한국학교수학회논문집 제 18 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 18, Number 4, 371-385, December 2015

삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피에 내재된 공리와 힐베르트의 세 번째 문제

도종훈[1)]

현행 수학과 교육과정이나 교과서에서는 도형의 넓이와 부피가 무엇을 의미하는 용어인지 명료하게 정의하지 않으며, 넓이와 부피 측정에 어떤 공리가 전제되어 있는지 파악하기도 어렵다. 본고에서는 도형의 넓이와 부피 개념에 전제된 공리가 무엇인지 살펴보고, 이들 공리의 관점에서 학교수학에서의 넓이 및 부피 관련 내용 중 특히 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피 공식에 대한 설명 방식의 차이점을 힐베르트의 세 번째 문제와 관련지어 논의한다.

주요용어 : 넓이 공리, 부피 공리, 뿔의 부피 공식, 힐베르트의 세 번째 문제

I. 서론

고대 문명과 함께 발달하기 시작하여 오늘날에 이른 기하학(geometry)의 어원인 땅(geo)의 측정(metry)은 사실 땅의 크기의 측정을 의미하며, 이는 곧 땅에 해당하는 면의 넓이의 측정을 의미한다는 점에서 넓이는 수학 특히, 기하학을 발생시킨 출발점이자 원동력이었다고 할 수 있다. 넓이의 측정으로부터 비롯된 이론은 이후 극한 개념과 결합하여 미적분학(calculus), 측도론(measure theory) 등의 수학 이론으로 발달하게 되며, 수학 뿐 아니라 수학을 활용하는 여러 학문 분야의 발달에 기여하게 된다. 한편, 우리가 발을 딛고 생활하는 바닥이나 땅은 면에 해당하고, 우리가 안팎으로 드나들거나 사용하는 각종 건물이나 물체는 여러 가지 면으로 둘러싸인 입체도형에 해당한다는 점에서 우리는 여러 가지 면의 모양을 하고 있거나 면으로 둘러싸인 물체를 사용하거나 그 위 혹은 그 안과 밖에서 생활하고 있다. 따라서 우리가 살아가는 공간이나 우리가 사용하는 각종 도구, 물체 등을 만들고 사용하기 위해서는 그 크기에 해당하는 면과 입체의 크기인 넓이와 부피를 정확하게 측정할 수 있어야 한다는 점에서, 도형의 넓이와 부피 측정은 우리 생활에 없어서는 안 되는 중요한 삶의 도구이자 수단이라 할 수 있다(Eves, 1976; 도종훈・박윤범, 2014).

그렇다면 넓이와 부피를 수학적으로는 어떻게 정의하는가? 연구자는 2014년 9월 3일 C 지역에 위치한 어느 사범대학 수학교육과 2학년 학생 38명을 대상으로 넓이란 무엇인가? 라는 질문을 제시한 바 있다. 이 질문에 대하여 약 42%의 학생들(16명)은 '도형의 크기', '도형이 차지하고 있는 자리의 크기', '수치로 표현한 도형의 크기', '도형에 색칠된 양', '도형을

---

1) 서원대학교 (jhoondo@seowon.ac.kr)

색칠했을 때 색칠된 부분의 크기' 등과 같이 구체적인 표현은 조금씩 다르지만 넓이를 도형의 크기를 나타내는 개념으로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 그러나 나머지 학생들 중에는 '도형이 평면(혹은 전체)에서 차지하는 부분이나 공간'과 같이 도형의 넓이를 도형 그 자체와 동일시하거나 도형의 '넓은 정도', '면적'과 같이 넓이의 동의어를 넓이로 생각하는 학생들도 상당수 있는 것으로 나타났다. 또, 일부 학생들의 경우 '넓이 = 가로 × 세로'라고 응답하여 특정 도형의 넓이 공식과 넓이를 동일시하는 경우도 있는 것으로 나타났다.

사실 도형의 넓이와 부피는 학교수학에서 학생들이 가장 많이 접하는 개념 중 하나로서 직사각형과 직육면체로부터 시작하여 고등학교 과정에서의 정적분에 이르기까지 학생들은 수없이 이들 용어를 사용하고 그 값을 계산한다. 그러나 정작 넓이와 부피가 무엇을 의미하는 용어인지는 현행 수학과 교육과정과 교과서 어디에서도 명료하게 정의하지 않으며, 넓이와 부피 측정에 어떤 공리가 전제되어 있는지 파악하기도 어렵다(도종훈・박윤범, 2014; 도종훈・허선희, 2013). 물론 학생들이 수학과 교육과정의 전체적인 구조나 그 속에 내재되어 있는 공리계를 명시적으로 인식하고 학습하기는 어렵지만, 교사가 해당 교과의 내용과 관련된 지식의 구조를 파악하고 가르침에 임하는 것은 필수적이며(Even & Tirosh, 1995; 황혜정, 2010; 황혜정, 2011), 학생들에게 보다 명료하고 의미 있는 수학적 설명을 하는데 중요한 역할을 한다. 특히 학교수학에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나지 않은 기본 가정이나 공리를 파악하고 교과의 전체적인 구조와 흐름에 대한 안목을 갖추는 것은 교사가 끊임없이 추구해야 할 중요한 과제 중 하나일 것이다(도종훈・최영기, 2003).

