

초등학생과 중학생의 수감각 문제해결 방법에 대한 분석

김 지 연 (경북대학교 대학원)

현 은 정 (시지고등학교)

김 성 경 (울산중앙고등학교)[†]

수학교육에서 학생들의 수감각 발달을 강조하고 있지만 이에 대한 연구는 부족한 실정이며 초등학생에 국한된 경우가 많다. 이에 본 연구는 초등학생과 중학생을 대상으로 수감각 문제를 해결하는 방법을 분석함으로써, 수감각 지도 방향에 대한 시사점을 제공하고자 하였다. 이를 위해 본 연구에서는 문제를 해결하는 방법으로 수감각을 활용하는 방법과 알고리즘을 활용하는 방법으로 분류하고, 검사지를 이용하여 학생들의 반응을 분석하였다. 그 결과 중학생들이 초등학생들에 비해 수감각 검사 점수가 높았으며, 문제해결 방법 중 수감각을 활용하는 비율도 높았다. 또한 성취도가 높은 학생들은 수감각과 알고리즘을 모두 활용하였으나 성취도가 낮은 학생들은 알고리즘을 활용하여 문제를 해결하려고 하는 경향이 강했다. 그리고 성취도가 높은 학생들은 초등학생에 비해 중학생이 상대적으로 수감각을 더 많이 활용하였으나, 성취도가 낮은 학생들끼리는 차이가 없었다. 마지막으로 수감각 구성 요소별로 수감각을 활용하는 비율에 차이가 있는 것으로 나타났다.

I. 서론

2009개정 교육과정에 따르면 수와 연산 영역에서 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강조하고 있다. 또한 사칙 연산의 계산 결과를 어렵한 후 어렵한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다(교육인적자원부, 2009). 이처럼 수와 연산의 영역에서 뿐만 아니라, 더 나아가서 수학 전반에서 수감각의 중요성이 강조되고 있다. 또한 현대사회에서는 컴퓨터나 계산기와 같은 새로운 도구를 사용하면서 기업의 수익이나 스포츠 경기에 있어 수천분의 1초까지 기록을 측정하는 등 더 큰 범위의 수를 경험하게 되고, 그래프나 설문조사와 같은 다양한 상황에서 수를 접하게 되므로 학생과 성인 모두 과거보다 더 높은 수준의 수감각이 요구된다.

수감각은 수에 대한 직관적인 느낌, 수들 사이의 관계에 대한 이해, 수와 관련된 상황에서 다양한 수 사용과 해석, 효율적인 계산 능력 및 어렵이나 암산 등의 적절한 선택 등을 포함한다(방정숙, 2005). 수감각이 풍부한 학생은 수 사이의 관계와 수와 연산 사이의 관계에 대해 자신이 이해하고 있는 것을 문제해결 과정에 이용할 수 있을 뿐만 아니라 주어진 과제에 따라 보다 효과적인 방법을 찾는 능력을 가지고 있다. 하지만 많은 학생들은 수에 대한 깊은 이해 없이 알고리즘을 기계적으로 적용하고 지필계산만 능숙하게 수행하여 자신이 구한 해가 문제에 적절한지 검증하지 못하거나 그 해의 의미를 이해하지 못하는 경우가 많다(선춘화, 2005). 그러므로 학생들이 기계적으로 수의 크기를 단순히 비교하는 능력이나 알고리즘을 적용하는 데에서 나아가 수에 대한 좋은

* 접수일(2014년 10월 10일), 심사(수정)일(2014년 11월 1일), 게재 확정일(2014년 12월 1일)

* ZDM 분류 : C33

* MSC2000 분류 : 97C30

* 주제어 : 수감각, 수감각 구성 요소, 알고리즘, 문제해결 방법

[†] 교신저자 : biblemany@hanmail.net

감각을 가질 수 있도록 수학교과서나 많은 연습문제 등을 통해서 계산 기능만을 기르게 하기 보다는 수와 연산 영역의 다양한 계산 상황과 관련하여 학생들이 수감각을 잘 활용할 수 있도록 권장하는 환경을 마련하는 학교 수학에서의 노력이 필요하다. 수감각은 학교수학에서 뿐만 아니라 수와 관련된 다양한 의사결정이 필요한 일상 생활에서도 중요하므로 숫자를 배우기 시작하는 아동기에만 필요한 기술이 아닌 삶 전체의 모든 연령기에 필요한 수학적 능력이면서 동시에 모든 수 관련 활동의 기초가 된다. 따라서 초등학생들을 대상으로 한 수감각에 대한 연구(방정숙, 2005; 선춘화, 2005; 이점미, 2005; 성승현, 정찬식, 노은환, 2008)와 수학학습장에 판단의 도구로 수감각을 사용하는 연구(김애화, 2006)만큼 수감각이 지속적으로 필요한 중학생들의 수감각에 대한 연구 및 초등학생과 중학생의 수감각 발달 정도를 알아보는 연구도 필요하다. 또한 NCTM(1989)은 중학교에서 백분율과 수감각의 이해를 개발하는 것에 관심을 더 가져야 한다고 제안하였고, NCTM(2000)은 6~8학년의 학생들은 문제의 상황을 고려하여 정확한 답이 필요한지 아니면 어렵셈이 필요한지 파악하여 암산, 필산, 계산기 사용 중에서 적절한 것을 선택할 줄 알아야 함을 강조했다. 따라서 우리나라에서도 중학생들이 수감각과 알고리즘을 적절하게 활용하고 있는지에 대한 연구가 필요하다.

선행 연구에 따르면 초등 수학교육에서 가장 큰 비중을 차지하고 있는 것이 수와 연산 영역이며 학생들의 풍부한 수감각 형성이 주된 목표지만, 초등학생들은 수감각을 활용하기 보다는 알고리즘을 활용하여 계산을 하려고 하는 성향이 강하며, 이는 계산이 불필요하거나 비효율적인 상황에서도 일관되게 나타난다고 하였다. 그리고 수감각 구성 요소에 따라 학생들의 수감각 활용에 차이가 있다고 하였다. 본 연구에서는 이러한 경향이 중학교에서도 계속 되는지 혹은 학년이 올라가면서 자연스럽게 수감각이 길러지는지 알아보기 위하여 초등학생과 중학생의 수감각 활용 정도를 함께 분석하였다.

교사는 학생들이 문제의 답을 구했다고 해서 수감각을 활용했는지, 알고리즘을 활용했는지 구별하기 어렵다. 풀이 과정의 확인을 통해 학생들이 수감각을 활용하는 여부를 파악할 수 있으므로 학생들의 수감각 문제의 해결 방법에 대한 면밀한 분석이 필요하다. 본 연구에서는 수감각을 적절히 사용하여 문제를 해결하는 방법과 수감각으로 해결할 수 있는 문제를 알고리즘을 적용하는 계산 기능을 사용하여 문제를 해결하는 방법으로 수감각 문제의 해결 방법을 분류하였다. 이 분류를 바탕으로 초등학교 6학년과 중학교 2학년 학생들의 문제해결 방법, 수감각 검사 점수의 높고 낮음에 따른 문제해결 방법, 수감각의 구성 요소에 따른 문제해결 방법을 분석하여 수감각의 지도 방향에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수감각(Number Sense)

수와 관련된 활동에서 기본이 되는 수감각 발달이 강조되면서 수감각의 중요성을 인식하고 있는 많은 연구자들에 의해 수감각은 다양하게 정의되고 있다. 수감각은 수를 표현하는 수학 세계와 실제 세계를 자연스럽게 넘나들 수 있고, 수를 조작하기 위한 자신만의 절차를 고안할 수 있으며, 목적에 맞는 다양한 방법으로 수를 표상할 수 있고, 기준점이 되는 수나 수 패턴을 인식할 수 있으며, 수의 크기에 대한 좋은 감각을 가지고 있고, 전반적인 수의 오류를 인식할 수 있을 뿐만 아니라 수 문제 또는 표현에 대한 일반적인 성질에 대하여 어떤 분명한 계산 없이 합리적인 방법으로 생각할 수 있는 능력이다(Case, 1998). 수감각은 근본적으로 수에 대한 유동성과 유연성을 말한다(Gersten & Chard, 1999). 넓은 의미에서 수감각은 전통적으로 배운 알고리즘을 현실에 적용할 수 있는 능력, 즉 인간이 수와 수관계를 이해하고 비정형적인 수학 문제를 해결할 수 있도록 하는 수 정보의 잘 조직된 개념적 프레임워크라고 정의할 수 있다(Bobis, 1996). 이런 의미에서 수감각은 학교수학에서 수와 관련된 활동에서 뿐만 아니라 학교 밖에서 접하게 되는 수와 관련된 다양한 비정형적인 문제를 해결하기 위해 필요한

능력이다.

