한국학교수학회논문집 제 18 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 18, Number 4, 411-429, December 2015

GSP를 활용한 기하수업에서 수준별 학생의 논증기하와 해석기하의 연결에 관한 연구[1)]

도정철[2)] · 손홍찬[3)]

본 연구에서는 기하 문제해결에서 GSP의 활용이 수준별로 학생들에게 어떤 영향을 끼치는지에 대해 알아보았고, 특히 논증기하와 해석기하의 연결성에 어떤 영향을 주었는지에 관하여 살펴보았다. 구체적으로 살펴보면 상 수준의 학생은 기하 문제를 해결하기 위해 바로 형식적인 대수적 식을 사용하는 것을 선호하였고, 중·하 수준의 학생의 경우에는 GSP의 도움을 받아 대수식을 찾고자 하는 노력을 보였다. 특히 하수준의 경우에는 문제해결에는 실패하였지만 GSP의 도움을 받아 문제를 이해할 수 있는 경우가 많았다. 논증기하와 해석기하의 연결성과 관련하여 GSP의 역동적인 환경은 형식화된 해석기하적 표현의 의미를 한 눈에 파악할 수 있도록 도움을 주었고, 해석기하적 접근 방식을 사용한 풀이를 전개한 후 문제해결의 반성 단계에서 그 결과의 의미를 시각화하여 전체적으로 이해할 수 있도록 도움을 줄 수 있음을 알 수 있었다.

주요용어 : GSP, 해석기하, 논증기하, 연결

Ⅰ. 들어가며

17세기 초에 Descartes는 Euclid 기하적인 전통에 도전하여 대수적 수단, 즉 방정식을 이용하여 기하학을 연구하는 해석기하학을 탄생시켰는데, 이 해석기하학이야말로 도형의 성질을 다양한 문제의 대수적 해결로 확장시켰음은 물론 함수 개념과 미적분학을 탄생시킴으로써 새로운 수학, 과학의 세계를 연 위대한 착상이었다고 말하였다(우정호, 1998).

수학의 대수적인 측면은 기하학적 측면에 의해 확장, 발전되어 왔으며 기하학적 측면은 대수적인 측면에 의해 보완되어 왔고, 그러한 노력이 수학의 발달과정에서 중요한 역할을 하였다(유익승, 한인기, 2011). 실제로 7차 개정 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008)에서는 고등학교 1학년에서 다루는 기하는 대수적인 방법으로 접근하는 해석기하이며 이는 중학교에서 학습한 도형에 관한 여러 성질과 관계를 대수적인 방법으로 새롭게 조명해볼 수 있는 기회를 제공한다고 밝히고 있다. 『수학 수업을 위한 전문성 규준(Professional Standards for Teaching Mathematics)』을 개정한 『수학 수업의 현재와 미래(Mathematics Teaching

1) 이 논문은 2012년도 전북대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 전북대학교 대학원 (iearnest@jbedunet.com)
3) 전북대학교 (hcson@jbnu.ac.kr), 교신저자

Today)』에서 National Council of Teachers of Mathematics(2007)은 중등 수학 교육을 전공한 수학 교사와 예비 교사가 고등학교 교육과정에 포함되어 있는 대수와 기하 사이의 연결성에 대해 익숙해져 있어야 한다고 명시하고 있다(류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역, 2011).

그러나 현재 우리 기하교육의 실재를 보면 기하학의 대수적 결합 및 접근 방법이 대수학과 기하학의 연결성을 강화하고 새로운 수학적 개념의 의미를 확장시키는데 기여하지 못하고 있는 실정이다. 고등학교 때 배우는 해석기하는 규칙과 절차를 적용하는 단순한 기계적인 처리가 되기 쉬우며 기하적인 부분이 대수적인 부분에 가려 도형의 성질에 관한 개념 이해가 제대로 되지 못하고 있다(우정호, 1998; 이수진, 2005, 재인용). 대수적인 도형의 방정식의 전형적인 풀이 절차만이 중시되고 그것이 갖는 기하학적 측면을 파악하지 못한다는 것은 바람직한 기하교육과는 거리가 있다.

따라서 대수, 기하의 연결성을 강화하기 위한 교수학습 방안의 모색이 필요하다. 수학은 개인차가 크게 나타나는 교과이므로 학생의 인지 발달 단계, 학습 수준, 학습 특성 등을 고려한 적절한 교수·학습 방법을 적용해야 한다(교육과학기술부, 2011). 탐구형 소프트웨어의 활용은 학생들이 다양한 사례를 조사하고 추측, 탐구하며 중요한 기하 개념을 더 깊이 이해할 수 있도록 돕는다(NCTM, 2000). 따라서 본 연구는 GSP를 활용한 수업이 수준별로 기하에 관한 문제해결에서 해석기하와 논증기하의 연결성 강화에 어떤 영향을 미치는지 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 문헌 검토

현대수학의 중요한 특징은 대수에 의한 수학의 연구라고 할 수 있다. 대수적인 표현은 간결하고 여러 가지 조작과 처리를 용이하게 한다. 그러나 학생들의 입장에서 보면 대수적 구조의 의미를 잘 이해하지 못한 채 기계적인 계산에 치우칠 가능성이 높다.

나귀수(2006)에 의하면 고등학교에서 해석기하를 배운 후에 이를 중학교에서 학습했던 종합기하적인 방법과 비교하고 통합할 수 있도록 교과서를 구성할 필요가 있다. 수학은 기하적 아이디어와 대수적인 아이디어를 두 축으로 하여 이루어진 학문이므로 그 어느 쪽도 소홀히 할 수 없으며 기하교육에서 시각적이고 직관적인 기능과 분석적이고 논리적인 기능의 통합적인 지도가 필요하다(우정호, 1998). Ostrovski & Kordemski(1960)는 문제해결에서 기하학적인 방법을 사용하는 것은 미지수의 선택, 추론 절차 만들기와 같이 산술적 계산 중심의 방법에서 생겨나는 어려움을 상당 부분 극복할 수 있게 하고, 단순한 알고리즘에 의한 문제해결 방법에서 벗어난 새로운 문제해결 방법을 찾는데 도움을 준다고 하였다(유익승, 한인기, 2011, 재인용).

논증기하와 해석기하의 연결성 강화를 위한 효과적인 기하교육 지도 방법을 찾는데 직접 조작이 가능하고 관찰이 용이한 탐구형 소프트웨어인 GSP를 활용할 수 있다.

GSP는 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 도형을 쉽고 정확히 작도할 수 있도록 한다. 측정 및 계산 기능이 있고 도형의 방정식을 그래프로 그릴 수 있는 기능도 가지고 있다. 또한 애니메이션 기능이 있어 움직이는 도형으로 흔적이나 자취를 구하거나 도형의 성질을 설명할 때 사용할 수 있다. 이러한 의미에서 GSP와 같은 소프트웨어가 주어지는

환경을 역동적 기하 환경이라고 하는데, '역동적 기하(dynamic geometry)'란 용어는 Nick Jackiw와 Steve Rasmussen에 의해 만들어진 뒤 많은 문헌에서 쓰이게 되었다(Goldenberg & Cuoco, 1998).

GSP 환경에서 작도 시에 나중에 그려지는 하위 개체는 초기에 그려지는 상위 개체의 영향을 받게 되는데, 상위 개체가 움직이면 하위 개체가 따라서 움직이므로 도형들의 관련성을 명백히 드러내준다. Leung(2003)은 이와 같은 특징이 경험적 수학과 이론적 수학을 잇는 다리 역할을 한다고 하였다. GSP 환경의 특징 중의 하나는 드래그를 통한 도형의 변환인데 변환 시에 화면상에서의 불변하는 성질은 기하적으로도 불변하는 성질을 보여준다. Leung(2012)은 드래그 하는 동안 도형의 변화가 일정하다고 인식된 도형의 기하학적 특성을 1수준 불변량이라 하였고, 불변성들 사이의 관계는 그 자체가 하나의 불변량이며 드래그 활동을 통해 인식될 수 있다고 하면서 1 수준 불변성 사이의 불변적인 관계를 2 수준 불변량이라고 하였다. GSP의 동적 기하환경에서는 드래그 활동을 통해 기하적 불변성을 인식하고, 흔적 남기기 등을 통하여 기하 도형 사이의 관련성을 파악하기가 용이하여 학생이 문제해결과 추론에서 도움을 받을 수 있다.