본고에서는 도형의 넓이와 부피 개념에 내재되어 있으나 학교수학에는 명시적으로 드러나 있지 않은 공리가 무엇인지 살펴보고, 이들 공리의 관점에서 학교수학에서의 넓이 및 부피 관련 내용 중 특히 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피 공식을 힐베르트의 세 번째 문제와 관련지어 함께 살펴본다. 이와 관련하여 몇몇 선행 연구(도종훈・박윤범, 2014; 도종훈・허선희, 2013; 최영기・도종훈, 2000; 한인기, 1999)에서 이미 초등학교 수학을 포함한 학교수학에서의 넓이 지도 내용에 대한 공리적 해석이나 힐베르트의 세 번째 문제와 그 수학교육적 의미 등에 대한 논의가 일부 이루어진 바 있다. 그러나 다각형의 넓이와 다면체 부피의 공통점과 차이점 및 삼각뿔의 부피 공식 설명 방식과 힐베르트의 세 번째 문제 사이의 관련성에 대한 공리의 관점에서의 세밀한 분석이나 재조명은 충분히 이루어지지 않은 것으로 보인다. 이에 본고에서는 기존의 선행 연구에서 이루어진 논의에 더하여 특히 넓이와 부피를 각각 다각형과 다면체로 한정하여 생각할 때 다각형의 넓이와는 다른 다면체의 부피의 특징을 공리의 관점에서 재조명하고 이것이 힐베르트의 세 번째 문제와 어떤 관련이 있는지 논의한다.

II. 공리적 방법과 넓이 공리

1. 공리적 방법

명제의 증명이 이미 참임이 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 전제로부터 결론을 논리적으로 유도하는 것이라는 관점에서 볼 때 어떤 수학 체계 내에서 모든 명제를 완전히 증명한다는 것은 논리적으로 불가능하며, 특별한 가정 없이 모든 명제를 증명하려 한다면 무한회귀나 순환논법에 빠지게 된다. 이런 무한회귀나 순환논법을 피하기 위해서는 어느 순간에선

가 더 이상 진위 여부를 문제 삼지 않는 명제인 공리의 설정이 필연적으로 요구된다. 이런 이유로 수학에서의 여러 가지 개념과 내용은 특정한 공리를 기반으로 전개되는데, 이와 같은 수학의 내용 구성 및 전개 방법이 바로 공리적 방법이다(Barker, 1964; Eves, 1976). 공리적 방법이란 그 자신은 증명의 대상이 되지 않으면서 기본적인 전제로 이용되는 몇 가지 공리와 더 이상 다른 용어를 통해 정의하지 않는 몇 가지 무정의 용어를 상정한 뒤, 이로부터 다른 명제들을 차례로 연역해 나가는 수학의 전개방식을 뜻한다. 공리적 방법에서 어떤 명제의 진위 여부는 결국 그 체계의 공리로 귀결되어 판단된다. 어떤 명제가 참이라는 것은 그것이 그 체계의 공리와 논리 법칙에 의해 연역되는 진술임을 의미하고, 거짓이라는 것은 그것이 그 체계의 공리와 모순되는 진술임을 의미한다. 공리적 방법을 통하면 순환논법을 피할 수 있고 명제들 사이의 논리적 연관성이 명백해지므로 논리적 엄밀함을 추구하는 현대에 이르러 공리적 방법은 수학적 방법론의 전형으로 받아들여지고 있다.

학교수학에서도 어떤 명제의 진위를 밝히고 정당화하는 과정으로서 증명을 다루고 있으나 그것은 엄격한 의미에서 공리적 방법에서의 증명으로 보기는 어려운데, 이는 그 명제의 진위 여부를 어떤 공리에 의존하여 최종 판단하지는 않기 때문이다(최영기・홍갑주, 2006). 이런 현상은 학교수학이 오랜 역사를 통해 누적된 수학의 수많은 내용들 중에서 해당 연령의 학생들이 꼭 학습해야 할 것으로 판단되는 다양한 내용을 다루어야 한다는 점과 내용의 설명 방식에 있어서 학생들의 인지적 능력에 부합하는 물리적 실험이나 관찰, 조작, 직관 등의 다양한 방법을 사용할 필요가 있다는 점을 고려할 때 일면 당연한 것이며 오히려 바람직한 것일 수도 있다.

그러나 학교수학에서 다루는 넓이와 부피 개념 및 그 성질을 수학적으로 보다 명료하게 파악하기 위해서는 어떤 공리계를 기반으로 이들 개념이 정의되고 내용이 전개되는지 살펴볼 필요가 있다. 앞서 언급한 바와 같이 직사각형과 직육면체로부터 시작하여 고등학교 과정에서의 정적분에 이르기까지 학생들은 수없이 넓이와 부피라는 용어를 사용하고 그 값들을 계산한다. 특히 직사각형의 넓이와 직육면체의 부피는 여러 가지 평면, 입체 도형의 넓이와 부피를 계산하는데 기본이 된다. 실제로 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴 등을 포함한 여러 가지 다각형의 넓이 및 정적분을 이용한 일반적인 평면 영역의 넓이 계산법은 직사각형의 넓이에 의존하며, 각뿔을 비롯한 여러 가지 입체 도형의 부피 및 정적분을 이용한 일반적인 공간 영역의 부피 계산법은 직육면체의 부피에 의존한다. 그렇다면 넓이와 부피 측정의 출발점 역할을 하는 직사각형의 넓이와 직육면체의 부피는 어떻게 알 수 있는가? 우리가 알고 있는 각종 넓이와 부피 공식은 어떻게 얻어진 것인가? 도대체 넓이와 부피란 무엇을 뜻하는 용어이고 어떤 차이가 있는가? 라는 질문들이 자연스럽게 제기된다(도종훈・허선희, 2013; 최영기・도종훈, 2000).