좋은 수감각을 가진 학생들은 수와 연산 영역에서 뿐만 아니라 수학교과외의 전반적인 영역의 문제해결에서 중요한 역할을 하는 암산(Hope & Sherrill, 1987; Trafton, 1992), 계산 추정(Bobis, 1991; Case & Sowder, 1990), 수의 상대적 크기의 판단(Sowder, 1988), 부분-전체 관계와 자릿값 개념의 인식(Fischer, 1990; Ross, 1989) 등의 수학적 활동에 있어서 능숙하다. 또한 좋은 수감각을 가진 학생들은 문제해결을 위해 수를 사용할 수 있을 뿐만 아니라 수감각을 바탕으로 잘못된 답을 발견할 수 있고, 유연하게 추론하고 합리적으로 추정할 수 있다(Burns, 2007). 수감각은 기본적인 연산을 해결하는 과정에도 중요한 역할을 하고 더 나아가 그러한 연산을 자동적으로 사용할 수 있도록 도와주므로 수감각이 부족한 학생들은 아주 간단한 연산에서 요구되는 기초적인 절차를 수행하는 것도 어려워한다.

학생들의 수감각을 발달시키기 위해서는 언제 정확한 계산이 요구되는지, 언제 수감각을 활용하는 것이 효율적인지 등을 분별할 수 있는 안목을 길러 줄 필요가 있다. Burns(2007)는 수업 중에 계산하면서 다양한 방법으로 모델링하기, 암산하도록 요구하기, 계산을 위한 전략에 대해 논의할 수 있는 교실 분위기를 조성하기, 계산에 있어 중요한 부분을 예측하도록 하기, 수적으로 어떻게 추론하는지 질문하기, 여러 가지 답을 가진 문제를 제시하기 등의 다양한 수업 전략을 통해 수감각을 기를 수 있는 기회를 제공해야 함을 강조했다.

2. 수감각(Number Sense)의 구성 요소

수감각 개발의 중요성을 인식하고 학생들의 수감각에 주목하면서 수학 수업을 개선하고자 하는 교사의 활동을 지원하기 위해서 수감각의 구성 요소를 고찰할 필요가 있다.

NCTM(1989)에서는 수와 연산의 규준에서 수감각 개발을 핵심으로 두고 학생들이 유아원·유치원부터 12학년으로 올라감에 따라서 수에 대해 풍부하게 이해해야 한다고 주장하면서 수감각을 특징지을 수 있는 요소로 수, 수의 표현 방식, 수 사이의 관련성, 수 체계에 대한 이해, 연산의 의미와 연산 사이의 관련성, 유창한 계산력, 합리적인 어림 등을 제시했다.

방정숙(2005)은 수감각의 구성 요소로 수의 의미와 크기 이해하기, 수의 동치표현을 이해하고 활용하기, 연산의 의미와 결과 이해하기, 동치식 이해하고 활용하기, 암산·지필계산·계산기 사용을 위해 융통성 있게 계산하고 세기 전략 활용하기, 측정 기준 척도 활용하기 등의 6가지로 정리하고 문제 상황에서 학생들의 수감각 활용에 대한 분석을 토대로 수감각 개발에 대한 시사점을 제시하였다.

Yang, Li, & Lin(2008)은 수감각의 주요 특징을 포함하여 4가지 구성 요소를 제시하였다. 첫 번째 요소는 상대적인 수의 크기 인식으로 수의 상대적인 크기를 인식할 수 있는 것이다. 학생들은 분수를 비교할 때 최소공배수를 찾아 비교하는 알고리즘에만 의존하는 것이 아니라 같은 분자, 같은 분모, 이행성과 같은 의미 있는 방법 등을 사용할 수 있다. 두 번째 요소는 수와 연산의 다양한 표현 사용하기로 학생들은 상황에 따라 유연하고 적절하게 수 문제를 해결하기 위해서 언어적 표현, 회화적 표현, 상징적 표현 등의 여러 가지 표현의 형태를 사용할 수 있는 것이다. 세 번째 요소는 계산된 결과의 어림이 합리적인지를 판단하기로 학생들은 직접 쓰는 계산을 하지 않고 암산으로 어림 전략을 문제에 적용할 수 있고, 결과가 합리적인가를 판단할 수 있는 것이다. 마지막 요소는 수에 대한 연산의 상대적인 효과 인식하기로 학생들은 사칙연산이 계산의 결과에 어떻게 영향을 주는지를 인식할 수 있는 것이다.

Faulkner & Cain(2009)은 사실상 모든 수학 수업에서 만들어지는 논의와 연결을 나타내는 ‘수감각의 구성 요소’의 모델을 제시하면서 그 구성 요소로 양과 크기, 기수법, 같음, 십진법, 수의 형태, 비례추론, 기하와 대수의 사고를 제시했다. 수감각의 모듈식 구성 요소를 서술하면서 교사들이 습관적으로 수학적 연결을 제공하여 학생들이 수감각을 개발하도록 도와주고자 했다.

수감각의 구성 요소에 대한 문헌연구를 바탕으로 본 연구에서는 수감각의 다양한 구성 요소 중에서 특히 수와 연산에 대한 지식의 적용 및 반성, 수의 크기에 대한 감각, 수에 대한 연산의 결과 이해, 기준 척도의 사용을 강조하면서 그에 따른 문제를 구성하여 검사를 실시하였다.

수와 연산에 대한 지식의 적용 및 반성의 예로는 계산 순서를 달리한 덧셈의 결과 비교를 직접 계산해보지 않고도 알 수 있는 경우 또는 계산의 결과를 실생활에 적용하여 해석할 수 있는 경우를 말하며, 수의 크기에 대한 감각의 예로는 분자가 같은 두 분수에서 분모가 더 큰 분수의 값이 더 작음을 계산 없이 문제해결에 적용할 수 있는 경우가 있으며, 수에 대한 연산의 결과 이해의 예로는 49.05×6.044 를 계산하기 위해 2964582에서 소숫점을 표시할 때, 규칙에 바탕을 둔 방법이 아닌 49.05는 약 50이고, 6.044는 약 6이므로 $50 \times 6 = 300$ 이 되어 29.64582는 맞지 않음을 알 수 있는 경우가 있고, 기준 척도의 사용은 $\frac{7}{19} \times \frac{18}{23}$ 의 값을 추정할 때, 기준 척도 1과 $\frac{1}{2}$ 을 사용하여 $\frac{18}{23}$ 은 1보다 작고, $\frac{7}{19}$ 은 $\frac{1}{2}$ 보다 작으므로 그 값은 $\frac{1}{2}$ 보다 작음을 알 수 있는 등의 경우가 있다.

III. 연구 방법

본 연구는 초등학교 6학년 학생과 중학교 2학년 학생이 문제해결 과정에서 얼마나 수감각을 활용하는지 분석하기 위해 검사 도구를 활용한 조사연구방법을 선택하였다.