논증기하와 해석기하의 연결에 관한 기존의 연구들이 있다. 박종률(2008)은 GSP의 활용이 수식과 기하학적 표현 사이의 연결성을 인식하고 수학적 직관의 향상을 통해 문제해결력을 기르는데 효과가 있다고 주장하였고, 김향숙, 박진석, 하형수(2011)는 고등학교 수준에서 논증기하와 해석기하의 조화를 이룰 수 있는 방안의 하나로써 이차곡선을 활용한 정칠각형에 대한 작도방법을 고찰하였다. 황우형, 차순규(2002)는 고등학교 해석기하 부분을 학습할 때, GSP를 사용하는 것이 전통적인 대수적 접근 방법보다 수학적인 개념 형성에 어느 정도 도움을 주는지를 분석한 글에서 첫째, 기하적인 접근 방법에서의 결과와 대수적인 접근 방법에서의 결과가 다를 때 문제를 재검토하는 사례를 통해 수학적 연결성이 중요한 역할을 하였고, 둘째, 시각적인 면과 GSP의 역동적인 모습이 학생들의 수학적 개념 형성에 도움이 된다고 주장하였다.

그러나 연결성 관점에서 보다 구체적인 문제 상황에서 컴퓨터 환경이 효과적인지 지필환경에서 효과적인지 학생의 수준을 고려한 연구는 많지 않았다. 따라서 논증기하와 해석기하의 연결성 관점에서 학생의 수준에 따른 GSP활용의 효과를 분석할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

연구에 참여한 학생과 연구자가 소속된 학교는 지방의 중소도시에 소재하고 있는 인문계(남자, 평준화) 고등학교이다. 수업에 참여한 학생들은 모두 1학년으로 희망하는 학생 중 전국연합학력평가 수리영역 결과를 기준으로 상수준 2명(23, 52등), 중수준 2명(131, 142등), 하수준 2명(316, 343등)씩 선정하여 총 6명이다(총원 381명). 학생과 학부모에게 연구의 목적을 설명하고 동의서를 받았다. 학생들은 GSP를 사용해본 경험은 물론 컴퓨터를 활용한 수학 수업에 참여한 경험이 없었다.

2. 실험 수업의 설계

가장 이상적인 실험상황은 학생들이 자유롭게 컴퓨터를 이용할 수 있는 교실에서의 정규 수업이지만 그런 시설이 마련되어 있지 않고 별도의 시간을 활용할 수 없다는 현실을 감안하여 야간자율학습 시간에 특별실을 이용하여 수업을 진행하였다. 사용한 소프트웨어는 GSP 4.0이며 본 수업을 하기 전에 약 90분 정도 학생들에게 기본적인 GSP 기능을 소개하고 연습해보도록 했다. 그 시간에 학생들은 수직이등분선, 이등변삼각형, 직각삼각형, 정삼각형, 직사각형, 정사각형 등 기본도형을 작도하였고 수선, 평행선, 흔적 남기기, 그래프, 측정 등의 기능을 익혔다.

본 실험 수업은 특별실로 옮겨서 진행하였다. 6명의 학생은 상·중·하 수준으로 나누어 각 3명씩 두 개의 조로 구성하였고, 각 조는 각각 테이블 하나와 노트북 한 대씩을 사용하였다. 본 실험 수업은 3주간에 걸쳐 야간 자율학습 시간에 90분씩 9차시로 진행하였고, 문항의 난이도와 수에 따라 한 차시가 두 회에 걸쳐 진행된 적도 있었다. 동영상 캡쳐 프로그램인 캠코더를 이용하여 GSP를 활용하는 노트북 화면을 저장하였으며 스마트폰을 이용하여 수업하는 전체 모습을 녹화하였다. 마이크가 내장되어 있는 노트북을 사용하여 음성과 화면을 같이 저장하였다.

활동지는 매 차시마다 크게 두 면으로 나누어 구성하였다. 문제가 제시되어 있는 부분, 그 풀이 과정을 서술할 수 있는 부분과 문제풀이 과정에서 GSP를 어떻게 활용하였는지 정리할 수 있는 부분으로 나누었다.

3. 연구자료 수집 및 결과 분석 방법

자료는 면담 자료, 관찰 자료, 오디오와 비디오 자료, 문서 자료, 노트북 화면을 동영상으로 저장한 파일을 토대로 수집하였다. 학생이 GSP를 활용한 화면 및 교사와 학생 또는 학생들 사이의 대화, 활동지, 설문지 등을 자료로 삼아 주로 다음과 같은 관점에서 분석하였다. 첫째, GSP의 활용은 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 어떤 영향을 주는가? 둘째, GSP를 활용하여 기하에 관한 문제를 해결할 때, 해석기하와 논증기하의 연결성에 어떤 영향을 주는가?

Ⅳ. 결과 분석

첫 번째 연구 문제인 GSP의 활용이 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 어떤 영향을 주는가에 대해, 수준별로 학생의 전반적인 활동 특징과 구체적인 문제 상황에서 보이는 차이에 대해 얻은 결과를 알아보고, 두 번째 연구 문제인 논증기하와 해석기하의 연결성에 어떤 영향을 주는지에 관하여 살펴본다.

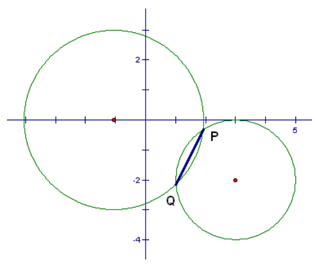
1. 수준별 학생에 따른 GSP 활용의 특징

대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 대해 수준별로 나타난 학생 활동의 특징은 다

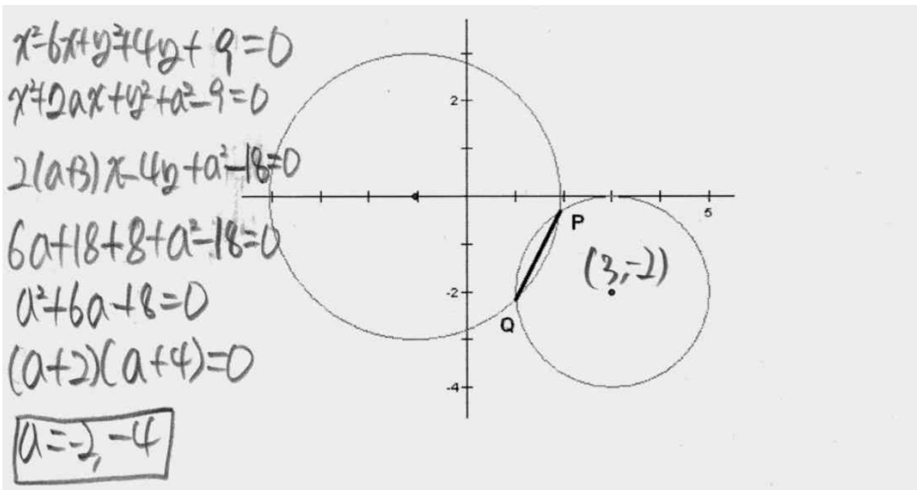
음과 같다.

첫째, 상수준의 학생은 주로 대수식의 계산을 통한 문제 해결을 더 선호하는 것으로 관찰되었다. 상수준의 A1학생[4]은 지필환경에서 문제를 해결할 때 대수적인 접근 방법을 주로 사용하였다. 그리고 문제 상황을 GSP에 구현하면서 자신의 풀이를 점검, 확인하는 모습을 보였다.