2. 넓이 공리

우리나라 수학과 교육과정이나 교과서에서 도형의 넓이를 엄밀하게 정의하지는 않지만, 도형의 넓이를 계산하는 방법을 고려해본다면 도형의 넓이는 단위 정사각형의 크기를 1로 정했을 때 측정하고자 하는 도형인 면을 단위 정사각형으로 겹치지 않게 빈틈없이 채워 얼마나 들어가는지를 측정하는 것으로 볼 수 있다(구광조・라병소, 1997; 정동권, 2001; 도종훈・박윤범, 2014). 결국 수학적인 관점에서 볼 때 넓이는 도형(면)이 하나 주어질 때 주어

진 도형(면)에 그 크기를 나타내는 양으로서의 수를 하나씩 대응시키는 함수로 볼 수 있다. 실제로 현대수학에서 넓이는 통상 다음의 세 공리 (i), (ii), (iii)을 만족하면서 주어진 도형 즉, 계측 가능한 영역 A에 그것의 넓이라고 불리는 음이 아닌 실수 $\psi(A)$를 짝지어 주는 함수 ψ로 정의된다(Boltianskii, 1978; Roe,1995).[2)]

ψ: $\{A \mid A$는 계측 가능한 영역$\} \rightarrow \mathbb{R}$

(i) A와 B가 합동이면 $\psi(A)=\psi(B)$이다.

(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$이면 $\psi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \psi(A_i)$이다.

(iii) 한 변의 길이가 1(단위 길이)인 정사각형 P에 대하여 $\psi(P)=1$이다.

실제로 도형의 넓이는 위의 세 가지 성질을 모두 만족시키고, 역으로 위의 세 가지 성질을 모두 만족시키는 함수는 넓이뿐이다(Boltianskii, 1978; Roe, 1995). 이때 위의 세 가지 성질 (i)-(iii)을 통상 넓이 공리라고 한다. 이로부터 도형의 넓이는 도형의 크기를 나타내는 개념으로서 그 값이 음이 아니고, 합동 불변 즉, 합동인 두 도형의 넓이는 서로 같으며(공리 (i)), 가법적이며 즉, 한 도형이 여러 개의 조각으로 분할되면 주어진 도형의 넓이는 분할된 조각들의 넓이의 합과 같으며(공리 (ii)), 한 변의 길이가 단위 길이인 정사각형의 넓이를 넓이 측정의 단위로 함(공리 (iii))을 알 수 있다. 이들 공리 중에서 합동 불변성과 가법성에 대한 공리는 두 도형의 넓이를 직접 비교하는 방법과 도형의 넓이 공식 및 계산법을 정당화해주는 공리이고, 그 값이 음이 아닌 실수이면서 단위 정사각형의 넓이를 단위로 가진다는 공리는 수치화를 통한 넓이의 간접 비교 방법을 정당화해주는 공리라고 할 수 있다(도종훈・박윤범, 2014). 이들 넓이 공리로부터 우리에게 익숙한 도형의 넓이에 대한 기본적인 정리 및 공식들이 유도된다.

이때 '한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이를 1로 정한다.'는 공리 (iii)을 대신하여 직사각형의 넓이 공식 즉, '가로와 세로의 길이가 각각 a와 b인 직사각형의 넓이를 ab로 정한다.'는 것을 다음과 같이 공리로 택할 수도 있다(Roe, 1995).

(iii)$'$ 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 a와 b인 직사각형 P에 대하여 $\psi(P)= ab$이다.

실제로 두 명제 (iii)과 (iii)$'$는 실수의 완비성에 의해 동치이다. 결국 정사각형의 넓이 공식과 직사각형 넓이 공식은 서로 동치인 넓이 공리의 하나로서 평면도형 넓이 측정의 출발점 역할을 하며, 이에 따라 모든 평면도형의 넓이는 정사각형이나 직사각형의 넓이 공식으로부터 구하게 되는 것이다.

3. 삼각형 넓이 공식과 합동분해

넓이 공리의 관점에서 보면 넓이 개념을 이해한다는 것은 곧 넓이를 정의하는 세 개의 공

2) 여기서 계측 가능한 영역은 $\mathbb{R}^2$ 즉, 평면의 부분집합이다. 길이와 부피 역시 유사하게 정의할 수 있는데, 이때 계측 가능한 영역은 각각 $\mathbb{R}$(선)과 $\mathbb{R}^3$(공간)의 부분집합을 의미한다(De Barra, 1981).

리를 이해한다는 것을 의미하며, 이는 다시 넓이가 평면도형의 크기를 나타내는 개념임을 이해하고, 넓이의 직접 비교 방법을 정당화해주는 넓이의 합동 불변성과 가법성을 이해하며, 단위넓이를 이용한 수치화를 통해 넓이를 간접 비교하는 방법을 이해하고, 넓이의 합동 불변성과 가법성을 활용한 등적변형을 통해 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 및 계산법을 이해하는 것으로 정리할 수 있다(도종훈・박윤범, 2014).

특히 다각형의 넓이 비교 및 측정과 관련하여 넓이 공리 (ii)는 좀 더 특별한 의미를 지닌다. 두 도형의 넓이를 비교할 때, 만약 두 도형의 모양이 같다면 즉, 닮음이라면 공리 (i)만으로도 두 도형의 넓이의 직접 비교가 가능하다. 그러나 그렇지 않은 경우에는 두 도형 중 어느 한 도형을 넓이를 변화시키지 않으면서 나머지 한 도형과 같은 모양이 되도록 변형하거나 두 도형 모두를 정사각형과 같이 넓이의 직접 비교가 가능한 형태의 도형으로 변형시켜야 한다. 이러한 등적변형은 사실 주어진 도형을 유한개의 조각으로 분할한 뒤 이 조각들을 겹치지 않게 이어 붙여 다른 도형을 만드는 합동분해(equidecomposability)에 해당한다 (Boltianskii, 1978; Laczkovich, 2001).