1. 연구 대상

초등학교 6학년까지 분수의 사칙연산과 소수의 사칙연산을 학습하고, 중학교 1, 2학년 과정에서는 정수와 유리수의 개념 및 연산을 학습하고, 중학교 3학년에서는 무리수를 포함함으로써 수의 범위가 실수까지 확장된다. 따라서 본 연구에서는 분수의 사칙연산과 소수의 사칙연산을 학습한 초등학교 6학년과 유리수의 개념이 완성되는 중학교 2학년을 대상으로 유리수 범위 내에서 수감각 검사를 실시하였다. 본 연구는 D광역시 소재의 초등학교 2개, 중학교 2개를 연구 대상으로 선정하였다. A, B 초등학교와 C 중학교는 지리적 위치가 비슷하고 같은 학군에 속한 학교이다. D 중학교는 동일한 학군은 아니지만 C 중학교와 학력 수준 및 사회 경제적 수준이 비슷하다고 판단해서 선정하였다. A, B 초등학교는 6학년 전체 학급(A: 4학급, B: 3학급), C 중학교는 3학급, D 중학교는 2학급을 연구 대상으로 하였다. <표 III-1>과 같이 336명의 자료를 수집하였으나 검사지를 백지 제출한 16명의 자료는 제외하고 320명의 자료를 분석 대상으로 하였다.

<표 III-1> 연구 대상

학년	학교	검사 인원	분석 대상 인원	합계
초등학교 6학년	A	107	107	157
	B	58	50	
중학교 2학년	C	108	100	163
	D	63	63	
합계		336	320	320

초등학교 2개교를 연구 대상으로 하였기 때문에 두 초등학교 사이에 수감각 점수의 평균에 차이가 있는지 알아보기 위하여 이후 수감각 검사 결과에 대한 t-검정을 실시한 결과, 두 학교는 수감각 점수의 평균에 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 초등학교와 마찬가지로 두 개의 중학교에서도 수감각 점수의 평균에 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 이러한 결과로부터 같은 학교 급 내에서는 수감각 점수에 차이가 없는 것으로 간주하였다.

2. 검사 도구

본 연구의 검사 도구는 학생들의 전반적인 수감각 활용 능력과 더불어 수감각 구성 요소별 특성을 분석하기 위한 6개의 문항으로 이루어져 있다. 본 연구의 수감각 검사 문항은 <표 III-2>와 같다. 검사 문항은 선행 연구(방정숙, 2005; 선춘화, 2005; 신창협, 2009; Zazkis & Campbell, 1996)의 문제들 중에서 선정하였다. 문제 1번은 Zazkis & Campbell(1996)이 예비초등교사를 대상으로 한 연구에서 사용한 문제로써 7의 배수와 12의 배수가 있는지 묻는 문제인데, 본 연구에서는 수감각에 초점을 맞추기 위해 7의 배수만 묻는 문제로 수정하였다. 문제 2번과 5번은 방정숙(2005) 연구에서 초등학교 6학년을 대상으로 사용한 문제이고, 문제 4번과 6번은 선춘화(2005) 연구에서 초등 6학년을 대상으로 사용한 문제로, 초등학교 6학년 및 중학교 2학년에게 적절한 문제로 생각되어 수정 없이 그대로 사용하였다. 문제 3번은 신창협(2009)의 연구에서 사용한 문제를 근거로 하였다. 초등학교 3학년 대상으로 만들어진 (세 자리 자연수)×(두 자리 자연수)의 문제를 (네 자리 자연수)×(두 자리 자연수)의 문제가 되도록 수의 크기를 조정하였다.

<표 III-2> 수감각 검사 문항

번호	문제
1	12358에서 12368 사이의 자연수 중에 7로 나누어떨어지는 수가 있는가? (Zazkis & Campbell, 1996)
2	아래와 같이 주어진 수를 한 번씩만 사용하여 4개의 수를 곱해서 답이 4355가 되는 수가 있으면 그 수를 골라 <input type="checkbox"/> 표 하고, 없으면 그 이유를 설명하십시오. (방정숙, 2005) 14, 10, 8, 15, 28, 4, 9, 5, 12, 2
3	영수는 천 원짜리 지폐 40장(4만원)을 가지고 문방구에 갔습니다. 한 개에 2990원하는 스케치북을 12개 샀을 때, 주인아저씨께 천 원짜리 지폐를 몇 장 드려야 하는가? (신창협, 2009)
4	다음 수의 크기를 비교하여 큰 수부터 차례로 늘어놓으시오. (선춘화, 2005) 0.475 $\frac{19}{36}$ 0.847 $\frac{3}{4}$ $\frac{23}{25}$
5	다음 <input type="checkbox"/> 안에 <, =, > 중 알맞은 것을 넣으시오. (방정숙, 2005) 123456 ÷ 498 <input type="checkbox"/> 123456 ÷ 499
6	다음 중 계산값이 대략 1인 것을 고르시오. (선춘화, 2005) ① $0.275 + \frac{19}{25}$ ② $2.601 - \frac{4}{7}$ ③ $1.01 + \frac{14}{15}$ ④ $16\frac{4}{5} - 16.011$

6개의 문항을 4가지 수감각 구성 요소별로 분류하였다. 4가지 수감각 구성 요소별 검사 내용은 <표 III-3>에 제시한 바와 같다. ‘수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성’과 관련된 2문제, ‘수의 크기에 대한 감각’과 관련된 2문제, ‘수에 대한 연산의 결과 이해’와 관련된 1문제, ‘기준 척도의 사용’과 관련된 1문제로 분류하였다.

<표 III-3> 수감각 구성 요소별 수감각 검사 내용

구성 요소	항목	평가 내용	문항 번호
수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성	나눗셈 의미를 이해하고 효율적인 전략을 선택	7로 나누는 것에 대한 의미의 이해	1
	수를 구성하거나 분해하는 능력	적절한 수를 선택하여 특정한 수를 만드는 문제	2
수의 크기에 대한 감각	큰 수에 대한 감각	생활에서 쓰이는 큰 수의 절대적인 크기에 대한 감각(금액)	3
	분수, 소수의 크기 비교	분수, 소수들의 상대적인 크기에 대한 감각	4
수에 대한 연산의 결과 이해	나눗셈에 대한 결과 이해 (자연수) \div (자연수)	피제수가 커지는 나눗셈의 결과 이해 (다섯 자리 수) \div (세 자리 수)	5
기준 척도의 사용	분수, 소수의 혼합계산에서 기준 척도 사용	분수, 소수의 혼합계산에서 1, 1/2 등의 기준 척도 사용	6

3. 자료 수집 및 분석

가. 자료 수집

본 연구는 학생들의 문제해결 방법을 분석하기 위한 것이므로 검사지의 모든 문제에는 답과 함께 그 이유를 적도록 하였다. 또한 학생들이 형식에 얽매이지 않고 자유롭게 이유를 적을 수 있도록 모든 문제의 풀이란에는 ‘구체적인 수식으로 표현하지 않아도 됨’이라는 진술을 덧붙였다. 본 검사를 실시하기 위해 해당 학교의 수학 교사들을 직접 만나 검사 의도를 설명하였고 학생들이 답과 함께 이유를 상세히 적을 수 있도록 지도해 줄 것을 요청하였다. 검사는 초등학교와 중학교 각 학교별로 2학기 개학 후 첫째 주에 실시하였다. 초등학교는 담임교사의 지도 아래, 중학교는 해당 수학 교사의 지도 아래 30분간 실시되었고, 검사 실시 후 검사지는 연구자들이 직접 회수하였다.

나. 채점 기준 및 문제해결 방법 분류 기준

본 연구는 학생들이 문제해결 과정에서 활용한 해결 방법을 분석하는 데 초점이 있으므로 문제에 대한 답과 그 이유가 모두 타당한 경우에만 정답(1점)으로 채점하였으며, 답은 맞았으나 이유를 적지 않았거나 타당하지 않은 이유인 경우에는 오답(0점)으로 채점하였다. 검사지의 채점 기준은 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4> 수감각 문제 채점 기준

구분	채점 기준	점수
정답	· 답도 맞고 그 이유도 타당한 경우	1
오답	· 답은 맞았으나 이유를 작성하지 않은 경우	0
	· 답은 맞았으나 이유가 타당하지 않은 경우(무의미한 풀이, 그냥 등)	
	· 답이 틀린 경우 · 무응답	

본 연구는 검사 문항의 정답률뿐만 아니라 학생들이 어떤 방법으로 문제를 해결하는지 알아보는 데 초점이 있다. 수감각 검사 문항을 수감각 활용, 직접 계산, 설명 없음 등으로 분류하여 분석한 선행 연구(방정숙, 2005)

를 바탕으로 <표 III-5>와 같이 수감각에 대한 문제해결 방법의 분류 기준을 정하였다. 우선 정답인 경우에는 문제해결 방법을 수감각을 활용한 경우와 알고리즘을 활용한 경우인 두 가지로 분류하였고, 오답인 경우에는 수감각 활용, 알고리즘 활용, 기타로 분류하였다. 여기서 수감각을 활용한 해결 방법(이하, 수감각 활용)이란 무조건 계산을 먼저 시도하기보다 문제 상황에 따라 더 효율적인 방법이 있음을 알고 이를 활용하여 문제를 해결하는 경우이고, 알고리즘을 활용한 문제해결 방법(이하, 알고리즘 활용)이란 기계적인 알고리즘을 사용하여 문제를 해결하는 경우이다. 또한 무응답인 경우, 그냥 또는 느낌 등으로 답한 경우, 문제와 전혀 상관없는 무의미한 풀이를 적은 경우는 기타로 분류하였다.