문제 상황(1차시 1번) : 두 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$, $(x+a)^2+y^2=9$이 점 P, Q에서 만나는 위치관계에 놓여 있다. 이 때, 선분 PQ의 길이가 최대가 되게 하는 a의 값을 구하시오.



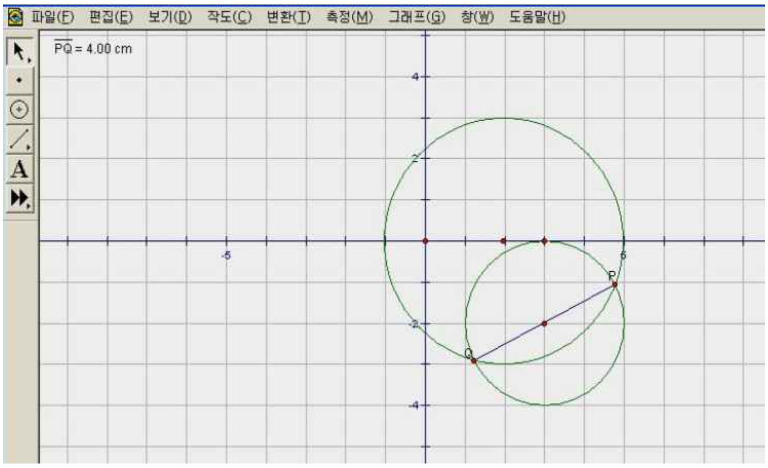
위의 문제 상황에 대하여 학생은 지필환경에서 공통현이 반지름의 길이가 작은 원의 중심을 지날 때 최대가 됨을 이해하고 공통현의 방정식을 구하여 원의 중심의 좌표를 대입하는 방법으로 a의 값을 구하였다([그림 Ⅳ-1]).



[그림 Ⅳ-1] 지필환경에서 대수식의 계산을 통해 해결한 A1학생의 풀이

4) 학생A1은 1조의 상수준의 학생, B1은 1조의 중수준의 학생, C2는 2조의 하수준의 학생을 의미한다.

지필환경에서 문제를 해결한 A1학생은 자신의 답을 확인하고자 할 때 GSP를 사용하였다. 학생은 GSP를 사용하여 중심이 $(3, -2)$이고 반지름이 2인 원, 중심이 x축 위에서 움직이는 반지름이 3인 원을 차례로 작도하고, 드래그 기능을 이용하여 교점 P, Q를 연결한 선분의 길이가 어떻게 변하는지를 관찰하였다([그림 Ⅳ-2]). 반면 중수준의 B1학생은 공통현이 반지름이 작은 원의 지름이 될 때 최대가 되는 사실보다 GSP의 화면에서 계산된 값(선분 PQ의 길이)에 관심을 갖는 모습을 보였다(<에피소드1> (1), (4)). A1학생은 두 원의 위치 관계(원의 중심)에 관심을 기울였고 두 개의 a 값이 나오는 상황을 모두 시각적으로 확인하였다(<에피소드1> (9), (11)).



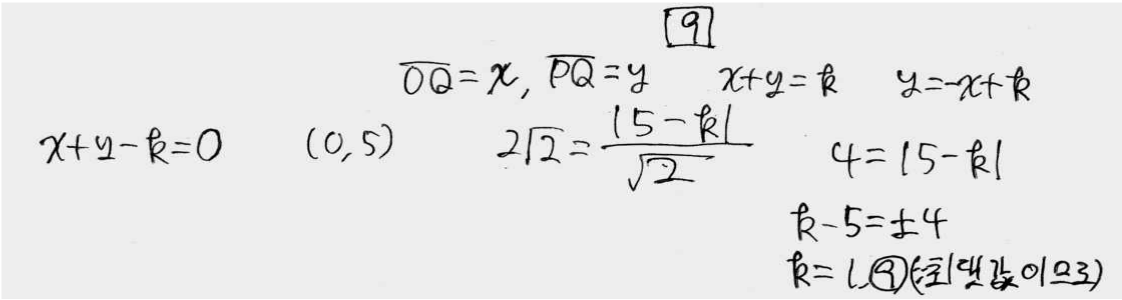
[그림 Ⅳ-2] A1학생이 큰 원의 중심을 끌며 공통현의 길이를 관찰하는 모습

<에피소드1> (괄호 안은 연구자의 해설을 의미함.)

1. 학생B1 : 아, 지름일 때 최대. 답이 4야.
2. 학생C1 : 오.
3. 학생A1 : 답이 4라구? 이거일 때 최대지.
4. 학생B1 : 아니. 답이 4라는 게 아니라. 이 지름일 때가 4라구.
5. 학생A1 : 4가 뭐?
6. 학생B1 : 최댓값이 된다구. PQ의 길이가 최댓값이 된다구.
7. 학생A1 : a의 값을 구하시오야.
8. 학생B1 : 그니까 최대를 구했으니까 이제 얘를 구하면 되지.
9. 학생A1 : 아니 4인 거 누가 몰랐냐고. 지름이 나와 있는데.
   2랑 4일 때. 야 4일 때 해봐. (A1은 a의 값이 아니라 원의 중심의 x좌표를 이야기 하고 있음)
10. 학생B1 : 4?
11. 학생A1 : 지금은 2잖아.
12. 학생B1 : PQ가 4라고.
13. 학생A1 : 원의 중심을 4로 움직여봐.

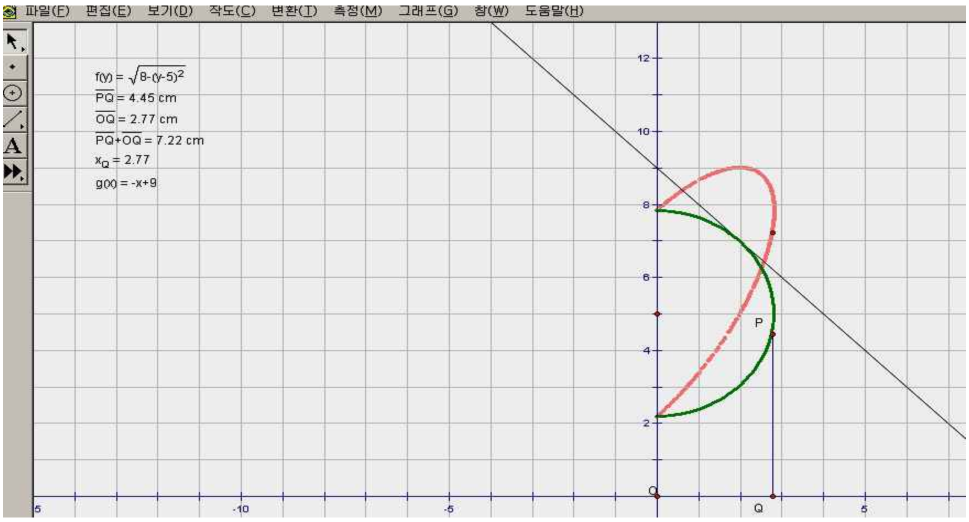
문제 상황(3차시 1번): 원 $x^2+(y-5)^2=8$ 위의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은? (단, 점 P는 제1사분면에 있고, O는 원점이다.)

위의 문제 상황에 대하여 A1학생은 $\overline{\mathrm{OQ}}$를 x, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 y라고 놓고 방정식 $x^2+(y-5)^2=8$을 만족하는 실수 x, y에 대해 $x+y$의 최댓값을 구하는 문제로 바꾸어 해결하였다([그림 Ⅳ-3]).



[그림 Ⅳ-3] 선분의 길이의 합을 직선으로 해석한 A1학생의 지필환경 풀이

A1학생은 지필환경에서 대수식의 계산을 통해 답을 구했지만 그 기하학적 의미까지는 생각하지 못하다가 GSP를 활용하여 문제 상황을 구현하고 조작하는 과정([그림Ⅳ-4])에서 흔적남기기 기능을 통하여 대수식을 기하학적으로 해석하고 그 의미를 새롭게 파악하였다(<에피소드2> (10), (17)).