서로 겹치지 않으면서 다음을 만족시키는 서로 합동인 '유한개'의 도형 $A_1,\cdots,A_n$ 과 $B_1,\cdots,B_n$ 이 존재할 때 두 도형 A 와 B 는 서로 합동분해가능(equidecomposable)하다고 한다.

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\ B=\bigcup_{i=1}^{n}B_i,\ A_i\equiv B_i\,(i=1,\cdots,n)$$

넓이의 합동 불변성(공리 (i))과 가법성(공리 (ii))을 이용하면 서로 합동분해가능한 두 다각형 A 와 B 의 넓이가 서로 같음을 다음과 같이 쉽게 확인할 수 있다.

$$\psi(A)=\sum_{i=1}^{n}\psi(A_i)=\sum_{i=n}^{n}\psi(B_i)=\psi(B)$$

역으로 넓이가 같은 두 다각형 A 와 B 는 서로 합동분해가능함을 세 보조정리 '(1) 두 도형의 합동분해는 동치관계이다.' '(2) 넓이가 같은 두 개의 직사각형은 서로 합동분해가능하다.' '(3) 넓이가 t 인 임의의 삼각형은 $1\times t$ 직사각형(가로의 길이가 t 이고 세로의 길이가 1 인 직사각형)과 합동분해가능하다.'를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다(Laczkovich, 2001).

> 넓이가 t 인 두 다각형을 A, B 라 하자. A 를 서로 겹치지 않으면서 넓이가 각각 t_1, t_2, $\cdots$, $t_n\,(t_1+\cdots+t_n=t)$ 인 삼각형들로 분해하면, 이 삼각형들은 각각 $1\times t_i$ 직사각형들과 서로 합동분해가능하다. 이 직사각형들을 서로 겹치지 않게 이어 붙여 만든 $1\times t$ 직사각형을 R 이라 하면, A 와 R 은 서로 합동분해가능하다. 마찬가지 이유로 B 와 R 은 서로 합동분해가능하다. 합동분해는 동치관계이므로, 대칭율과 추이율에 의해 A 와 B 는 서로 합동분해가능하다.

이상으로부터 두 다각형의 넓이가 같다는 것은 두 도형이 서로 합동분해가능하다는 것과 동치임을 알 수 있다. 이를 볼리아이-게르빈(Bolyai-Gerwien) 정리라고 한다. 볼리아이-게르빈 정리로부터 넓이가 같은 임의의 다각형과 정사각형은 서로 합동분해가능함을 알 수 있다. 즉, 임의의 다각형을 유한개의 조각으로 분할하여 겹치지 않게 이어 붙이면 그와 넓이가 같은 정사각형을 얻을 수 있다는 것이다. 따라서 앞서 살펴본 넓이 공리에서 계측 가능한 영역을 다각형으로만 제한하여 다각형의 넓이만 생각한다면, 주어진 공리 '(ii) $A_i\cap A_j=\varnothing$

$(i \neq j)$이면 $\psi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \psi(A_i)$ 이다.'를 다음과 같이 나타내도 상관없게 됨을 알 수 있다.

$$\text{(ii)}' \ A \cap B = \varnothing \ (i \neq j)\text{이면 } \psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B)\text{ 이다.}$$

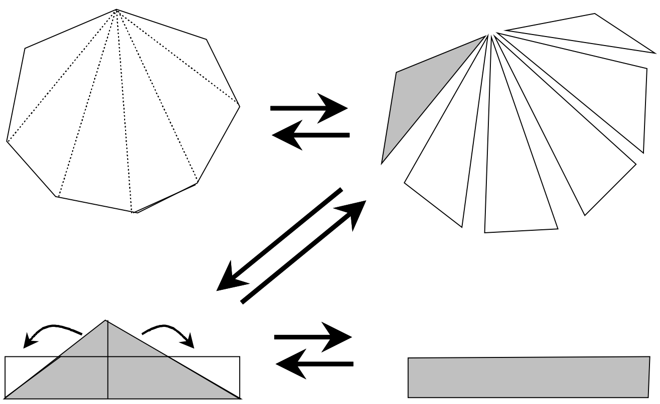
결국 삼각형을 포함한 임의의 다각형의 넓이는 정사각형이나 직사각형 넓이 공식으로부터 '유한 번'의 분할과 재배열의 방법인 합동분해를 통해 구할 수 있으며, 이는 곧 넓이 공리 (ii)를 (ii)′로 대체할 수 있음을 의미하는 것이다.

그렇다면 삼각형의 3차원 유추에 해당하는 삼각뿔의 부피도 삼각형의 넓이와 유사하게 정육면체의 부피로부터 '유한 번'의 분할과 재배열의 방법으로 구할 수 있을 것인가? 사실 이 질문은 현행 중학교 수학교과서에 통상 제시되는 삼각뿔의 부피 공식에 대한 독특한 설명 방식과 밀접한 관련이 있다. 이하(III장)에서는 이 문제를 부피 공리가 갖는 넓이 공리와의 차이점 및 힐베르트의 세 번째 문제로 알려진 문제를 통해 재조명해 본다.

III. 삼각뿔의 부피 공식과 힐베르트의 세 번째 문제

1. 현행 중학교 수학 교과서에 나타난 삼각뿔의 부피 공식 설명

앞서 살펴본 바와 같이 평면에서 임의의 다각형은 유한개의 삼각형으로 분해되고 임의의 삼각형은 그와 넓이가 같은 직사각형과 합동분해가능하므로 직사각형의 넓이로부터 합동분해를 통해 임의의 다각형의 넓이를 구할 수 있고 이를 토대로 평면에서의 다각형 넓이에 대한 이론을 정립할 수 있음을 [그림 III-1]을 통해 확인할 수 있다(도종훈・허선희, 2013; 최영기・도종훈, 2000).