<표 III-5> 수감각 문제해결 방법 분류 기준

구분	문제해결 방법	분류 기준
정답	수감각 활용	수감각을 적절히 활용하여 정답을 구한 경우
	알고리즘 활용	알고리즘에 따라 직접 계산하여 정답을 구한 경우
오답	수감각 활용	수감각을 활용하려고 시도하였으나 풀이 과정이나 답이 틀린 경우
	알고리즘 활용	알고리즘을 활용하려고 시도하였으나 풀이 과정이나 답이 틀린 경우
	기타	· 무응답인 경우
		· 그냥, 느낌 등으로 답한 경우
	· 문제와 상관없는 무의미한 풀이를 시도한 경우	

다. 채점 절차 및 자료 분석

3명의 연구자는 각자 30명의 답안을 검토한 후 문항에 따른 채점의 세부기준 및 문제해결 방법 분류 기준을 다시 논의하였다. 그리고 초등학교 2개교와 중학교 2개교의 답안을 나누어 채점한 후 논의가 필요한 경우는 다시 협의하여 채점하였다.

본 연구에서는 먼저 초등학생과 중학생이 사용한 문제해결 방법에 차이가 있는지 알아보기 위해 χ^2 검정을 실시하였다. 두 번째로 수감각 검사의 성취도 따라 문제해결 방법에 차이가 있는지 알아보기 위해 수감각 검사 점수가 평균보다 높은 집단을 상집단으로, 낮은 집단을 하집단으로 분류하였다. 그리고 난 후 집단 별로 수감각 활용과 알고리즘 활용의 비율을 비교하였다. 마지막으로 수감각 구성 요소별로 초등학생과 중학생의 문제해결 방법의 빈도분석을 바탕으로 수감각 발달 정도를 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 초등학생과 중학생의 수감각 검사 점수 차이 분석

초등학생과 중학생의 수감각 검사 점수에 대한 기술통계 결과는 <표 IV-1>과 같다. 먼저 초등학생과 중학생의 평균을 살펴보면 6점 만점에 초등학생은 3.07점, 중학생은 3.58점으로 두 집단 모두 평균 정답률이 50%를 약간 넘는 것으로 나타났다. 어려운 수학적 내용이나 복잡한 계산을 요구하는 문제가 아니라 수감각을 활용하면 간단히 해결할 수 있는 문제임에도 불구하고 성취도가 높지 않음을 알 수 있다. 또한 초등학생과 중학생 두 집단 간에 수감각 점수의 평균에 차이가 있는지 알아보기 위하여 t-검정을 실시한 결과, 초등학생과 중학생의 수감각 점수에 대한 평균은 통계적으로 유의미한 차이가 있었다. 중학생들의 점수가 초등학생들의 점수보다 높았다.

<표 IV-1> 초등학교 6학년과 중학교 2학년의 수감각 검사 점수 차이 분석

학년	학생 수	평균	표준편차	평균의 표준오차	t검정 결과	
					t값	유의확률
초등학교 6학년	157	3.07	1.776	.142	-2.628***	.009
중학교 2학년	163	3.58	1.713	.134		

***p< .01

2. 수감각 검사에 대한 문제해결 방법 분석

각 문제에 대한 문제해결 방법을 <표 III-5>에서 정의한 기준에 따라 분류하고, 문제해결 방법에 대한 빈도수를 분석하였다. 여기에서는 문제해결 방법에 초점을 맞추어 집단별로 문제해결 방법에 차이가 있는지 알아보기 위해 전체 6개 문제에 대하여 χ^2 검정을 실시하였으며, 각 문제별로는 그 해결 방법의 예를 중심으로 살펴보았다.

가. 초등학생과 중학생의 문제해결 방법 비교

초등학생과 중학생이 사용한 문제해결 방법의 빈도를 구한 후, 전체 6개 문제에 대하여 수감각 활용을 사용한 비율과 알고리즘 활용을 사용한 비율, 기타 비율을 각각 구하였다. 그리고 두 집단 사이에 문제해결 방법에 대한 차이를 알아보기 위해서 χ^2 검정을 실시하였다. 그 결과 <표 IV-2>에 나타난 바와 같이 초등학생과 중학생 사이에 사용하는 문제해결 방법에 유의미한 차이가 있었다. 문제를 해결하는데 있어서 중학생들이 초등학생들보다 수감각을 활용한 방법을 더 많이 시도하며, 초등학생들은 알고리즘을 활용하거나 무응답 또는 무의미한 풀이를 더 많이 시도하였다. 중학생들이 상대적으로 초등학생들보다 수감각을 활용하여 효율적으로 문제를 해결할 수 있는 안목을 지녔다고 볼 수 있다. 중학생들이 초등학생들에 비해 수를 다루는 경험이 많기 때문에 수감각을 더 잘 활용하여 문제를 해결하는 것으로 보이며 따라서 학생들에게 수감각을 활용하는 다양한 상황이나 유형을 많이 제공할 필요가 있다.

<표 IV-2> 초등학교 6학년과 중학교 2학년의 문제해결 방법에 대한 빈도 분석

학년	수감각 활용 빈도(%)	알고리즘 활용 빈도(%)	기타 빈도(%)	카이제곱 값	유의확률
초등학교 6학년	149(15.8%)	536(56.9%)	257(27.3%)	18.709***	.000
중학교 2학년	225(23.0%)	539(55.1%)	214(21.9%)		

***p< .01

나. 상집단과 하집단의 문제해결 방법 비교

수감각 검사 점수의 높고 낮음에 따라 문제해결 방법에 차이가 있는지 알아보기 위해 상집단과 하집단으로 분류하여 비교하였다. 수감각 검사 점수의 평균(초:3.07점, 중:3.58점)을 기준으로 수감각 검사 점수가 평균보다 높은 집단(4~6점)을 상집단, 평균보다 낮은 집단(0~3점)을 하집단으로 나누어 문제해결 방법을 비교하였다.

(1) 초등학교와 중학교 내 상하집단의 문제해결 방법 비교

<표 IV-3>는 초등학교와 중학교 내에서 상하집단을 비교한 결과이다. 초등학교와 중학교 모두 상하집단이 사용한 문제해결 방법에 유의미한 차이가 있다고 나타났다. 상집단은 하집단에 비해 수감각 활용을 사용한 비율,

알고리즘 활용을 사용한 비율이 높았으며, 하집단은 상집단에 비해 기타의 비율이 높게 나타났다. 즉, 초등학교와 중학교 모두 상집단에서 수감각 활용, 알고리즘 활용을 사용하여 문제해결을 더 많이 시도하며, 하집단은 일단 알고리즘 활용을 먼저 시도하거나 또는 문제에 따른 적절한 문제해결 방법을 찾지 못하고 있는 것으로 보인다.