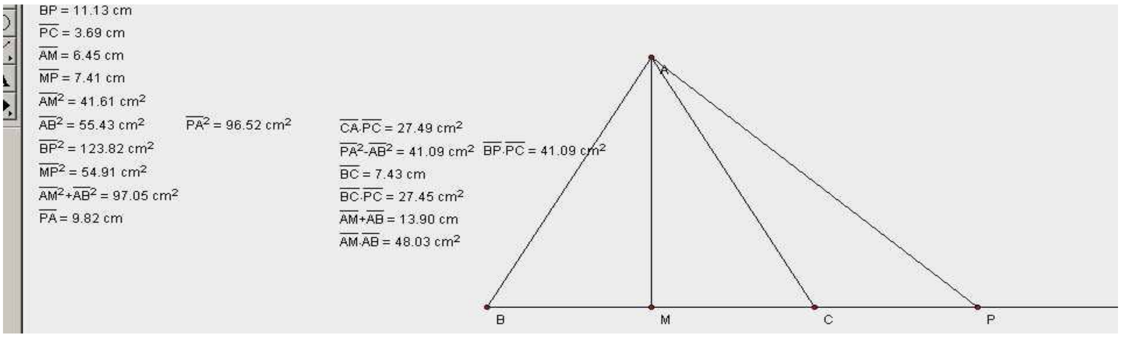
[그림 Ⅳ-4] 1, 2조가 문제 상황을 흔적남기기 기능을 이용하여 GSP에 구현한 화면

<에피소드2>
1. 연구자 : 원 위에서 움직이는 점이 뭐지?
2. 학생B1 : P.
3. 학생B2 : 점 P.
4. 연구자 : 움직이는 점을 뭐라고 그래?
5. 학생B2 : 동점이요.
6. 연구자 : 그래. 그러면 동점 P의 좌표를 뭐라고 나타낼 수 있어?
7. 학생B1 : x 좌표. x 값?
8. 학생A1 : x, y요.
9. 연구자 : 지금 우리가 구하는 게 뭐지?
10. 학생A1 : OQ 플러스 PQ의 최댓값요. 아. x 플러스 y의 최댓값요. 아. 나 알 것 같아. 알았어.
11. 학생B2 : 뭐?
12. 연구자 : 더 구체적으로 알아보기 위해 여기 수선의 발 점 Q에다 측정, x 좌표 해봐. 그리고 더한 것 차례로 선택하고. x, y 좌표가 주어진 점 찍어봐. 그리고 동점을 움직여봐.
13. 학생B1 : 점 하나가 나왔네. 얘를 흔적 남기기 해봐.
14. 학생B2 : 오. 색, 색깔. 좀 다르게. 진하게.
15. 연구자 : 그럼 아까 $x+y$의 최댓값을 구하면 된다고 했는데, 생각나는 개념 없어?
16. 학생B2 : 너 알지?
17. 학생A1 : 접선. 접선 그려봐.

둘째, 문제를 이해하는 단계에서 상수준의 학생은 지필환경에서 좀 더 오랫동안 탐색하는 모습을 보인 반면, 중수준의 학생은 지필환경에서 그림을 그리고 조작하는 것을 어려워하며 문제 상황을 의미 있게 다루지 못하다가 비교적 이르게 GSP를 실행하여 문제 상황에 접근을 시도하였다.

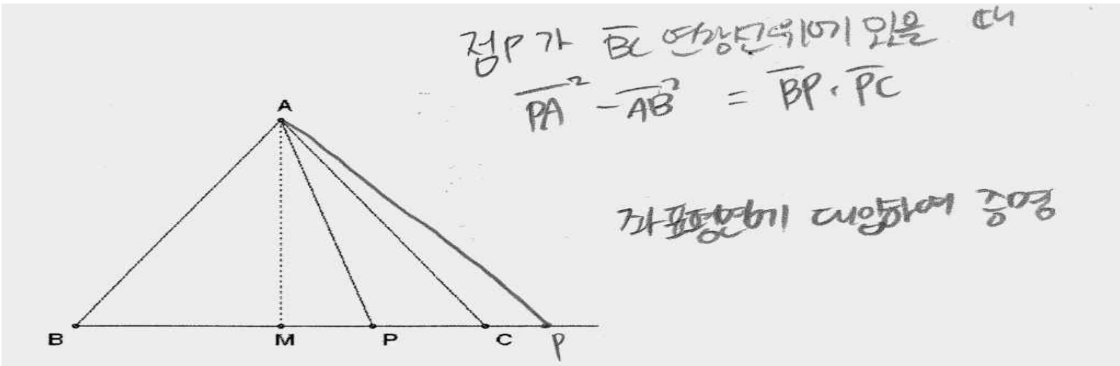
문제 상황(5차시 2번) : 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 꼭짓점 A를 지나는 직선이 $\overline{BC}$ 또는 그 연장선과 만나는 점을 P라 할 때, 성립하는 관계식을 찾고, 증명하시오.

위의 문항에 관하여 2조는 GSP에서 이등변삼각형 ABC, 반직선 BC를 작도한 후 동점 P를 이동시키더라도 항상 성립하는 관계식이 무엇인지 측정과 계산 기능을 주로 사용하여 탐색하였다. 기본적으로 선분의 길이를 모두 측정하고, 몇 가지 관계식을 추측하여 계산해보아 맞는지를 확인하였다. 그 과정에서 $\overline{AP}^2-\overline{AB}^2$의 값이 $\pm\overline{BP}\times\overline{CP}$의 값과 같음을 발견하였다([그림 Ⅳ-5]). 점 P가 $\overline{BC}$의 연장선 위에 있을 때는 $\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=\overline{BP}\times\overline{CP}$이 성립하고, 점 P가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때는 $\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=-\overline{BP}\times\overline{CP}$이 성립한다고 하였다.



[그림 Ⅳ-5] 2조가 점 P를 이동시키면서 측정값을 관찰하는 모습

이에 대해 중수준의 B2학생은 좌표평면에 대입하여 풀면 된다고 하며, 구체적인 증명은 생략하였다([그림Ⅳ-6]).



[그림 Ⅳ-6] GSP를 활용하여 관계식을 찾은 B2학생의 풀이

중수준의 학생은 GSP에 문제 상황을 옮겨 도형의 자취나 움직임을 파악하는 활동을 통해 문제에서 주어진 대수식의 의미를 시각적으로 확인하고 문제 해결 방법을 탐구하였다. 하지만 대수식의 조작을 통한 정당화의 과정에는 이르지 못하였다.

셋째, 하수준의 학생은 대수식의 조작은 물론 방정식을 그림으로 표현하는데 어려움을 겪었다. GSP의 수선, 평행선, 중점과 같은 기본적인 작도 기능, 함수 그래프 기능 등에 도움을 받아 문제 이해 단계에서 문제 상황을 시각적으로 확인하였다.

2. GSP 활용이 대수식의 기하학적 해석에 미치는 영향

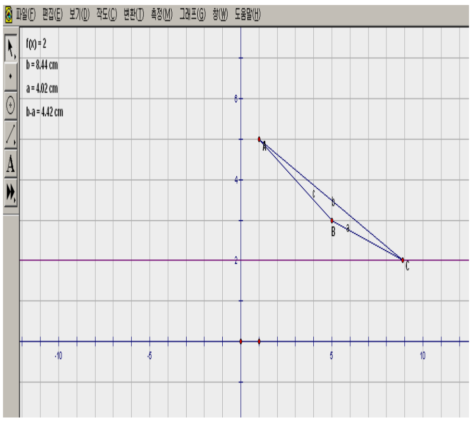
GSP의 활용이 수준별 학생에 따라 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 어떤 영향을 주는지에 관하여 구체적으로 살펴보면, GSP의 활용이 대수식의 기하학적 해석에 도움을 주는 측면은 크게 두 가지 경우로 나뉜다.