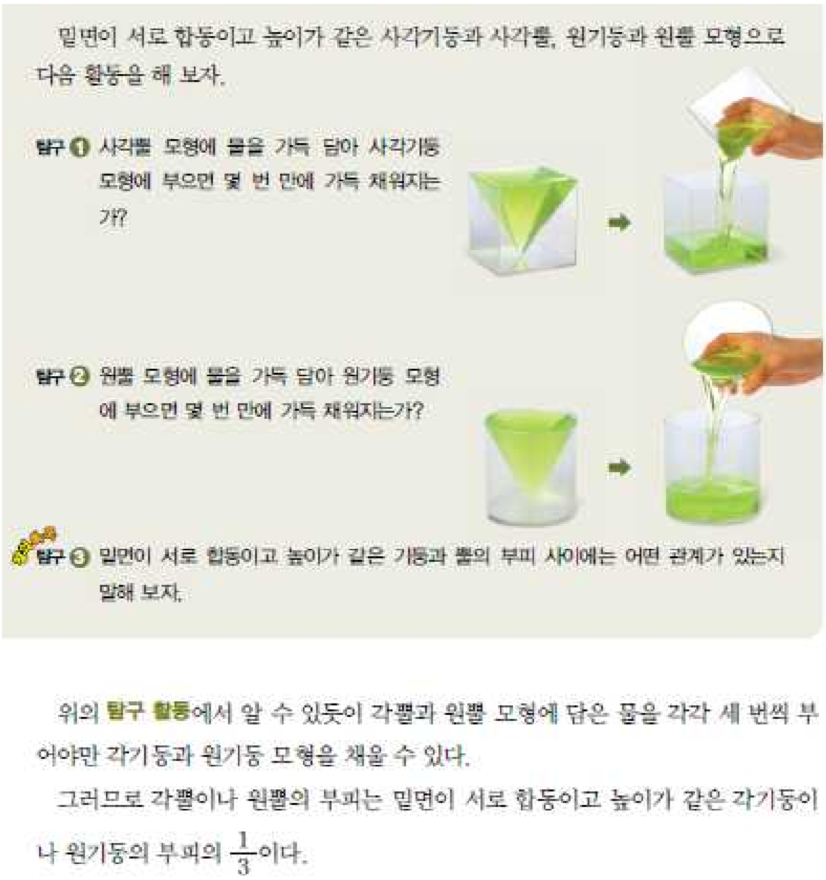


[그림 III-1] 합동분해를 이용한 다각형 넓이 구하기

그렇다면 평면에서의 다각형 넓이에 대한 이론처럼 합동분해를 통해 다면체의 부피에 대한 이론을 건설할 수 있을 것인가? 즉, 직사각형으로부터 유한 번의 분할과 재배열의 방법을 통해 임의의 삼각형의 넓이를 구한 것처럼 삼각뿔의 부피를 직육면체로부터 유한 번의

분할과 재배열의 방법을 통해 구할 수 있을 것인가?

삼각뿔의 부피 공식은 현행 중학교 수학과 교육과정의 기하 영역에 소개되어 있고, 이를 학습한 학생들은 이 공식을 이용하여 여러 가지 입체도형의 부피를 구할 수 있게 된다. [그림 III-2]는 현행 중학교 수학 ① 교과서에 제시되어 있는 뿔의 부피 공식에 대한 설명의 한 예인데(허민 외, 2013), 사실 이 예에 제시된 설명은 수학적인 설명이라기보다는 물리적인 실험에 가깝다. 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 대부분의 교과서에서 이와 같은 방식으로 뿔의 부피 공식을 설명하고 있다.



[그림 III-2] 뿔의 부피 공식에 대한 수학교과서의 설명 예시

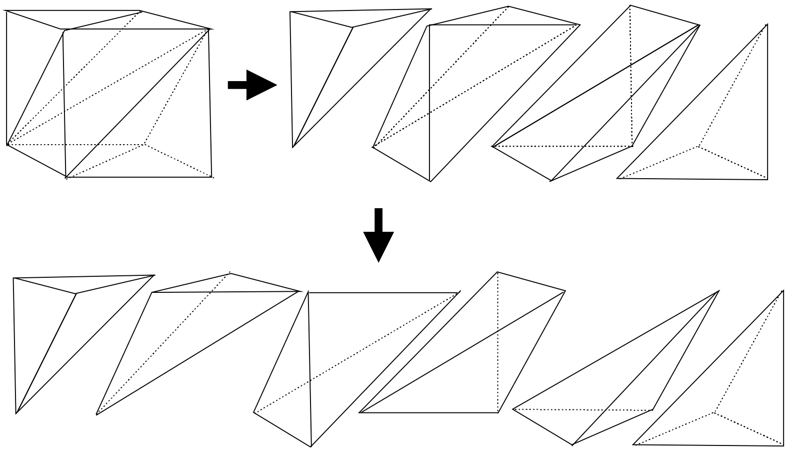
과학 교과서에서나 제시될 법한 이런 설명을 수학 교과서에서 제시하는 이유는 무엇인가? 즉, 삼각형이나 사각형의 넓이와는 다른 뿔의 부피에 대한 이와 같은 비형식적, 직관적 설명은 학생들의 인지 발달 수준을 고려한 교수학적 선택의 결과인가? 아니면 불가피한 선택인가? 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피 사이에는 어떤 차이가 존재하는가?