<표 IV-3> 초등학교와 중학교 내 상하집단의 문제해결 방법 비교

집단	수감각 활용 빈도(%)	알고리즘 활용 빈도(%)	기타 빈도(%)	카이제곱 값	유의확률
초등학교 상	100(25.6%)	261(66.9%)	29(7.4%)	148.442***	.000
초등학교 하	49(8.9%)	275(49.8%)	228(41.3%)		
중학교 상	173(34.3%)	297(58.9%)	34(7.8%)	169.530***	.000
중학교 하	52(11.0%)	242(51.1%)	180(38.0%)		

***p< .01

(2) 초등학교와 중학교 사이 상하집단의 문제해결 방법 비교

다음으로 초등학교와 중학교 사이에 상하집단의 문제해결 방법을 비교한 결과는 <표 IV-4>와 같다. 먼저 중학교 상집단과 초등학교 상집단의 문제해결 방법을 비교해 본 결과 두 집단 사이에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 중학교 상집단은 초등학교 상집단에 비해 상대적으로 수감각 활용 비율이 높게 나타났으며, 초등학교 상집단은 중학교 상집단에 비해 상대적으로 알고리즘 활용 비율이 높게 나타났다. 중학교 하집단과 초등학교 하집단에는 문제해결 방법에 있어서 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 이를 통해 학년이 올라갈수록 상집단에서는 수감각이 향상되었으나, 하집단에서는 그렇지 못한 것으로 볼 수 있다. 수감각은 초등학교뿐만 아니라 이후 중고등학교에서 수학의 여러 영역의 발달에 기반이 되므로 하집단 학생들의 수학 성취도 향상을 위해서 이들의 수감각 발달에 힘을 필요가 있다.

<표 IV-4> 초등학교와 중학교 사이 상하집단의 문제해결 방법 비교

집단	수감각 활용 빈도(%)	알고리즘 활용 빈도(%)	기타 빈도(%)	카이제곱 값	유의확률
초등학교 상	100(25.6%)	261(66.9%)	29(7.4%)	7.830**	.020
중학교 상	173(34.3%)	297(58.9%)	34(7.8%)		
초등학교 하	49(8.9%)	275(49.8%)	228(41.3%)	1.924	.382
중학교 하	52(11.0%)	242(51.1%)	180(38.0%)		

**p< .05

3. 수감각 구성 요소별 문제해결 방법 분석

가. 수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성

수와 연산에 대한 지식을 주어진 문제 상황에서 적절하게 적용하고 활용하는지를 알아보기 위해 연산에 대한 적용 문제 1개, 수에 대한 적용 문제 1개로 구성하였다. 먼저 1번 문제는 연산에 대한 지식을 적절히 적용하고

반성하는 문제로서 7로 나누어떨어지는 것에 대한 의미를 이해하고 효율적인 전략을 선택하는지 알아보기 위한 문제이며, 학생들의 문제해결 방법을 분석한 결과는 <표 IV-5>와 같다. 직접 나누어보지 않고도 두 수 12358과 12368의 차가 7보다 크기 때문에 7로 나누어떨어지는 수가 있다고 답한 경우는 수감각 활용, 직접 나눗셈 계산을 한 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 수감각을 활용하여 문제를 해결한 학생이 초등학생, 중학생 모두 7%에 불과하였으며, 초등학생과 중학생 사이에 비율의 차이가 없었다. 또한 알고리즘을 활용하여 문제를 해결한 학생이 초등학생과 중학생 각각 47%, 44%로 수감각을 활용하는 비율보다 높았다. 학생들은 정확한 계산을 통해 답을 찾는 문제에 익숙해서 수의 존재성을 묻는 문제에서도 알고리즘을 활용한 계산을 통해서 답을 찾는 경향이 있었다. 알고리즘을 활용하여 연산의 결과를 도출하는 것도 중요하지만, 연산에 대한 의미를 알고 상황에 따라 어떤 방법이 효율적인지 분별할 수 있는 안목을 지속적으로 길러줄 필요가 있다.

<표 IV-5> '수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성'에 대한 문제해결 방법 분석(문제1)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)		
			초	중	
1. 12358에서 12368 사이의 자연수 중에 7로 나누어떨어지는 수가 있는가? <정답률> 초등학교: 54% 중학교: 51%	정답	수감각 활용	· 주어진 두 수의 차가 7보다 크기 때문에 7의 배수가 있다.	11(7%)	12(7%)
		알고리즘 활용	· 두 수 사이의 수들을 하나씩 7로 나누어 보고 7의 배수 12362를 직접 찾는다. · 두 수 사이 특정한 한 수를 7로 나누어 보고 나머지를 이용해서 7의 배수 12362를 찾는다.	73(47%)	71(44%)
	오답	수감각 활용	· 자연수와 자연수 사이에 차이가 있기 때문에 7의 배수가 있다.	0(0%)	1(1%)
		알고리즘 활용	· 계산상의 오류로 다른 수를 찾는다.	35(22%)	43(26%)
	기타	· 각 자릿수를 더한 수가 7로 나누어떨어지면 그 수는 7의 배수이다. · 끝의 두 자리 수가 7의 배수이면 그 수는 7의 배수이다. · 그냥 없을 것 같다. 그냥 있을 것 같다. · 무응답	38(24%)	36(22%)	

2번 문제는 수의 구성과 분해에 대한 것으로서, 주어진 수 중 적절하게 4개의 수를 선택한 후 곱해서 4355를 만드는 문제이며, 학생들의 문제해결 방법을 분석한 결과는 <표 IV-6>과 같다. '홀수×홀수=홀수'임을 활용하여 직접 곱해보지 않고도 주어진 수 중 홀수가 3개뿐이므로 4355를 주어진 4개의 수로 분해할 수 없음(또는 4개의 수로 4355를 구성할 수 없음)으로 답한 경우는 수감각 활용, 4개의 수를 직접 곱해보거나 4355를 직접 인수분해한 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 수감각을 활용하여 문제를 해결한 비율은 초등학생 12%, 중학생 13%, 알고리즘을 활용한 비율이 초등학생 30%, 중학생 34%로 나타났다. 문제 1번과 마찬가지로 수감각을 활용하여 문제를 해결한 비율이 낮은 편이며, 초등학생과 중학생 사이에 수감각 활용을 사용한 비율에 변화가 거의 없는 것으로 나타났다. 오답의 경우를 살펴보면 수감각을 활용하여 문제 풀이를 시도했을 때 오답이 나오는 경우는 드물었으며, 학생들에게 다소 생소한 형태의 문제 유형이라 무응답을 하거나 적절한 해결 방법을 찾지 못한 기타의 비율이 다른 문제에서 보다 높게 나타났다. 곱셈의 알고리즘을 계산할 수 있을 뿐만 아니라 어떤 특성을 가진 수의 곱이 가지는 의미를 파악할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 즉 연산이 수에 어떤 영향을 미치는지, 수의 성질이 연산에 의해 어떻게 변하는지를 알고 상황에 따라 적절히 적용할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

<표 IV-6> '수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성'에 대한 문제해결 방법 분석(문제2)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)	
			초	중
2. 아래와 같이 주어진 수를 한 번씩만 사용하여 4개의 수를 곱해서 답이 4355가 되는 수가 있으면 그 수를 골라 ○표 하고, 없으면 그 이유를 설명하시오.	수감각 활용	· 홀수가 3개뿐임을 이용한다. · 주어진 수로 끝자리 5를 만들 수 없다.	19(12%)	22(13%)
	정답 알고리즘 활용	· 주어진 수 중에서 4개를 선택해서 곱셈을 직접 해보고 가능하지 않다고 한다. · 4355를 인수분해하여 주어진 수에는 인수가 5뿐임을 보인다. · 4355를 주어진 10개의 수로 모두 나누어보고 나누어지는 수가 5뿐임을 보인다.	47(30%)	55(34%)
	수감각 활용	· 주어진 수 중에서 곱해서 끝자리 5가 되는 수는 15와 5뿐이다.	0(0%)	1(1%)
14, 10, 8, 15, 28, 4, 9, 5, 12, 2	오답 알고리즘 활용	· 직접 4개의 수를 선택하여 곱하는 시도를 하다가 포기한다. · 직접 4개의 수를 선택하여 곱한 후 4355가 된다고 한다. · 인수분해를 잘못한다.	25(16%)	25(15%)
	기타	· 그냥, 느낌상 없을 것 같다. · 수가 너무 커서 곱하기 힘들다. · 무응답	66(42%)	60(37%)

