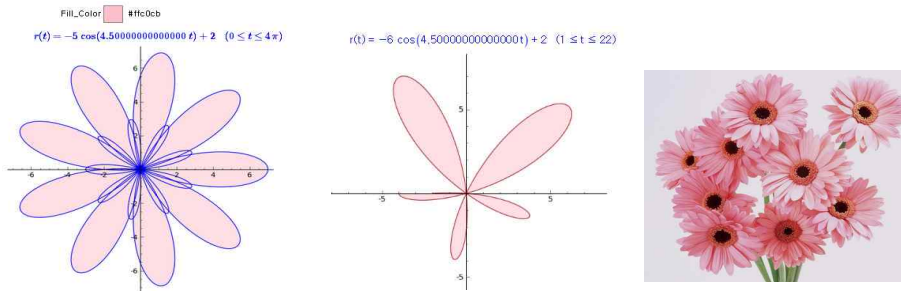
(2) **시뮬레이션** : 수학적 개념을 보고 느끼는데 그치지 않고 웹상의 수학 실습실에서 마우스와 키보드를 이용하여 자신의 수학 문제와 관련한 직접적인 조작이나 입력을 통하여 시뮬레이션 해 봄으로써 주어진 문제에 대한 깊은 이해와 예측이 가능하도록 한다. 이를 통하여 의사결정에 결정적인 근거 제시가 가능한 인재를 양성할 수 있다(이상구·장지은·김경원, 2013). 따라서 시뮬레이션의 특성은, 앞서 서술한 CT의 6가지 특성 중 수학적·공학적 사고의 보완 및 결합을 만족한다. 한 예로, 매개변수 함수  $x(t) = a + \frac{1}{b} \tan(b \sin ct) \cos t$ ,  $y(t) = a + \frac{1}{b} \tan(b \sin ct) \sin t$  을 크롬브라우저에서 Sage 그래퍼를 이용하여 그리면 아래와 같은 톱니바퀴(Gear)가 얻어 진다<sup>12)</sup>. 그리고 변수  $a, b, c$ 의 값에 따른 애니메이션 변화를 통해 각 변수가 톱니바퀴 모양을 어떻게 결정하는지 알 수 있다. 예를 들어  $a$ 의 값에 따라 크기가 변화되고,  $b$ 의 값에 따라 톱니의 굴곡이 결정되며,  $c$ 의 값에 따라 톱니의 수가 바뀐다(그림 II-5). 이렇게  $a, b, c$  각각의 변수를 조절함으로써 각 물체의 구성요소 및 모양을 결정하는 것들을 알 수 있다. 주석의 주소에 들어가 ‘Animation’을 변수  $a, b, c, t$ 별로 선택하여 값을 변화 시키면 변수에 따른 변화와 그려지는 과정을 확인할 수 있다.



[그림 II-5] Sage Grapher를 이용하여 다양한 톱니바퀴를 디자인 하는 모습

12) 톱니바퀴 : <http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/sage-grapher-Gear-Curve.html>

같은 방법으로 웹 주소 <http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/sage-grapher-flower.html>에서 꽃을 표현하는 매개변수 식  $r(t) = a + b + \cos(ct)$ 의 매개변수를 변화시키면 잎의 개수가 변하는 것을 확인할 수 있으며, 'Animation' 선택 박스에서 시간  $t$  를 선택하면 시간  $t$  가 0에서 22까지 변화에 따라 그래프가 그려지는 과정을 직접 확인할 수 있다([그림 II-6]).



[그림 II-6] Sage Grapher를 이용하여 꽃을 그리는 과정을 확인하는 모습

이런 과정을 통하여 교과 시간에 배운 수학적 지식에 코딩 능력을 보태주면, 실제 사회에서 필요한 CT 기반의 창의적 인재를 배출하는 것이 가능해 진다. 즉, 수학적 지식에 코딩실력과 상상력을 보태 공작기계 및 예술적 상품의 디자인과 생산이 가능한 인재가 양성 된다는 것이다.

[그림 II-7] 함수를 그리고, 접선을 구하고, 호의 길이를 구하고, 합성함수를 그리는 도구



더불어 대학 수학교육뿐 아니라 중등 수학교육에서도 형식적이고 추상적인 수학결과물을 학생들이 직접 실행하고 확인해보는 시뮬레이션이 가능하다. 더 많은 내용은 아래 주소를 포함하여 본 원고에서 소개한 다양한 웹 주소에서 직접 확인할 수 있다.