첫째, 대수식으로 풀 수 없는 문제를 기하적으로 해석하여 GSP로 구현해봄으로써 문제해결의 실마리를 찾을 수 있었다. 다음과 같은 두 가지 문제 상황에서 이에 관한 관찰을 할 수 있었다.

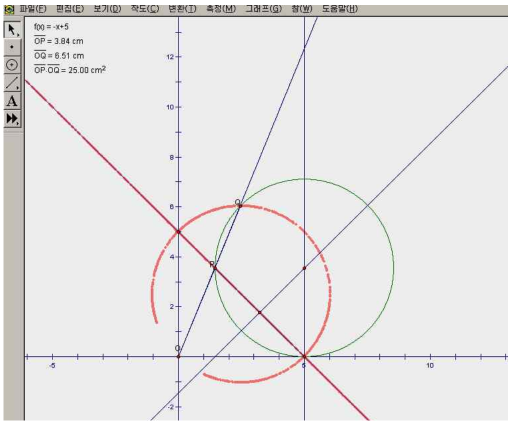
문제상황(2차시 1번) : 점 A(1, 5)와 점 B(5, 3)가 주어져 있을 때, 동점 C(a, 2)에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{BC}}$의 최댓값을 구하시오.

문제 상황(9차시 2번) : 점 P가 직선 $y=-x+5$ 위를 움직이고, 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = 25$ 를 만족하는 점 Q를 선분 OP 또는 반직선 OP의 연장선 위에 잡을 때, 점 Q의 자취의 방정식은?

지필환경에서 학생들은 2차시 1번, 9차시 2번 문제를 해결할 핵심적 아이디어를 찾는데 어려움을 겪었다. 식을 통한 계산은 어렵거나 수준을 넘어섰고, 추측을 했지만 그 추측이 맞는지 확인할 수 없었다. 학생들은 연구자의 안내 및 GSP를 활용한 문제 구성, 조작 활동을 통하여 문제 상황을 기하학적으로 새롭게 조명하고 해결의 실마리를 찾을 수 있었다([그림 Ⅳ-7], [그림 Ⅳ-8]).

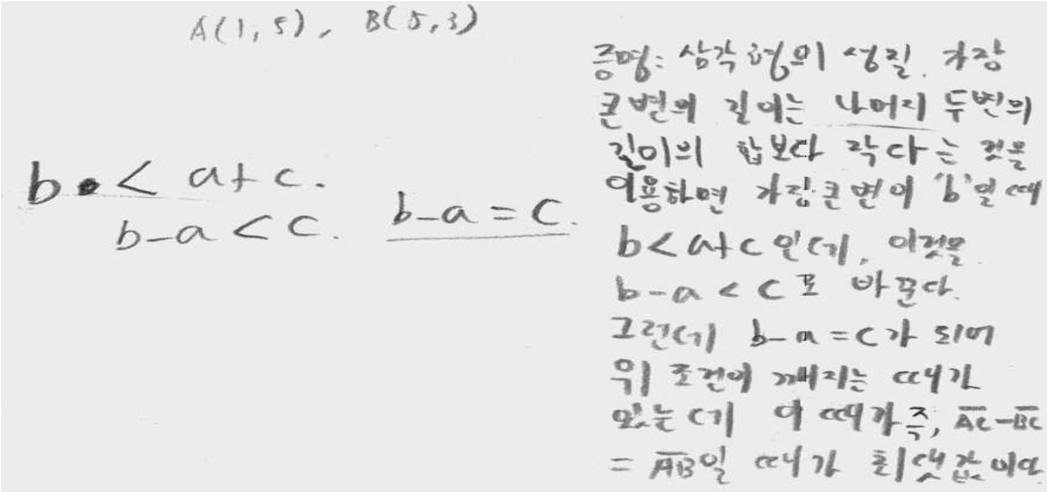


[그림 Ⅳ-7] 1조가 2차시 1번 문항에 담긴 기하학적 의미를 탐색하는 모습



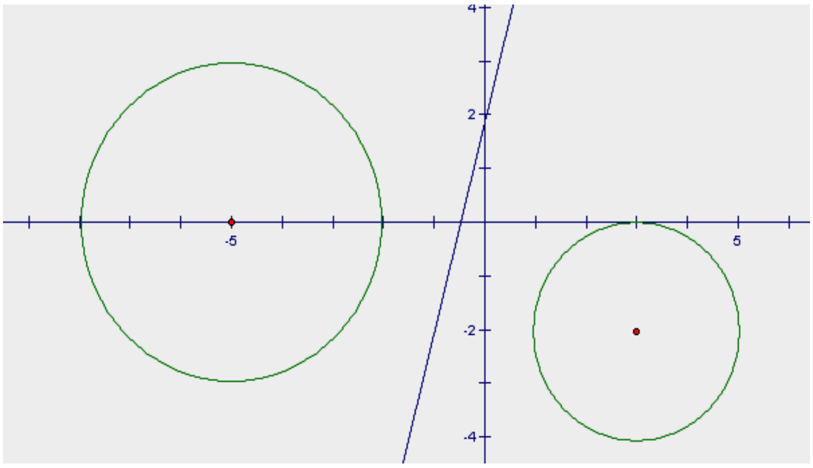
[그림 Ⅳ-8] 1조가 9차시 2번 문항에 담긴 기하적 의미를 탐색하는 모습

다만 수준별로 상·중 수준의 학생들은 그 기하학적 상황을 다시 대수식으로 번역하여 문제를 해결할 수 있었고([그림 Ⅳ-9]), 일부 중 수준의 학생과 하 수준의 학생들은 대수식의 번역 과정 및 대수식의 계산 단계에서 어려움을 겪거나 문제 이해 단계에서 더 나아가지 못하는 차이점이 나타났다.



[그림 Ⅳ-9] GSP에서 힌트를 얻은 B1학생의 정당화

둘째, 학생들은 GSP를 활용해봄으로써 평소에 대수식의 계산, 변형이 의미하는 바를 기하적, 또는 동적으로 이해하지 못하고 무슨 공식을 어떻게 대입해서 문제를 풀 것인지에만 관심이 머물러 있었음을 새롭게 인식할 수 있었다. 상수준의 A1학생은 1차시 1번 문제에서 공통현의 방정식이 가지고 있는 동적인 측면을 새롭게 인식하였고, 두 원이 만나지 않을 때의 경우로 확장하여 직선의 방정식의 기하학적 의미를 탐색하였다([그림 Ⅳ-10]). 중·하 수준의 학생들은 GSP를 활용한 조작, 관찰, 탐구활동을 통해 $(x-a)^2+(y-1)^2=4$, $y=-x+k$와 같은 도형의 방정식의 동적인 측면을 인식하고 문제의 역동적인 상황을 파악할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-10] A1학생이 두 원이 만나지 않을 때 직선의 방정식 (근축)의 기하학적 의미를 탐색하는 모습

3. GSP의 활용이 논증기하와 해석기하의 연결성에 미치는 영향

두 번째 연구문제인 기하에 관한 문제해결에서 GSP의 활용이 논증기하와 해석기하의 연결성에 어떤 영향을 주는지에 관하여 살펴본 결과는 다음과 같다.

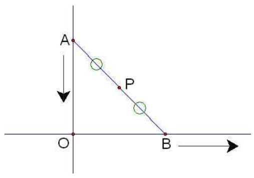
첫째, GSP의 역동적이며 동적인 환경은 형식화된 해석기하학적 표현의 의미를 한 눈에 파악할 수 있도록 도움을 주는 것을 확인할 수 있었다.