<정답률>
초등학교: 42%
중학교: 47%

1번과 2번 문제를 바탕으로 '수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성'에서의 문제해결 방법에 대해 살펴본 결과, 초등학생과 중학생 모두 수감각 활용보다 알고리즘 활용을 사용한 비율이 훨씬 높게 나타났다. 그러나 오답 중에는 수감각 활용의 비율이 상대적으로 낮게 나타난 것으로 보아 수감각을 활용한 방법을 사용했을 때 학생들의 오답률을 줄일 수 있을 것으로 보인다. 따라서 학생들이 이 구성 요소의 문제에 대해 수감각을 적극적으로 활용할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 또한 다른 수감각 구성 요소에 비해 기타의 비율이 높게 나타난 것으로 보아 학생들이 이 구성 요소에 대해 적절한 문제해결 방법을 찾지 못하는 것으로 보이며 따라서 다양한 문제 유형이나 상황을 통해 수와 연산에 대한 지식을 적용하고 반성하는 경험을 제공할 필요가 있다. 마지막으로 이 구성 요소에서는 초등학생과 중학생 사이에 수감각 활용을 사용한 비율에 거의 변화가 없는 것으로 나타나 학년이 올라감에 따라 이 구성 요소의 수감각도 함께 발전할 수 있도록 유의하여 지도할 필요가 있다.

나. 수의 크기에 대한 감각

수의 크기에 대한 감각은 수에 대한 이해를 바탕으로 수의 크기에 대한 감각을 지니는 것으로 상대적이고 절대적인 감각으로 나누어 문제를 선정하였다. 수의 절대적 크기에 대한 감각을 알아보기 위해 실제 생활에서 주로 사용되는 큰 수에 대한 문제 1개(문제3), 수의 상대적 크기에 대한 감각을 알아보기 위해 분수와 소수의 크기를 상대적으로 비교하는 문제 1개(문제4)로 구성하였다.

문제 3번에 대한 문제해결 방법 분석 결과는 <표 IV-7>과 같다. 대략적인 금액에 대한 감각으로 약 36000원이라고 답한 경우는 수감각 활용, 정확하게 2990×12=35580을 계산하여 답한 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 학생들이 생활에서 흔히 접하는 상황이기 때문에 정답률은 높았지만 대략적인 금액에 대한 감각을 활용하여 문제를 해결하기보다 일단 알고리즘을 먼저 활용하여 계산하려는 경향을 보였다.

한 번의 곱셈으로 해결 가능한 문제였기 때문에 전체적으로 알고리즘을 활용하는 비율이 높았던 것으로 생각

되며, 중학생들이 초등학생들보다 큰 수를 다루는 기회가 많기 때문에 정답률이 높아진 것으로 생각된다. 학생들에게 정확한 정답을 구하는 것뿐만 아니라, 얼마 이상인지 또는 얼마 이하인지 일상생활의 상황에서 물건의 개수나 금액에 대한 근삿값을 구해보는 활동, 컴퓨터나 계산기를 통하여 얻은 큰 수의 값이 오류가 없는지 어렵으로 검산해 보는 활동 등을 통하여 큰 수에 대한 감각을 키워줄 필요가 있다.

<표 IV-7> '수의 크기에 대한 감각'에 대한 문제해결 방법 분석(문제3)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)	
			초	중
3. 영수는 천 원짜리 지폐 40장(4만원)을 가지고 문방구에 갔습니다. 한 개에 2990원하는 스케치북을 12개 샀을 때, 주인아저씨께 천 원짜리 지폐를 몇 장 드려야 하는가? <정답률> 초등학교: 71% 중학교: 77%	정	수감각 활용 · 대략적인 금액에 대한 감각으로 해결한다. 약 $3000 \times 12 = 36000$ 이므로 36장이다.	6(4%)	13(8%)
	답	알고리즘 활용 · 정확하게 계산하여 해결한다. $2990 \times 12 = 35580$ 이므로 36장이다.	105(67%)	112(69%)
	오	수감각 활용 · 대략적인 수에 대한 감각으로 금액을 찾았으나, 답을 4장이라고 잘못 구한다.	0(0%)	2(1%)
	오	알고리즘 활용 · 직접 계산을 시도하였으나 계산상의 오류를 일으킨다. · 직접 계산은 잘 했으나, 답을 잘못 구한다. (4장, 6장, 35장, 40장 등)	33(21%)	27(17%)
	답	기타 · 무응답 · 그냥 40장 다 드리면 된다.	13(8%)	9(5%)

<표 IV-8>는 수감각 문제 4번에 대한 문제해결 방법 분석 결과로, 이 문제는 분수와 소수들에 대하여 상대적인 크기 감각을 지니고 있는지를 측정하기 위한 문제이다. 답안 중 기준 척도인 $\frac{1}{2}$ 과 1을 사용하여 크기를 비교한 경우는 수감각 활용, 모두 소수로 나타내거나 모두 분수로 나타내어 크기를 비교하는 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 이 문제는 기준 척도에 대한 감각을 요구하기도 하나, 본 연구에서는 수의 상대적인 크기에 더 초점을 두고 수의 크기에 대한 문제로 분석하였다. 수감각을 활용하여 문제를 해결한 학생은 초등학생 5%, 중학생 10%이며 알고리즘을 활용하여 문제를 해결한 학생은 초등학생 31%, 중학생 50%로 나타났다. 초등학생에 비해 중학생들의 정답률이 높게 나타났으며, 초등학생들은 알고리즘의 방법을 많이 활용했으나 계산상의 오류로 오답으로 분류된 경우가 많았다. 특히 오답 중에 0.475 와 $\frac{19}{36}$ 의 크기 비교에서 실패한 학생이 많았는데, 통분을 하거나 소수로 고치려고 시도했으나 0.475 가 $\frac{19}{36}$ 보다 크다고 잘못된 결론을 내리는 경우가 많았다. 수 감각을 가진 학생들은 계산하지 않고도 0.475 는 $\frac{1}{2}$ 보다 작고 $\frac{19}{36}$ 는 $\frac{1}{2}$ 보다 크다는 것을 활용하였지만, 알고리즘을 활용한 학생들은 소수나 분수로 고치는 과정에서 오류를 범하는 경우가 많았다. 수의 상대적 크기에 대한 감각은 이후 실수까지 수를 확장하는 과정에서도 중요한 감각이며, 일상생활에서 길이, 넓이, 무게 등을 비교할 때도 많이 활용되는 감각이다. 따라서 학생들에게 소수를 분수로, 분수를 소수로 고치는 활동을 통하여 수에 대한 여러 표현 방법을 알게 하는 것뿐만 아니라, 소수 또는 분수가 대략 어느 정도의 크기인지 상대적인 크기에 대한 감각도 함께 키워줄 필요가 있다.

<표 IV-8> '수의 크기에 대한 감각'에 대한 문제해결 방법 분석(문제4)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)	
			초	중
4. 다음 수의 크기를 비교하여 큰 수부터 차례로 늘어 놓으시오. 0.475 $\frac{19}{36}$ 0.847 $\frac{3}{4}$ $\frac{23}{25}$ <정답률> 초등학교: 36% 중학교: 60%	정	수감각 활용 · 기준 척도인 $\frac{1}{2}$ 과 1을 사용하여 비교한다.	8(5%)	16(10%)
	답	알고리즘 활용 · 모든 수를 소수로 고쳐서 비교한다. · 모든 수를 분모가 100또는 1000인 분수로 고쳐서 비교한다.	49(31%)	81(50%)
	오	수감각 활용 · 기준 척도를 사용하여 풀이하였으나 답이 맞지 않다.	1(1%)	1(1%)
	답	알고리즘 활용 · 분수나 소수로 고치는 과정에서 계산상의 오류를 일으켜 순서가 맞지 않다. · 분수나 소수로 고치려고 시도했으나 답을 끝까지 적지 못한다.	58(37%)	43(26%)
	기타	· 느낌으로 · 무응답	41(26%)	22(13%)

3번과 4번 문제를 바탕으로 '수의 크기에 대한 감각'에서의 문제해결 방법에 대해 알아본 결과, 전반적으로 알고리즘을 활용하는 비율이 높게 나타났다. 그러나 오답 중에 수감각 활용의 비율은 낮지만 알고리즘 활용의 비율이 높게 나타난 것으로 보아 학생들이 알고리즘을 활용하는 과정에서 계산상의 오류를 많이 일으킨 것으로 보인다. 또한 이 구성 요소에서는 중학생들이 초등학생들에 비해 수감각이 발달한 것으로 나타났는데, 이는 중학생들이 초등학생들에 비해 큰 수를 다루는 기회가 많아 수의 절대적 크기에 대한 감각이 발달한 것으로 보이며, 뿐만 아니라 초등학교 6학년까지 분수의 사칙연산과 소수의 사칙연산을 학습하고, 이어서 중학교 1, 2학년 과정에서 정수와 유리수의 개념 및 연산을 계속 학습하기 때문에 유리수 범위 내에서의 수의 상대적 크기에 대한 감각도 발달한 것으로 보인다.