[CT 기반 방송통신대 수학실습실 사이트]

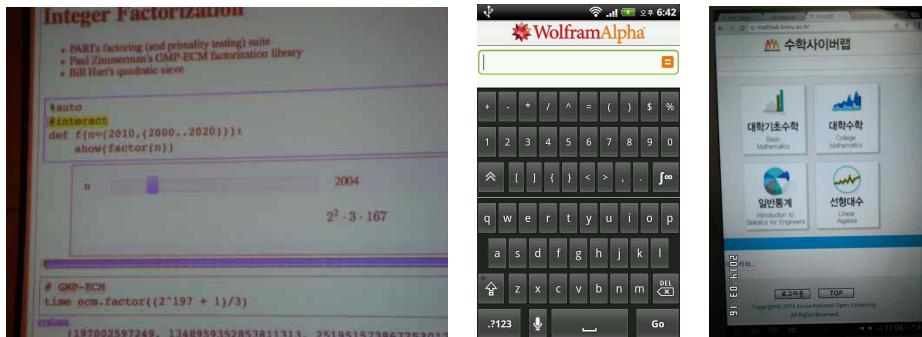
선형대수학: <http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/>

통계학: <http://matrix.skku.ac.kr/2014-Stat-0/Week-4.htm>

미적분학: <http://matrix.skku.ac.kr/2014-Calculus-0/knou-cal-w1.htm>

기초수학: <http://matrix.skku.ac.kr/2014-BM-0/Lecture2.htm>

(3) 복잡한 계산 수행 : 반복되는 복잡한 계산을 컴퓨팅 기기가 대신하여 해법을 자동화하므로 문제를 이해하고 추상화하여 문제 해결에 대한 아이디어에 집중할 수 있도록 한다. 단순한 문제에서부터 실제 현실에서 만나는 복잡한 함수의 계산까지 두려움 없이 해결할 수 있다<sup>14)</sup>. 따라서 복잡한 계산 수행을 CT를 이용하여 수행하는 것은 앞서 서술한 CT의 6가지 특성 중 자연스러운 생각(idea)을 이끌어내는 특성을 만족 한다.



[그림 II-8] Sage 및 Wolfram Alpha를 활용한 복잡한 수학 연산 수행과 사이버랩

따라서 CT 기반 수학교육은 학습자에게 수학적 시각화를 제공하고 복잡한 계산 대신 핵심 아이디어에 집중하도록 함으로써, 수학개념의 이해도 향상에 기여할 수 있을 뿐 아니라 스스로 문제해결을 위한 시뮬레이션을 해볼 수 있도록 함으로써 자기주도적 학습을 지원해 줄 수 있을 것이다. 또한 스마트 기기를 적절히 활용하여 교육 장소와 시간에 구애받지 않는 미래형 교육환경을 구축할 수도 있다. 이러한 교육 환경과 경험의 제공은 점차 우리나라를 이끌어 갈 인재들에게 미래를 예측하면서 연구 및 산업현장에서 실제 활약하는 것과 같은 교육 경험을 제공하게 되며, 따라서 CT 기반 수학교육은 국가경쟁력을 이끄는 창조경제에 기여하는 좋은 모델이 될 수 있다.

13) 접선 : <http://www.GeoGebratube.org/student/m80386>

14) 수학 모델링과 함수: <http://matrix.skku.ac.kr/2014-Calculus-0/knou-cal-w1.htm>

### 3. Sage를 활용한 CT 기반 미적분 강의<sup>15)</sup> 모델 설계의 예시

이상구·신준국·김경원(2014)이 소개한 ‘스토리텔링 수학 교과서에서 공학적 도구의 활용과 미분적분학 단원에 관한 개발 사례’<sup>16)</sup>에서 볼 수 있듯이 Sage는 CT 기반 교육에 적극적으로 활용될 수 있다. 다음은 Sage를 활용하여 함수의 적분 관련 문제를 CT 기반으로 해결하는 것이다. 아래 주소<sup>17)</sup>를 크롬 브라우저에서 클릭하면 실습이 시작된다. 아래 주어진 코드에서 함수나 조건을 바꾸어 주면, 새로운 코드가 완성되고 클릭하면 그 결과를 직접 확인할 수 있다. 이를 통하여 자연스럽게 코딩 교육인 CT 교육이 이루어지게 된다.