2. 부피 공리와 힐베르트의 세 번째 문제

평면에서의 넓이와 마찬가지로 공간에서의 부피 역시 하나의 공리체계 안에서 계측 가능한 영역 즉, 부피를 갖는 도형 A에 그것의 부피라고 불리는 음이 아닌 실수 $\phi(A)$를 대응시키는 함수 ϕ로 다음과 같이 정의할 수 있으며, 이때 공리는 넓이 공리와 거의 동일하다.

ϕ: $\{A \mid A$는 계측 가능한 영역$\} \to \mathbb{R}$
(i) A와 B가 합동이면 $\phi(A)=\phi(B)$이다.
(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$이면 $\phi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \phi(A_i)$이다.
(iii) 한 변의 길이가 1(단위 길이)인 정육면체 P에 대하여 $\phi(P)=1$이다.

평면에서의 다각형과 마찬가지로 공간에서 다면체는 유한개의 다각뿔을 거쳐 유한개의 삼각뿔로 분해될 수 있다. 따라서 삼각뿔의 부피만 계산할 수 있다면 다면체의 부피를 계산할 수 있게 된다. 특히 정육면체는 [그림 III-3]과 같이 밑면이 서로 합동이고 높이가 같은 6개의 삼각뿔로 분해할 수 있다. 그러나 6개의 삼각뿔이 모두 합동인 것은 아니므로 부피 공리로부터 삼각뿔의 부피 공식 $V=\frac{1}{3}Sh$를 유도하려면 먼저 밑면이 서로 합동이고 높이가 같은 6개의 삼각뿔의 부피가 같음을 보여야 한다. 물론 이것은 무한 분할의 아이디어 즉, 정적분을 이용하여 쉽게 보일 수 있지만, 우리가 여기서 관심을 갖는 질문은 앞서 언급한 바대로 '삼각뿔의 부피 공식을 삼각형 넓이처럼 유한 번의 분할과 재배열을 통해 설명할 수는 없는가?'이다(도종훈・허선희, 2013; 최영기・도종훈, 2000).



[그림 III-3] 정육면체의 삼각뿔 분할

위 질문은 넓이에서와 마찬가지로 부피 공리 (ii)와 밀접한 관련이 있다. 만약 부피의 공리적 정의에서 계측 가능한 영역을 다면체로 제한하여 다면체의 부피만을 고려할 때 주어진 공리 '(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$이면 $\phi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \phi(A_i)$이다.'를 다각형이 넓이와 마찬가지로

'$A \cap B = \varnothing \ (i \neq j)$이면 $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$이다.'로 대체할 수 있다면 무한 분할의 아이디어를 이용하지 않고도 다면체 부피에 대한 이론을 건설할 수 있을 것이다.

이와 관련하여 볼리아이-게르빈 정리의 발견자 중 한 명인 볼리아이(F. Bolyai)는 삼각형의 넓이 공식 증명이 매우 간단한 반면 삼각뿔의 부피 공식에 대한 간단한 증명법은 전혀 알려져 있지 않았음에 주목하고, 1830년 경 '볼리아이-게르빈 정리의 3차원 유추가 참이 될 것인가?'는 질문을 제기하였다(Boltianskii, 1978). 만약 볼리아이-게르빈 정리가 다면체에 대해서도 성립한다면 무한 분할의 아이디어 즉, 극한을 이용하지 않는 삼각뿔의 부피 공식에 대한 간단한 증명이 가능할 것이다. 다시 말해 삼각뿔이 그와 같은 부피를 갖는 적당한 정육면체나 직육면체와 서로 합동분해가능하면, 삼각형의 넓이 공식을 얻는 것과 유사한 방법으로 삼각뿔의 부피 공식을 얻을 수 있을 것이다.

사실 볼리아이가 제기한 위의 질문은 가우스(C. F. Gauss)에 의해 처음 제기된 것으로 알려져 있는데, 가우스는 유클리드 원론에서 유클리드가 도형의 넓이와 부피를 다룬 방식의 차이를 보고 이러한 의문을 제기한 것으로 알려져 있다. 유클리드는 평면도형의 넓이를 측정할 때에는 두 도형이 '일치(coincide)'하면 두 도형이 '같다(equal)'는 합동의 개념을 근간으로 하는 합동분해의 방법을 사용하였지만, 부피(두 도형의 부피가 같음)를 다룰 때는 합동분해의 방법을 사용하는 대신 소위 소진법(method of exhaustion)이라 불리는 극한 과정을 적용하였다. 유클리드의 이러한 접근방식의 차이에 대하여 가우스는 입체도형의 부피를 소진법을 사용하지 않고 평면도형의 넓이를 구하는 것처럼 구할 수는 없는가? 라는 의문을 제기한 것이다(Heath, 1956).

이 문제는 1900년이 될 때까지 해결되지 않았고, 1900년에 프랑스에서 열린 제2차 국제수학자회의(ICM)에서 힐베르트(D. Hilbert)가 다시 제기하였는데, 이것이 바로 힐베르트의 세 번째 문제이다. 힐베르트는 제2차 국제수학자회의에서 20세기 수학자들이 해결해야 할 23개의 문제(mathematical problems)를 제안하였는데, 그 중 세 번째 문제인 힐베르트의 세 번째 문제는 23개의 문제 중에서 유일하게 학교수학과 직접적인 관련이 있는 문제이며, 그 내용은 다음과 같다(Boltianskii, 1978).