<표 IV-9> '수에 대한 연산의 결과 이해'에 대한 문제해결 방법 분석(문제5)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)	
			초	중
5. 다음 ○안에 <, =, > 중 알맞은 것을 넣으시오. $12456 \div 498$ ○ $12456 \div 499$ <정답률> 초등학교: 65% 중학교: 70%	정	수감각 활용 · 나누어지는 수가 같은 경우 나누는 수가 클수록 값은 작아진다.	73(47%)	84(52%)
	답	알고리즘 활용 · 직접 나누어 그 결과를 비교한다.	29(18%)	30(18%)
	오	수감각 활용 · 수감각을 활용하여 적절한 이유를 작성하였으나 답이 맞지 않다.	4(3%)	5(3%)
	답	알고리즘 활용 · 계산 과정에서 오류	13(8%)	12(7%)
	기타	· 499가 더 크므로 · 나누는 수가 클수록 값이 커진다. · 무응답 · 그냥, 그럴 것 같다.	38(24%)	32(20%)

다. 수에 대한 연산의 결과 이해

다음 문제는 나눗셈의 결과를 비교하는 문제로 연산에 대한 의미와 그 결과를 이해하는지 알아보고자 하는 문제이다. 수감각 문제 5번에 대한 문제해결 방법 분석 결과는 <표 IV-9>와 같다. 나누어지는 수가 같은 경우 나누는 수가 클수록 값은 작아진다고 답한 경우는 수감각 활용, 직접 나눗셈을 하여 값을 비교한 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 6개의 문제 중에 학생들이 수감각을 활용하여 문제를 해결한 비율이 초등학교생 47%, 중학생 52%로 가장 높게 나타났는데, 초등학교생과 중학생 모두 제수의 의미를 알고 나눗셈 결과를 잘 이해하고 있다고 볼 수 있다. 이처럼 교과서에서 자주 다루어 본 유형에 대해서는 수감각 활용 비율이 높게 나타나므로, 수감각의 다른 요소들도 학생들이 잘 활용할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

라. 기준 척도의 사용

분수와 소수의 혼합계산에서 기준 척도를 사용하는지 알아보기 위한 문제로 결과는 <표 IV-10>과 같다. $\frac{14}{15}$ 가 대략 1이고, $\frac{4}{7}$ 는 대략 $\frac{1}{2}$ 이라는 기준 척도를 사용하여 문제를 해결한 경우는 수감각 활용, 주어진 분수를 모두 소수로 고치거나 소수를 모두 분수로 고쳐서 그 값을 계산한 후 1에 가까운 수를 찾는 경우는 알고리즘 활용으로 분류하였다. 수감각을 활용하여 문제를 해결한 비율이 초등학교생 13%, 중학생 39%로 초등학교생에 비해 중학생이 기준 척도 사용에 대한 비율이 높은 것으로 나타났다. 반면 알고리즘을 활용하여 문제를 해결한 비율은 초등학교생이 더 높게 나타났다. 기준 척도의 사용에 있어서 중학생들의 수감각이 발전된 모습을 보여주었다. 기준 척도는 어림을 할 때나 답의 적절성을 판단할 때 사용되는 중요한 수감각이므로 앞으로도 지속적으로 지도할 필요가 있다.

<표 IV-10> '기준 척도의 사용'에 대한 문제해결 방법 분석(문제6)

문제	문제해결 방법	답안 예시	빈도수(%)	
			초	중
6. 다음 중 계산값이 대략 1인 것을 고르시오. ① $0.275 + \frac{19}{25}$ ② $2.601 - \frac{4}{7}$ ③ $1.01 + \frac{14}{15}$ ④ $16\frac{4}{5} - 16.011$	정	수감각 활용 · $\frac{14}{15}$ 가 대략 1이고, $\frac{4}{7}$ 는 대략 $\frac{1}{2}$ 이라는 기준 척도를 사용한다.	21(13%)	64(39%)
	답	알고리즘 활용 · 보기 4개의 답을 정확하게 계산한 후 1과 가장 가까운 것을 선택한다.	41(26%)	23(14%)
	오	수감각 활용 · 기준 척도를 활용하려는 시도하였으나 답이 맞지 않다.	6(4%)	4(3%)
	답	알고리즘 활용 · 계산상의 오류로 인해 풀이나 답이 맞지 않다.	28(18%)	18(11%)
<정답률> 초등학교: 39% 중학교: 53%	기타	· 그냥 그럴 것 같다. · 무응답	61(39%)	54(33%)

V. 결론

수학교육에서 학생들의 수감각 개발에 대한 중요성은 꾸준히 강조되고 있지만, 실제 학교수학에서는 많은 학생들이 알고리즘을 적용하여 계산 결과를 도출하는 것에 집중하는 경우가 많다. 또한 우리나라의 수감각에 대한 선행 연구는 초등학생 대상의 실태조사이거나 또는 수학학습장애에 대한 판단 도구로 수감각을 사용하는 것에 치중되어 있다. 선행 연구에서는 초등학생들이 수감각을 활용하기보다 알고리즘을 활용하는 경향이 높다고 하였는데, 중학생들은 수감각과 알고리즘을 적절하게 활용하고 있는지에 대한 연구가 필요하다. 따라서 본 연구는 수감각이 지속적으로 필요한 중학생에 대한 수감각 발달 정도를 조사하여 이를 초등학생과 비교해 보고, 학생들의 문제해결 방법을 수감각 구성 요소별로 분석함으로써 수감각 지도 방향에 대한 시사점을 제공하고자 하였다.

첫째, 학생들의 알고리즘을 활용한 계산 성향이 본 연구에서 전반적으로 높게 나타났다. 전체 6문제 중에 수감각 활용을 사용하여 문제해결을 시도한 비율이 초등학생은 0.16, 중학생은 0.23으로 상당히 낮은 비율이었고, 알고리즘 활용을 사용하여 문제해결을 시도한 비율이 초등학생은 0.55, 중학생은 0.57로 높은 비율로 나타났다. 알고리즘을 활용하는 성향은 수감각의 구성 요소별, 문항별에 관계없이 전반적으로 높은 비율로 나타났으며, 정답률이 높다고 해서 해당 문제의 수감각 활용 비율이 높은 것도 아니었다. 다만, 나눗셈의 결과를 비교하는 문제는 직접 나누어보지 않고 수감각을 활용하여 그 이유를 작성한 비율이 상대적으로 높았다(표 IV-9 참조). 나누어지는 수가 같을 때 나누는 수가 클수록 그 값이 작아진다는 것이 교과서나 익힘책을 통해서 많이 다루어본 유형이기 때문으로 생각된다. 학생들이 많이 경험한 유형에 대해서는 수감각을 활용하는 비율이 높아지는 것으로 보아 학생들의 수감각을 개발하기 위해서 학생들에게 수감각을 활용하는 다양한 상황이나 유형을 많이 제공할 필요가 있다.