3차시 1번 문항에서 A1학생은 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 해석기하학적 접근방법을 통해 해를 구하였지만, 문제 상황에 담긴 변화의 양상 및 동적인 구조를 전체적으로 파악하지 못하였다. 그러나 학생은 GSP를 사용하여 문제 상황을 구성하고, 변화를 줌으로써 수치의 결과가 달라지는 것을 시각적으로 확인하는 과정을 통해 해석기하학적 풀이의 역동적인 의미를 이해하였다(<에피소드2> (10), (17)). 즉 기하 문제해결에서 GSP의 활용은 상수준의 학생이 해석기하학적 접근 방식을 사용한 풀이를 전개한 후 문제해결의 반성 단계에서 그 결과의 의미를 시각화하여 전체적으로 이해할 수 있도록 도움을 준다([그림 Ⅳ-4]).

둘째, GSP는 기계적인 연습문제, 또는 학생들의 능력을 벗어나는 해석기하학적 문제를 의미가 풍부한 논증기하학적 문제로 해석하여 해결할 수 있도록 도움을 준다.

A1학생은 3차시 2번 문제 상황에서 GSP를 활용하여 문제 상황을 더 잘 이해하고 대수적 번역을 통한 문제 해결을 시도하였다(<에피소드3> (6), (8)).

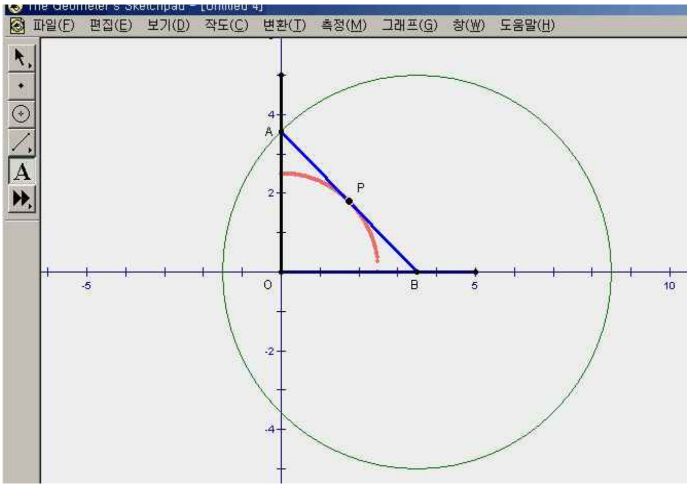
문제상황(3차시 2번): 벽면에 길이가 5인 사다리가 놓여있다. 아래 그림과 같이 사다리가 벽면에서 미끌어져 내린다고 하자.



사다리의 중점 P가 나타내는 자취의 방정식을 구하시오.

<에피소드3>

1. 학생A1 : 선생님. 사다리 길이를 유지시키면서 변하게 만드는 방법 없어요?
2. 연구자 : 지금 어떻게 했는데?
3. 학생A1 : 여기에 점 찍고 선분 만들고 움직이면 사다리 길이가 문제에서는 안 변해야 하는데.
4. 연구자 : 원에서 사다리를 반지름으로 보면 어떨까?
5. 학생A1 : 원이요?
6. 학생A1 : 아. 알았다 알았다. 여기 점 하나 찍고 길이가 5인 선분. 그리고 중심과 반지름이 주어진 원.
7. 학생B2 : 니네 했어?
8. 학생A1 : 난 천재인 것 같애.
9. 연구자 : 중점에다 흔적을 남겨봐.



[그림 Ⅳ-11] 1조가 GSP를 활용하여 문제 상황을
시각적으로 구현한 화면

위 문제에서 학생들은 연속적으로 움직이는 도형을 시각적으로 관찰하여 힌트를 얻고 대수적 풀이를 시도하였다([그림 Ⅳ-11]).

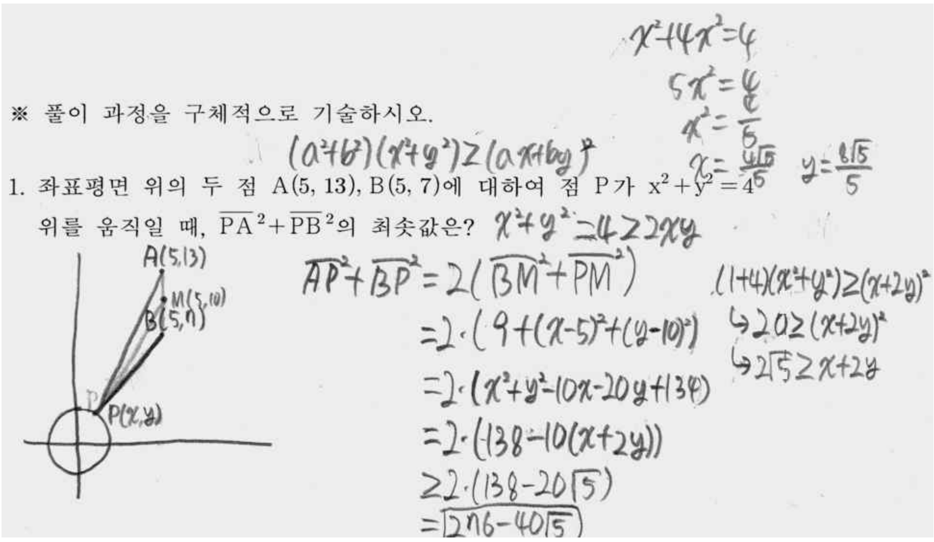
GSP의 활용은 대수적 풀이가 어려운 문제를 기하적으로 해석하고 이를 다시 대수적 번역을 통해 문제 해결에 이르게 하였다.

A1·B1학생은 2차시 1번 문제 상황에서 좌표평면을 도입하여 대수식 $\sqrt{(1-a)^2+(5-2)^2}-\sqrt{(5-a)^2+(3-2)^2}$ 을 이끌어내고 이 대수적 식을 이용하여 해결하려고 했으나 변화의 관계를 살펴보고 풀어야 하므로 어려움을 겪었다. 학생은 GSP의 화면에 세 점을 선분으로 연결하고 길이를 측정, 계산해봄으로써 삼각형의 성질을 이용한 논증기하적 해결 전략을 의미 있게 구성할 수 있었다([그림 Ⅳ-7]).

문제상황(4차시 1번) : 좌표평면 위의 두 점 $A(5,13)$, $B(5,7)$에 대하여 점 P가 $x^2+y^2=4$ 위를 움직일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최솟값은?

4차시 1번 문제에 대해서 A1·B1학생은 실수 x, y가 $x^2+y^2=4$를 만족할 때, $\sqrt{(x-5)^2+(y-10)^2}$의 최솟값을 구하는 문제로 해석될 수 있음을 알았다. 하지만 해석기하적인 방법으로 풀려고 하였으나 의미 있는 진전을 보이지 못하였다. 학생은 이 문제 상황을 GSP의 좌표계에 옮겨 원 위를 움직이는 동점 P를 구현해봄으로써 원 밖의 점으로부터 원까지의 최단 거리를 구하는 방법을 탐색하는 문제 상황으로 바꾸어 해결할 수 있었다. 즉 학생은 GSP를 활용하여 문제 상황을 해석기하적 방법 – 논증기하적 방법 – 간단한 해석기하적 방법으로 변환하고 해결하였다(<에피소드4>, [그림Ⅳ-12]).

<에피소드4>
1. 학생C1 : 원 그려봐.
2. 학생B1 : (원 아이콘을 사용하여 원을 그린다.)
3. 학생A1 : 그렇게 하면 정확하지 않으니까. 점 찍어. 점.
4. 학생C1 : 식으로 해봐.
5. 학생B1 : 식으로 하면 원은 잘 안돼.
6. 학생A1 : 점 찍어서 해보라니까.
7. 학생B1 : (점 찍어서 원을 그리고 점 A, B를 찍어서 선분으로 나타낸다.)
8. 학생C1 : 좀 작게 해봐. 점이 안 보여.
9. 학생C1 : 이거 8차시까지 한 대.
10. 학생B1 : (AB의 중점 M을 찍고 선분으로 나타냄)
11. 학생A1 : M은 왜 찍어?
12. 학생B1 : 파푸스 정리.
13. 학생C1 : 너는 공식 알아.
14. 학생B1 : 알아. 근데 확실하게 기억 못해서 그러지.
15. 학생C1 : 그건 모르는 거잖아. 아.
16. 학생A1 : 파푸스 정리는 내가 알아. 측정해서 확인해봐.
17. 학생B1 : 계산. 우선 여기 PA 제곱. PB 제곱. 113.25. 그 다음에 이거 제곱. 이거 제곱. 2 곱하나.
18. 학생A1 : 해봐.
19. 학생B1 : 113.25. 같다. 봐 공식 알잖아.
20. 학생A1 : 아.