- 1) 부정적분 : 복잡한 함수도 명령어 ‘integral(f(x))’로 부정적분의 결과를 빠르게 얻을 수 있다.

[문제]  $f(x) = (x+1)^{10}$ 일 때  $\int f(x)dx$ 를 구하여라.

1	<code>f(x)=(x+1)^10</code>
2	<code>integral(f(x))</code>

답:  $\frac{1}{11}(x+1)^{11}$  (즉,  $\frac{1}{11}(x+1)^{11}$ 이 얻어진다)

- 2) 정적분 : 지정된 범위를 추가한 명령어 ‘integral(g(x), 1, 3)’로 정적분의 결과를 빠르게 얻을 수 있다.

[문제]  $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ 를 구하여라.

1	<code>g(x)=x^3*sqrt(x^2-1)</code>
2	<code>integral(g(x), 1, 3)</code>

답:  $\frac{29}{15}(16\sqrt{2})$  (즉,  $\frac{29}{15}(16\sqrt{2}) = \frac{464}{15}\sqrt{2}$ 이 얻어진다)

- 3) 곡선사이의 넓이 : 정적분할 변수를 y로 정하기 위해 명령어 ‘var(‘y’)’를 추가하여 y에 대해 정적분 한다.

[문제] 곡선  $\ln x$ 와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

1	<code>var('y')</code>
2	<code>integral(exp(y)-exp(1)*y, 0, 1)</code>

답:  $\frac{1}{2}e - 1$  (즉,  $\frac{1}{2}e - 1$ 이 얻어진다)

위의 명령어 ‘integral(exp(y)-exp(1)\*y, 0, 1)’는, 곡선  $y = \ln x$  위의 점  $(t, \ln t)$ 에서의 접선의 방정식

<sup>15)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/index.html>

<sup>16)</sup> <CT 기반의 스토리텔링> 미적분학 개념 강의 : <http://matrix.skku.ac.kr/Calculus-Story/index.htm>

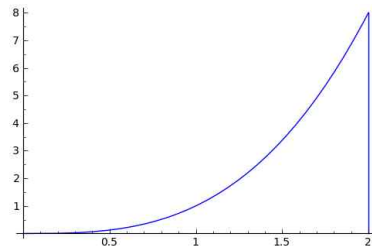
<sup>17)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/CT/CT-Math-Sage-Lab.htm>

$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$ 이 원점을 지나는 직선의 방정식  $y = \frac{1}{e}x$ 과 곡선  $y = \ln x$  그리고  $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이인  $\int_0^1 (e^y - ey)dy$ 를 구한 것이다.

- 4) 회전체의 부피 : 회전체의 부피를 구하기 전에 명령어 ‘plot(x^3, (x, 0, 2))’를 이용해 주어진 함수를 그래프로 확인할 수 있다.

[문제]  $y = x^3$ 과  $x = 2$ ,  $x$ 축으로 둘러싸인 도형을  $x$ 축 둘레로 회전시켜서 생긴 회전체의 부피  $V$ 를 구하여라.

```
1 s=plot(x^3, (x, 0, 2))
2 s+=line([(2, 0), (2, 8)])
3 s.show()
```



```
1 pi*integral(x^6, 0, 2)
```

답:  $128/7 \cdot \pi$  (즉,  $\frac{128}{7}\pi$ 이 얻어진다)

- 5) 함수  $y = f(x)$ 에서  $n$ 의 값에 따른 구분구적법에 의한 부분합 값의 변화를 알 수 있다. 예를 들어, 함수  $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에서  $a, b, c$ 를 각각 1, 2, 1로 정하고  $n$ 의 값을 달리하면 (아래의 예는  $n = 40$ 이다) 그래프와 구분구적법이 수렴하는 과정과 극한값 모두를 시각적으로 직접 확인할 수 있다<sup>18)</sup>.