둘째, 같은 학교급 내에서는 상집단의 학생들이 하집단의 학생들보다 수감각 활용을 사용한 비율, 알고리즘 활용을 사용한 비율이 모두 높았고 하집단의 학생들은 정답 중 알고리즘 활용을 사용한 비율이 높게 나타났다. 이를 통해 상집단의 학생들은 수감각과 알고리즘을 둘 다 잘 활용하고 있으나 하집단의 학생들은 문제에 따라 융통성 있게 대처하기보다 전반적으로 알고리즘을 활용하여 해결하려는 경향을 보임을 알 수 있었다. 따라서 상황에 따라 언제 알고리즘이 필요한지, 언제 수감각을 활용하는 것이 효율적인지 분별할 수 있는 안목을 지속적으로 길러줄 필요가 있다.

셋째, 중학교 상집단과 초등학교 상집단을 비교했을 때, 중학교 상집단들은 수감각 활용을 더 많이 시도하고, 초등학교 상집단들은 알고리즘 활용을 더 많이 시도하는 경향이 있었다. 하지만 하집단들은 모든 부분에서 유의미한 차이가 없었다. 즉 학년이 올라갈수록 상집단에서는 수감각이 향상되었으나, 하집단에서는 그렇지 못한 것으로 나타났다. 상대적으로 하집단이 상집단에 비해 수감각 활용에 대한 경험이 부족한 것으로 보이며, 수감각은 연령이 높아진다고 저절로 길러지는 것이 아니므로 학교수학에서 다양한 수업 전략을 통해 수감각을 기를 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 수감각은 초등학교뿐만 아니라 이후 중고등학교에서 수학의 여러 영역의 발달에 기반이 되므로 하집단의 학생들의 수학 성취도 향상을 위해서 하집단 학생들에 대한 수감각 개발에 힘쓸 필요가 있다.

넷째, 수감각 구성 요소별로 비교했을 때, '수와 연산에 대한 지식의 적용과 반성'과 '수의 크기에 대한 감각'의 요소에서 수감각 활용을 사용한 비율이 다른 요소에 비해서 낮게 나타났다(4%~13%). 반면, '연산의 결과 이해'의 요소에서 수감각 활용을 사용하여 문제를 해결하는 비율이 가장 높게 나타났다(50%~55%). 이처럼 수감각의 구성 요소별로 수감각 활용 비율에 차이가 있기 때문에 수와 연산에 대한 지식을 적용하고 반성하는 요소와, 수의 크기에 대한 감각 요소는 좀 더 키워줄 필요가 있으며, 교육과정 전반에 걸쳐서 수감각을 골고루 활용할 수 있는 문제 상황을 제시하고 효율적인 해결 방법을 지도할 필요가 있다.

마지막으로 본 연구는 초등학교 6학년과 중학교 2학년을 대상으로 이루어진 것이기 때문에 연구를 확장하여 다른 학년의 학생들을 대상으로 한 연구가 필요하며, 중학교 이후에 학생들을 대상으로 수감각 활용에 대한 비교 연구 또는 국제적 측면에서의 비교 연구가 필요하다. 또한 앞으로 학생들의 수감각을 지속적으로 향상시키기 위한 구체적인 교수학습 방법에 대한 후속 연구가 이루어질 필요가 있다. 그리고 본 연구에서는 수감각 구성 요소별로 한 문제 또는 두 문제의 문제해결 방법만을 분석하였으나 연구를 확장하여 더 수의 검사 문항을 분석할 필요가 있으며, 초등학교 이후의 학생들을 위한 수감각 문제도 더 개발할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2009). 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2009-41호, 교육과학기술부.
- Ministry of Education, Science, and Technology (2009). *Mathematics Curriculum*, Notice of Ministry of Education, Science, and Technology No.2009-41, Ministry of Education, Science, and Technology.
- 김에화 (2006). 수학 학습장애 위험학생 조기선별검사 개발: 교육과정중심측정 원리를 반영한 수감각 검사, 특수교육학연구, **40(4)**, 103-133.
- Kim, A. H. (2006). Development of early screening test for students with mathematics difficulties: Curriculum-based measurement of number sense, *Korean Journal of Special Education* **40(4)**, 103-133.
- 방정숙 (2005). 초등학교 학생들의 계산 능력과 수감각(number sense) 연구, 한국학교수학회논문집, **8(4)**, 423-444.
- Pang, J. S. (2005). A study on the computation and number-sense ability of elementary school students, *Journal of the Korean School Mathematics* **8(4)**, 423-444.
- 선춘화 (2005). 초등학교 6학년 학생의 수감각 실태조사, 한국교원대학교 석사학위논문.
- Sun, C. H. (2005). *An survey on the number sense performance of sixth grades*, Master's thesis, Korea National University of Education.
- 성승현·정찬식·노은환 (2008). 수감각 증진 프로그램의 개발 및 적용에 대한 효과 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **47(1)**, 61-74.
- Seong, H. S., Jung, C. S., & Roh, E. H. (2008). The development and application of the program for advance of number senses, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education* **47(1)**, 61-74.
- 신창협 (2009). 수 연산 지도에서 수학 학습 도구와 알고리즘에 대한 연구, 단국대학교 박사학위논문.
- Shin, C. H. (2009). *A study on mathematical materials and algorithms in teaching number operations*, Doctorate dissertation, Dankook University.
- 이점미 (2005). 초등학교 3학년 학생들의 수 감각 발달을 위한 프로그램 개발과 적용에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문.
- Lee, J. M. (2005). *A study on the program development and application of the number sense for 3rd graders*, Master's thesis, Korea National University of Education.
- Bobis, J. (1991). The effect of instruction on the development of computation estimation strategies. *Mathematics Education Research Journal*, **3(1)**, 17-29.
- Bobis, J. (1996). Visualization and the development of number sense with kindergarten children. In J.

- Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's Number Learning : A Research Monograph of MERGA/AAMT*(pp. 17-33). Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Burns, M. (2007). *About teaching mathematics: A K-8 resource(3rd ed.)*. Sausalito, CA: Math Solutions.
- Case, R. (1998). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, April, San Diego, CA.
- Case, R. & Sowder, J. T. (1990). The developing of computational estimation: A neo-Piaetian analysis. *Cognition and Instruction*, **7(2)**, 79-104.
- Faulkner, V. N. & Cain, C. (2009). Components of number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, **41(5)**, 24-30.
- Fischer, F. E. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number to kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21(3)**, 207-215.
- Gersten, R. & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *Journal of special Education*, **33(1)**, 18-28.
- Hope, J. A. & Sherrill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18(2)**, 98-111.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 기준. 서울: 경문사.
- Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher*, **36(6)**, 47-51.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Heibert & M. Behr (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education: Number Concepts and Operations in the Middle Grades(2)*(pp. 192-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Trafton, P. R. (1992). Using number sense to develop mental computation and computational estimation. In C. Irons (ed.), *Challenging children to think when they compute*(pp. 78-92). Brisbane: Centre for Mathematics and Science Education, Press of Queensland University of Technology.
- Yang, D., Li, M., & Lin, C. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education*, **6(4)**, 789-807.
- Zazkis, R. & Campbell, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(5)**, 540-563.

Analysis on number sense for problem solving methods of elementary and middle school students

Kim Ji Youn

Kyungpook National University, graduate
E-mail : youn9808@hanmail.net

Hyun Eun Jeong

Siji high school
E-mail : hyunej74@hanmail.net

Kim Seong Kyeong[†]

Ulsan Joongang high school
E-mail : biblemany@hanmail.net

Mathematics education emphasizes on nurturing number sense, but researches on this have been scarce, and most of them has been confined to elementary level students. This thesis, therefore, tried to analyze how elementary students solve mathematics sense problems in order to give some insight into how to teach number sense. For this, this thesis categorized into two ways of using number sense and algorithm as problem solving, and analyzed students' responses using test sheets. Accordingly, middle school students showed higher score on the number sense test and higher rates of using number sense than elementary students. In addition, students showing higher achievement used both number sense and algorithm, but those of lower achievement were more likely to use only algorithm. Plus, among students showing higher achievement, middle school students used more number sense than elementary school students, but there was not meaningful difference among those showing lower achievement. Lastly, It was shown that there was difference in the rate using number sense according to the number sense components.

* ZDM Classification : C33

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

* Key Words : number sense, number sense component, algorithm, problem-solving methods

[†] Corresponding author