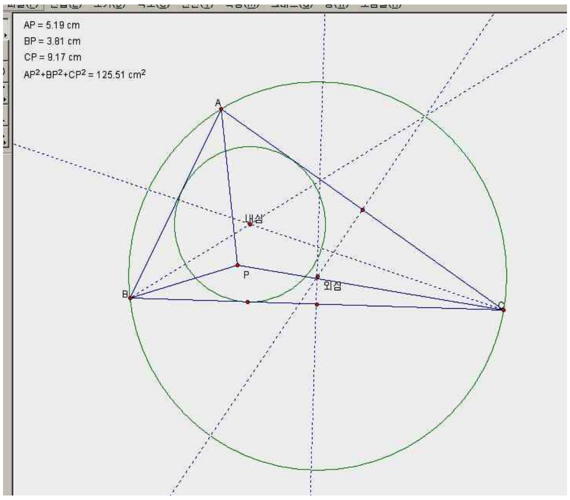


[그림 Ⅳ-12] 파푸스 정리 및 코시-슈바르츠 부등식을 이용한 A1학생의 풀이

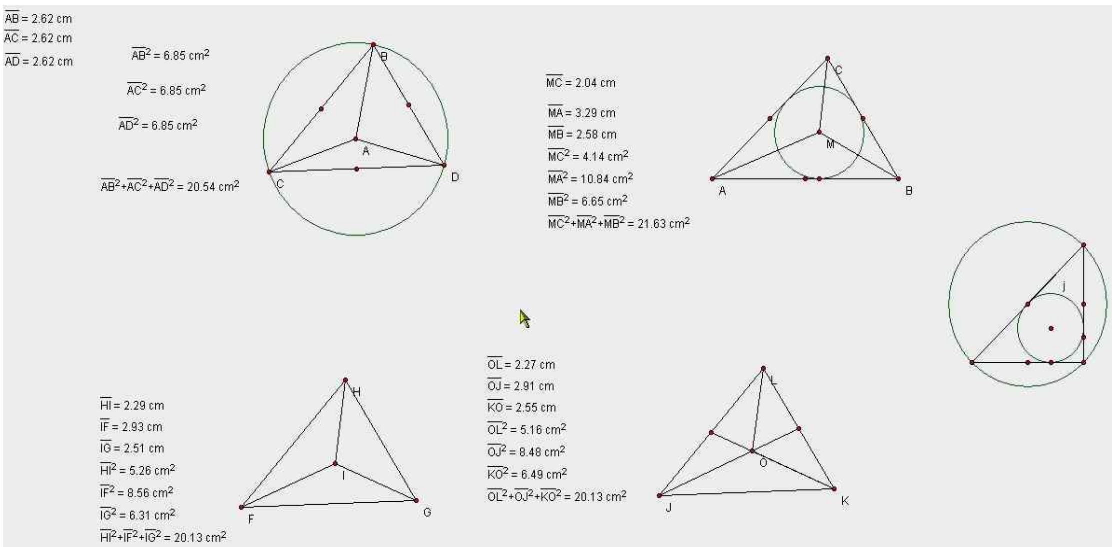
셋째, 상·중 수준의 학생들은 추측하고 시각적으로 확인한 사실을 해석기하적 방법으로 정당화하였다. 지필환경에서 학생들은 6차시 1번 문제 상황을 의미 있게 다루지 못하였다.

학생들은 시각적이고 수치적인 결과를 제공하는 GSP의 환경을 활용하여 가설을 세우고 판단에 대한 오류를 수정하며 반성하는 과정을 반복해서 거쳤다. 그리고 무게중심에서 의미 있는 결과가 나온다는 사실을 확인하였다([그림 Ⅳ-13], [그림 Ⅳ-14]).

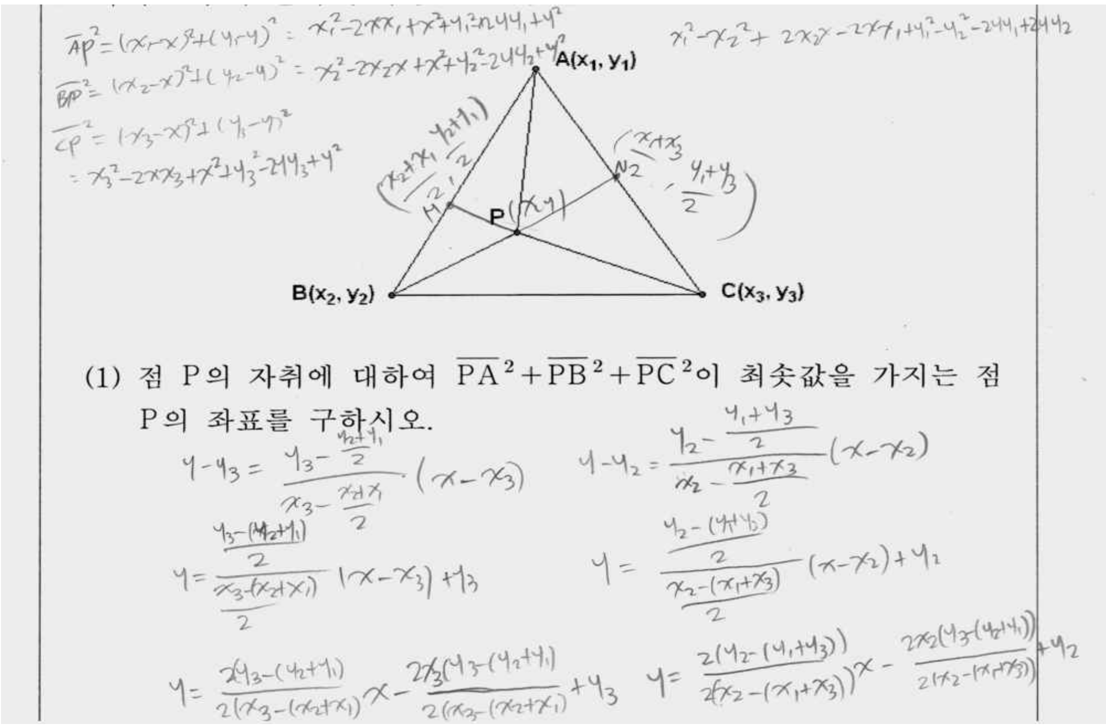
이에 대해서 학생들은 귀납적이고 경험적인 검증의 한계를 인식하고 대수식을 이용한 해석기하적 방법으로 정당화하였다([그림 Ⅳ-15]). 다만 하수준의 학생들에게서는 문제를 이해하고 전략을 세우는 데까지는 도움을 주었지만 형식적인 기호를 조작하는 능력이 부족하여 해를 구하는 단계에서는 실패하는 경우가 많았다.



[그림 Ⅳ-13] 1조가 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 위치를 찾는 모습



[그림 Ⅳ-14] 2조가 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 위치를 찾는 모습



[그림 Ⅳ-15] 좌표평면에 좌표를 도입하여 정당화를 시도한 B2학생의 풀이

Ⅴ. 결론 및 제언

대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 대한 수준별로 학생들의 활동의 특징을 살펴본 결과, 상수준의 학생은 대수식의 계산을 통한 문제 해결을 더 선호하였다. 그러나 이 경우에도 문제 상황을 GSP에 구현하면서 자신의 풀이를 점검, 확인하는 모습을 보였다. 또 상수준의 학생은 중수준의 학생보다 지필 환경에서 보다 오랫동안 문제해결을 모색하였다. 중수준의 학생은 비교적 빨리 GSP의 활용을 시도하였고, GSP에서 도형의 자취나 움직임을 파악하는 활동을 통해 대수식의 의미를 시각적으로 확인하고 문제 해결 방법을 탐구하였다. 하수준의 학생은 대수식의 조작은 물론 방정식을 그림으로 표현하는데 어려움을 겪었으며 GSP의 기본적인 작도 기능, 함수 그래프 기능 등에 도움을 받아 시각적으로 문제를 이해할 수 있었음을 확인하였다.