> "가우스는 Gerling에게 보낸 두 통의 편지에서 입체 기하학의 몇몇 정리가 소진법 즉, 현대적인 의미에서 연속의 공리(혹은 아르키메데스의 공리)에 의존하고 있음에 유감을 나타내고 있다. 가우스는 특히 높이가 같은 두 삼각뿔의 부피는 각각의 밑면의 넓이에 비례한다는 유클리드의 정리를 문제 삼고 있는데, 사실 평면에서 이와 유사한 문제는 이미 해결되었고, Gerling은 서로 대칭인 두 다면체의 경우 이들을 합동인 조각들로 분해하여 재배열하는 방법을 통해 두 다면체의 부피가 같음을 증명한 바 있다. 그러나 내 생각으로는 앞서 언급한 유클리드의 정리를 그와 같은 방식으로 일반적으로 증명하는 것은 불가능해 보이며, 이에 대한 엄밀한 증명이 이루어져야 할 것으로 보인다. 그리고 이 불가능성 증명은 밑면과 높이가 서로 같으면서 다음을 만족시키는 두 개의 사면체가 존재함을 보임으로써 가능할 것이다. *어떠한 방법으로도 이들 두 사면체를 서로 합동인 유한개의 사면체 조각들로 분해할 수 없고, 또한 이들 두 사면체에 서로 합동인 사면체 조각들을 결합하여 만든 두 다면체를 합동인 사면체 조각들로 분해할 수 없다.*"

결국 힐베르트의 세 번째 문제는 평면에서 넓이가 같은 두 다각형이 서로 합동분해가능한 것과는 달리 공간에서 부피가 같은 두 다면체는 일반적으로 합동분해가능하지 않음을 보이는 문제임을 알 수 있다. 힐베르트의 세 번째 문제는 힐베르트가 문제를 제기한 바로 다음 해인 1901년에 덴(M. Dehn, 1875-1952)에 의해 해결되었다. 덴은 덴-불변량(Dehn invariant)이라는 개념을 이용하여 부피가 같은 정사면체와 정육면체는 서로 합동분해가능하지 않음을 다음과 같이 증명하였다(Boltianskii, 1978; Laczkovich, 2001).

[정의] 다면체 A에 대하여 호도법으로 나타낸 A의 이면각들의 크기를 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 라 하고, 이에 대응하는 A의 이면각들의 모서리 길이를 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 라 하자. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 를 포함하는 집합 M 위에서 정의된 가법 함수 f에 대하여 $l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \cdots + l_p f(\alpha_p)$ 를 다면체 A의 *덴-불변량(Dehn invariant)*이라 하고, $f(A)$로 나타내자.

[보조정리 1] $n \geq 3$인 임의의 정수 n에 대하여, $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{n}$은 무리수이다.

[증명] $r = \dfrac{p}{q}$ (p, q는 서로소인 정수, $q > 0$)이면, $\cos r\pi$는 $q = 1,\ 2,\ 3$일 때 그리고 그 때에만 유리수이고, 다음이 성립한다(이에 대한 증명은 [부록] 참조).

$$\cos r\pi = \begin{cases} \pm 1 &, q = 1 \\ 0 &, q = 2 \\ \pm \dfrac{1}{2} &, q = 3 \end{cases}$$

만약 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{n} = r\ (r \in \mathbb{Q})$이라 가정하면, $\cos r\pi = \dfrac{1}{n}$이므로 $n = \pm 1, \pm 2$ 이다. 그러나 이것은 $n \geq 3$이라는 가정에 모순이다. 따라서 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{n}$은 무리수이다.

[보조정리 2] $\dfrac{\alpha}{\pi}$가 무리수이면, $f(\alpha) \neq 0$, $f(\pi) = 0$인 가법 함수 f가 존재한다.

[증명] 실수 집합 $\mathbb{R}$은 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위의 벡터공간이다. $\dfrac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$이므로 α와 π는 일차독립이고, 따라서 α와 π를 포함하는 기저 H가 존재한다. 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 x를 기저 H의 원소들의 유일한 일차결합으로 나타낼 때 α의 계수를 $f(x)$라 정의하자. 두 실수 $x,\ y \in \mathbb{R}$에 대하여 $x = r_1 h_1 + \ldots + r_n h_n$, $y = s_1 h_1 + \ldots + s_n h_n$ $(r_i, s_i \in \mathbb{Q},\ h_i \in H,\ 1 \leq i \leq n)$이라 하면, $x + y = (r_1 + s_1)h_1 + \ldots + (r_n + s_n)h_n$이다. 적당한 $i\,(1 \leq i \leq n)$에 대하여 $\alpha = h_i$이면 $f(x+y) = r_i + s_i = f(x) + f(y)$ 이고, 임의의 $i\,(1 \leq i \leq n)$에 대하여 $\alpha \neq h_i$이면 $f(x) = f(y) = f(x+y) = 0$ 이다. 두 경우 모두 $f(x+y) = f(x) + f(y)$가 성립하므로 f는 가법 함수이다. 그런데 $\alpha, \pi \in H$이므로, α와 π를 H의 원소들의 (유일한) 일차결합으로 나타내면 각각 $\alpha = 1 \cdot \alpha$, $\pi = 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \pi$이다. 따라서 $f(\alpha) = 1 \neq 0$, $f(\pi) = 0$이다.

[보조정리 3] 두 다면체 A와 B에 대하여 A의 이면각들의 크기를 $\alpha_1, ..., \alpha_p$, B의 이면각들의 크기를 $\beta_1, \cdots, \beta_q$라 하자. 그리고 집합 M을 $\pi, \alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q$를 포함하는 실수 집합이라 하자. 집합 M 위에서 정의되어 있고 $f(\pi)=0$, $f(A) \neq (B)$인 가법 함수 f가 존재하면, A와 B는 합동분해가능하지 않다.