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a$   1

$b$   2

$c$   1

$n$   40

Range of  $x$   (0, 5)

$x$ -range of  $Y$   (-1, 7)

$y$ -range of  $Y$   (-1, 44)

Grid

Axis

Endpoint rule

Animation

- FPS  5

$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x^2 + 2x + 1)dx = 71.6666666667$

$\sum_{i=1}^{40} f(x_i)\Delta x = 71.66015625$

$|\int_0^5 f(x)dx - \sum_{i=1}^{40} f(x_i)\Delta x| = 0.00651041666667$

<sup>18)</sup> [http://matrix.skku.ac.kr/grapher-html/sage-grapher-riemann\\_sum.html](http://matrix.skku.ac.kr/grapher-html/sage-grapher-riemann_sum.html)

지금까지 다항함수의 정적분에 대한 Sage를 활용한 CT 기반 수학교육의 내용 일부를 확인하였다. 즉 이러한 지도 내용과 과정에서 학생들은 수학개념을 시각화하면서 개념적 해석을 하고, 시뮬레이션을 통해 수학적·공학적 사고를 보완하며, 복잡한 계산을 컴퓨팅 기기가 대신 수행함으로써 자신의 아이디어를 더욱 자연스럽게 이끌어 내는 등의 기회를 통해 CT의 신장이 가능했다. 그리고 Sage를 활용한 수업에서 학생들은 명령어를 추가로 학습하는 과정 없이 배운 내용을 알고리즘과 코딩 그리고 컴퓨팅 기기를 활용하여 즉시 실습한 후 제공된 알고리즘을 파악하여 주어진 함수 또는 조건에 해당하는 부분을 고쳐가면서 시뮬레이션 해보고 원하는 자신의 문제를 해결해 나가는 과정에서 교과 지식에 대한 이해를 높이며 동시에 코딩 실력을 쉽게 신장시킬 수 있었다.

더불어 Sage를 활용한 CT 기반 수학교육 환경을 활용하면 기존의 교과서에서는 다루기 어려운 다양한 함수의 미적분, 예를 들어,  $y = (x+1)^{10}$ ,  $y = x^3 \sqrt{x^2-1}$ ,  $y = e^y - 3y + \log y$  등을 직접 그려보고 부정적분 및 정적분과 같은 복잡한 과정의 결과를 빠르게 구하여 자신의 추측이 맞는지 쉽게 확인할 수 있었다. 더 나아가 교과서를 활용한 수업에서 구현하기 어려운 입체도형에 대해서도 CT 기반의 수학 수업에서는 컴퓨터를 활용해 입체도형을 구현하면서 다양한 각도에서 입체도형의 모습을 보여 줄 수 있어 공간 지각 능력이 부족한 학생도 쉽게 이해시킬 수 있다. 예를 들어 대부분의 교과서에는 입체도형의 부피를 계산하는 예시가 원뿔, 정사각뿔 등으로 제한적이나 CT 기반의 수학 수업에서는 구분구적법을 활용하여 다양한 입체도형의 부피를 계산할 수 있고 구분구적법을 활용한 입체도형의 부피를 구하는 수학적 본질의 의미를 학생들에게 정확하고 다양하며 쉽게 전달할 수 있다<sup>19)</sup>.

앞서 확인한 모든 CT 관련 도구는 PC 뿐만이 아니라 모바일 기기에서도 사용가능하다는 것이 또 하나의 큰 특징이다. 즉, 여러 웹사이트의 예에서 보았듯이 Sage는 모바일 기기(스마트폰, 아이패드, 태블릿 등)에 프로그램을 따로 설치할 필요 없이 오픈소스 기반의 클라우드 컴퓨팅 서버를 활용하여 인터넷(wifi 등)만 연결되면 어디서나 접속하여 미적분, 선형대수, 공학수학 등을 학습하고 3D 프린팅을 할 수 있어, 모바일이 대중화되고 있는 시기에 CT를 향상시키기에 효과적인 도구임을 확인하였다(Lang · Lee · Lee, 2014).

### III. 요약 및 결론

본 연구에서 소개한 CT 기반의 수학교육 프로그램의 예시들은 2012년과 2013년 대학 수학교육 현장에서 실제 적용되었고 적지 않은 성과를 보여주었다. 한 예로 앞서 시뮬레이션을 위한 Sage 활용에서 소개한 [CT 기반 방송통신대 수학실습실 사이트]는 현재 방송통신대 프라임 칼리지 수학실습실로 이용되고 있다. 특히 CT 기반의 수학교육은 학생들이 이미 학습한 수학적 지식을 주어진 코드를 이용하여 시각화하고 계산을 확인하며 함수와 조건을 바꾸는 과정에서 상호반응을 하면서 수학을 깊이 이해하도록 그리고 21세기의 컴퓨터 언어인 파이썬 언어를 통한 코드 교육이 가능하며 더불어 알고리즘 이해와 함께 활용 능력이 향상되는 CT 교육의 목적을 달성하는 것이 가능함을 보여 준다<sup>20)</sup>.