구체적으로 GSP의 활용이 대수식의 기하학적 해석에 도움을 주는 측면은 크게 두 가지 경우로 나뉘었다. 첫째는 대수식으로 풀 수 없는 문제를 기하적으로 해석하여 GSP로 구현해봄으로써 문제 해결의 실마리를 찾을 수 있다는 점이고, 둘째는 GSP를 활용함으로써 대수식의 계산, 변형이 의미하는 바를 기하적, 또는 동적으로 이해할 수 있었다는 점이다. 이때 GSP의 드래그 기능과 흔적 남기기의 기능은 유효하게 사용됨을 알 수 있었다.

기하에 관한 문제해결에서 GSP의 활용이 논증기하와 해석기하의 연결성에 어떤 영향을 주는지에 관하여 살펴본 결과는 다음과 같았다.

첫째, GSP의 역동적인 환경은 형식화된 해석기하적 표현의 의미를 한 눈에 파악할 수 있도록 도움을 주어, 학생은 GSP를 사용하여 문제 상황을 구성하고, 변화를 줌으로써 수치의 결과가 달라지는 것을 시각적으로 확인하는 과정을 통해 해석기하적 풀이의 역동적인 의미를 이해할 수 있었다. 기하 문제해결에서 GSP의 활용은 상수준의 학생이 해석기하적 접근방식을 사용한 풀이를 전개한 후 문제해결의 반성 단계에서 그 결과의 의미를 시각화하여 전체적으로 이해할 수 있도록 도움을 주었다.

둘째, GSP는 기계적인 연습문제, 또는 학생들의 능력을 벗어나는 해석기하적 문제를 의미가 풍부한 논증기하적 문제로 해석하여 해결할 수 있는 기회를 제공함을 알 수 있었다.

셋째, 상·중 수준의 학생은 추측하고 시각적으로 확인한 사실을 해석기하적 방법으로 정당화하는 모습을 보여주었다. 하수준의 학생은 문제를 이해하고 전략을 세우는 데까지는 도움을 받았지만 형식적인 기호를 조작하는 능력이 부족하여 해를 구하는 단계에서는 실패하는 경우가 많음을 알 수 있었다.

이 연구의 결과를 토대로 부족한 점, 제한점을 보완하여 후속연구에서 다뤄졌으면 하는 몇 가지 사항을 다음과 같이 제언한다.

첫째, 이 연구는 사례 연구로 6명을 대상으로 실시하였다. 이 연구의 결과는 기하 문제해결에서 GSP를 활용한 수업이 수학 교육학적으로 중요한 의미가 있음을 보여주고 있다. 그러나 수학 교실의 전체를 대상으로 했을 때 유사한 결과가 나올 수 있는지에 대해서는 보다 자세한 연구가 필요하다. 정규 수업은 복잡하고 다양한 요인들이 동시다발적으로 발생하므로 이에 대한 후속 연구가 필요하다.

둘째, 이 연구는 GSP를 활용한 탐구활동에서 교사의 역할에 초점을 두지 않았다. 그러나 교사의 개입이 많아지면 중·하 수준의 학생들의 대화가 줄어드는 대신 보다 형식적인 체계로의 안내가 가능하였고, 반면에 교사의 개입이 줄어들수록 상수준의 학생은 또래교사의 면모를 보이며 중·하 수준의 학생들의 대화가 빈번히 일어나고 서로 상호작용이 활발해지는 것을 볼 수 있었다. 학습자들의 탐구활동을 어느 수준까지 허용할 것인지, 교사의 역할은 무엇인지에 대하여 공학도구를 도입한 수학 교실에서의 의사소통, 협력학습, 또래학습 관점에서 후속 연구가 필요하다.

셋째, 이 연구는 대수와 기하라는 수학 영역 내 연결성에 초점을 두었다. 그러나 기하 아이디어는 수학의 다른 영역뿐만 아니라 실세계 상황의 문제를 표현하고 해석하는데 유용하기 때문에 다른 영역과의 연결성도 매우 중요하다. 따라서 기하 개념을 이용하여 다른 교과 및 예술 등 흥미로운 분야에 대해 통찰을 얻고 그와 관련된 문제를 다루는 교수·학습 방안의 연구가 필요하다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2008). 교육인적자원부 교시 제 2007-79호에 따른 고등학교 교육과정 해설 5 수학. 교육과학기술부.

교육과학기술부 (2011). 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] 수학과 교육과정. 교육과학기술부.

김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울 : 경문사.

김향숙·박진석·하형수 (2011). 이차곡선을 활용한 정칠각형에 관한 Abū Sahl의 작도법의

GSP를 통한 재조명. 수학교육 50(2), 233-246.
박종률 (2008). 수학 영재교육 길잡이. 전남대학교출판부.
양은경·신재홍 (2014). 작도 접근 방식에 따른 중학생의 기하학적 특성 인식 및 정당화. 수학교육학연구, 24(4), 507-528.
우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울 : 서울대학교 출판부.
유익승·한인기 (2011). 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 대한 연구. 수학교육 논문집 25(2), 451-472.
이수진 (2005). 해석기하 문제해결 과정에서의 오류 유형과 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구 -10-나 「도형」 단원을 중심으로-. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
황우형·차순규 (2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례연구. 수학교육 41(3), 341-360.
Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), Designing learning environ- ments for developing understanding of geometry and space(pp. 351-368). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
Leung, A. (2003). Dynamic geometry and the theory of variation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox(Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 3, 197-204.
Leung, A. (2012, July). Discernment And Reasoning In Dynamic Geometry Environments. In 12th International Congress on Mathematical Education (Vol. 8).
Merriam, S. B. (1998) Qualitative Research and Case Study Applications in education. John Wiley&Sons, Inc. 강윤수 외 8인 역 (2005). 정성연구 방법론과 사례 연구. 서울 : 교우사.
NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics. 구광조, 오병승, 류희찬 역 (1989). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울 : 경문사.
NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬 외 5인 역 (2009). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울 : 경문사.
NCTM (2007). Mathematics Teaching Today : Improving Practics, Improving Student Learning. Reston, VA : National Council of Teachers Mathematics. 류희찬 외 5인 역 (2011). 수학 수업의 현재와 미래. 서울 : 경문사.
Ostrovski A .I,. & Kordemski B. A. (1960). Geometriya Pomogaet Arifmetife, Moscow: FIZMATGIZ.

A Study on the Effects of Using GSP of Level Differentiated Students in Connecting Demonstrative Geometry and Analytic Geometry

Do, Jeong Cheol[5] · Son Hong Chan[6]

Abstract

In this study we investigated the effects of using GSP in solving geometric problems. Especially we focused the effects of GSP in leveled students' connection of geometry and algebra. High leveled students prefer to use algebraic formula to solve geometric problems. But when they did not know the geometric meaning of their algebraic formula, they could recognize the meaning after using GSP. Middle and low leveled students usually used GSP to obtain hints to solve the problems. For the low leveled students GSP was usually used to understand the meaning of the problem, but it did not make them solve the problem.

Key Words : GSP, Analytic Geometry, Demonstrative Geometry, Connection

Received November 30, 2015
Revised December 23, 2015
Accepted December 24, 2015

5) Graduate School of Education, Chonbuk National University (iearnest@naver.com)
6) Chonbuk National University (hcson@jbnu.ac.kr), Corresponding author