<sup>19)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm>

<sup>20)</sup> CT 기반 중·고등학교 수학 교과목 교수·학습 과정에서 테크놀로지 및 교과 교실의 활용은 다음 사항에 유의한다.

- 교수·학습의 전 과정을 통하여 적절한 테크놀로지를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.
- 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 테크놀로지를 효과적으로 활용한다.
- 구체적인 조작과 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하고 수학 주제에 대해 모둠으로 토론함으로써 수학 학습의 효율을 높일 수 있도록 수학 교과 교실을 구축하여 활용한다.
- 문제해결과정에서 Computational Thinking이 문제의 분석, 문제 해결방법 탐색, 문제 해결방법 설계, 해결 및 구현 등의 전 과정에서 서로 유기적으로 사용될 수 있도록 한다.

스마트폰의 대중화 속에서 모바일 기기를 이용한 CT 기반의 수학교육은 그 어느 때보다도 중요하다. 즉, 모바일 기기를 소유한 학생들의 비율이 계속 증가하는 상황에서 PC 기반의 고가의 소프트웨어나 한정된 기능으로 제한을 갖는 HP-Casio 등의 그래픽 계산기를 대체하는 모바일 기기를 이용함으로써 학생들은 기존의 교실에서 이루어지던 수학학습에 더하여 모바일 기기를 활용하여 사이버 실습실에 접속하면서 언제, 어디서나 수학 계산을 할 수 있고, 누구와도 교류할 수 있다. 따라서 자신의 수준에 맞게 학습 및 교육을 받을 수 있고, 그것을 바탕으로 기존의 수학교육의 한계를 넘어서는 CT 기반의 수학교육의 패러다임을 제공할 수 있다.

CT 기반의 수학교육은 모바일 환경이 대중화되고 있는 시점에서 클라우드 컴퓨팅이 가능한 테크놀로지(특히 Sage 도구)를 적절히 사용하여 수학적 개념을 시각화하고 시뮬레이션을 통하여 변화 상황을 예측하며 복잡한 계산을 대신 수행하므로 학습자가 문제의 핵심요소를 추출하여 다양한 각도에서 문제를 해결하도록 도와 줄 수 있다. 이런 교육의 경험은 수학을 실제로 적용하는 수학적 소양을 갖춘 인재들을 배출하는 시작점으로 향후 미래 산업 분야, 특히 ICT 분야에 필요한 수학적 역량을 갖춘 융합형 인재를 양성하는데 가장 효과적인 방법 중 하나로 긍정적인 역할을 할 것을 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 김지현·김태영 (2014). CT 기반 초등 영재를 위한 융합형 교육내용 구성 방안, 한국컴퓨터교육학회 학술발표대회 논문집, **18(1)**, 53-57.
- Kim, J. H. & Kim, T. Y. (2014). Convergence CT-based educational content for the Gifted Elementary Composition Strategies, *The Korean Association of Computer Education*, **18(1)**, 53-57.
- 류희찬·이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화의 중요성과 LOGO, 수학교육학연구, **3(1)**, 75-85.
- Lew, H. C. & Lee, J. Y. (1993). Visualization in Mathematics Education and LOGO, *The journal of educational research in mathematics*, **3(1)**, 75-85.
- 이상구·신준국, 김경원 (2014). 스토리텔링 수학 교과서에서 공학적 도구의 활용과 미분적분학 단원에 관한 개발 사례, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **28(1)**, 65-79.
- Lee, S. G., Shin, J. K. & Kim, K. W. (2014). A Case Study of Perceptions on Storytelling Mathematics Textbooks with Computer Algebra System, *Communications of mathematical education*, **28(1)**, 65-79.
- 이상구·장지은·김경원 (2013). Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual - Dynamic 자료 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **27(1)**, 113-123.
- Lee, S. G., Jang, J. E. & Kim, K. W. (2013). Visualization of Linear Algebra concepts with Sage and GeoGebra, *Communications of mathematical education*, **27(1)**, 113-123.
- 이은경 (2013). 계산적 사고향상을 위한 창의적 스크래치 프로그래밍 학습, 컴퓨터교육학회 논문지, **16(1)**, 1-9.
- Lee, E. K. (2013). Computer Education Curriculum and Instruction : Creative Programming Learning with

---

○ 수학 학습 시 학생 스스로 학습 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 스스로 평가하는 자기 주도적 학습 능력을 신장시킨다.

- Scratch for Enhancing Computational Thinking, *The Journal of Korean association of computer education*, **16(1)**, 1-9.
- 한국과학창의재단 (2013). 초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구, 공고 제2013-087호.
- Kofac (2013). *Basic Research for the introduction of Computational Thinking in elementary and secondary stages*. 2013-087.
- Retrieved from [http://pms.kofac.re.kr/com/FileDown.do?atchFileId=FILE\\_00000000010130&fileSn=5](http://pms.kofac.re.kr/com/FileDown.do?atchFileId=FILE_00000000010130&fileSn=5).
- 한국교육과정평가원 (2013, 6). ‘행복교육, 창의인재 양성을 위한 교육과정, 교수 학습, 교육평가 패러다임 전환’, 경제 인문사회연구회 미래사회협동연구총서 “창조경제 구현방안 연구”, 일련번호: 13-01-22.
- Korea institute for curriculum and evaluation (2013, 6). ‘Education for happiness, Curriculum for producing creative talent, Paradigm shift in evaluation’, Council for Economics, Humanities and Social Science, Cooperative Research Series: 13-01-22.
- Retrieved from [http://www.nrcs.re.kr/webmodule/homeboard?act=download&year=2013&file\\_seq=4240](http://www.nrcs.re.kr/webmodule/homeboard?act=download&year=2013&file_seq=4240).
- 한국교육과정평가원 (2013, 7). ‘미래 사회 대비 국가 수준 교육과정 방향 탐색 - 수학 (교육부 정책과제)’, 교육부.
- Korea institute for curriculum and evaluation (2013, 7). National Standard of Curriculum Research - Mathematics, Ministry of Education.
- Retrieved from [http://www.prism.go.kr/homepage/researchCommon/downloadResearchAttachFile.do;jsessionid=13E6A9707F950EC33CAC87941AAC103A.node02?work\\_key=001&file\\_type=CPR&seq\\_no=001&pdf\\_conv\\_yn=N&research\\_id=1342000-201300035](http://www.prism.go.kr/homepage/researchCommon/downloadResearchAttachFile.do;jsessionid=13E6A9707F950EC33CAC87941AAC103A.node02?work_key=001&file_type=CPR&seq_no=001&pdf_conv_yn=N&research_id=1342000-201300035).
- Kim, K. W., Lee, S. G. & Sun, S. W. (2013). Modeling of Mobile Sage and Graphing Calculator, *Journal of Modern Education Review*, **3(12)**, 918-925.
- Lang, V., Lee, S. G. & Lee, J. Y. (2014). A Mobile, Open-Source 2D and 3D Printing Graphic Creation CAS Tool of Mathematics Courses, *Journal of US-China Education Review A*, **4(8)**, 569-580.
- Peppler, K. (2013). STEAM-Powered Computing Education: Using E-Textiles to Integrate the Arts and STEM, *IEEE Computer*, **46(9)**, 38-43.
- Wing, J. M. (2006). Computational Thinking, *Communications of the ACM*, **49(3)**, 33-35. Retrieved from <https://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/wing/www/publications/Wing06.pdf>.

## Improving Computational Thinking Abilities Through the Teaching of Mathematics with Sage

**Kyung-Eun Park**

Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Jongno-gu Sungkyunkwan-ro 25-2, Korea  
E-mail : medu1234@hanmail.net

**Sang-Gu Lee<sup>†</sup>**

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea  
E-mail : sglee@skku.edu

Recently in major industrial areas, there has been a rapidly increasing demand for ‘Computational Thinking’, which is integrated with a computer’s ability to think as a human world. Developed countries in the last 20 years naturally have been improving students’ computational thinking as a way to solve math problems with CAS in the areas of mathematical reasoning, problem solving and communication. Also, textbooks reflected in the 2009 curriculum contain the applications of various CAS tools and focus on the improvement of ‘Computational Thinking’.

In this paper, we analyze the cases of mathematics education based on ‘Computational Thinking’ and discuss the mathematical content that uses the CAS tools including Sage for improving ‘Computational Thinking’. Also, we show examples of programs based on ‘Computational Thinking’ for teaching Calculus in university.

---

\* ZDM Classification : M15, N80, U65

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70

\* Key Words : Computational thinking, Teaching of mathematics, CAS, Mobile math education, Sage

† Corresponding author