[증명] A와 B가 합동분해가능하다고 가정하면, $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $A_i \equiv B_i$ $(i=1,\cdots,n)$을 만족시키는 서로 합동인 유한개의 다면체 $A_i, B_i (i=1,\cdots,n)$가 존재한다. 다면체 A에 대하여 $f(A)$를 A의 덴-불변량이라 하면, f는 가법함수이므로 $f(A)=f(A_1)+\cdots+f(A_n)=f(B_1)+\cdots+f(B_n)=f(B)$ 이 성립한다.[3] 그러나 이것은 $f(A) \neq (B)$이라는 가정에 모순이다. 따라서 A와 B는 합동분해가능하지 않다.

[정리] 부피가 같은 정사면체와 정육면체는 서로 합동분해가능하지 않다.
[증명] 부피가 같은 정사면체와 정육면체를 각각 P와 Q라 하자. P의 임의의 이면각의 크기를 ϕ라 하면 $\phi = \arccos\frac{1}{3}$이고, Q의 이면각의 크기는 모두 $\frac{\pi}{2}$이다. 집합 M을 $M=\{\pi, \frac{\pi}{2}, \phi\}$라 하면, [보조정리 1]에 의해 $\frac{\phi}{\pi}$는 무리수이고, [보조정리 2]에 의해 $f(\pi)=0$, $f(\phi)=1$인 가법 함수 f가 존재하므로 $f(\frac{\pi}{2})=0$이다. 이때 정육면체 Q의 한 모서리의 길이를 l이라 하면, Q의 덴-불변량은 $f(Q)=12 \cdot l \cdot f(\frac{\pi}{2})=0$이다. 또 정사면체 P의 한 모서리의 길이를 m이라 하면, P의 덴-불변량은 $f(P)=6 \cdot m \cdot f(\phi)=6m \neq 0$ 이다. 따라서 $f(P) \neq f(Q)$이므로, [보조정리 3]에 의해 부피가 같은 정사면체 P와 정육면체 Q는 서로 합동분해가능하지 않다.

덴의 증명을 통해 넓이가 같은 삼각형과 정사각형이 서로 합동분해가능한 것과는 달리 부피가 같은 삼각뿔과 정육면체는 일반적으로 서로 합동분해가능하지 않고, 따라서 밑면이 합동이고 높이가 같은 임의의 두 삼각뿔의 부피가 서로 같음을 합동분해를 통해서는 일반적으로 증명할 수 없음이 증명되었다. 즉, 삼각뿔의 부피 공식에 대한 증명은 어떤 식으로든 반드시 무한 과정을 포함해야 하며, 무한 과정 없이 다면체 부피에 대한 이론을 건설하는 것은 불가능하다는 것이다(도종훈・허선희, 2013).

---

3) $f(A)=f(A_1)+\cdots+f(A_n)$임을 다음과 같이 보일 수 있다.
일반성을 잃지 않고, $i \neq j$이면 $A_i \cap A_j = \varnothing$이거나 A_i와 A_j가 면, 모서리, 또는 꼭짓점을 공유한다고 가정하자(만약 그렇지 않다면 A를 각 Ai의 면들을 따라 더 잘게 분할하면 된다.). e를 A의 모서리가 아닌 A_i의 모서리라고 하면, e는 A의 내부에 있거나 A의 면들 중 하나의 내부에 있다. 모서리 e에서 A_j의 이면각들의 합은, e가 A의 한 면의 내부에 있을 때는 π이고, e가 A의 내부에 있을 때는 2π이다. f가 가법적이고 $f(\pi)=f(2\pi)=0$이므로, e가 A의 모서리가 아닌 A_i의 모서리인 경우 e와 관련된 f의 값들은 모두 0이다. 결국 $f(A_1)+\cdots+f(A_n)$에는 A의 모서리에 관한 값만 남는다. 따라서 $f(A_1)+\cdots+f(A_n)=f(A)$이다.

넓이와 부피의 이런 차이점을 공리의 관점에서 재해석하면, 넓이의 경우 정의역을 다각형으로 제한하여 다각형의 넓이만 생각할 경우 두 번째 넓이 공리인 '(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$이면 $\psi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \psi(A_i)$ 이다.'를 '(ii)′ $A \cap B = \varnothing$ $(i \neq j)$이면 $\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B)$ 이다.'로 대체할 수 있지만, 부피의 경우 정의역을 다면체로만 제한하더라도 두 번째 부피 공리인 '(ii) $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$이면 $\phi(\bigcup_i A_i) = \sum_i \phi(A_i)$ 이다.'를 '(ii)′ $A \cap B = \varnothing$ $(i \neq j)$이면 $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$ 이다.'로 대체하는 것이 불가능하다는 것이다.

이런 점에서 중학교 수학교과서에 제시된 뿔의 부피 공식에 대한 독특한 설명 방식은 학생들의 이해나 인지 발달 수준을 고려한 교수학적 선택이라기보다는 극한 개념을 학습하지 않은 학생들에게 극한의 개념 즉, 무한 과정 없이 해당 내용을 설명해야하는 상황에서 비롯된 불가피한 선택이라고 할 수 있다. 그리고 중학교 수학교과서에서의 이런 선택이 불가피할 수밖에 없음을 명시적으로 밝힌 문제가 바로 힐베르트의 세 번째 문제임을 알 수 있다.

IV. 결론

이상의 논의를 통해 학교수학의 여러 내용 중 도형 특히, 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피 및 그 공식의 설명 방식의 차이점을 각각에 내재된 공리와 힐베르트의 세 번째 문제의 관점에서 재조명하여 살펴보았다. 이에 따르면 삼각형의 넓이와는 다른 삼각뿔의 부피 공식에 대한 현행 중학교 수학교과서의 비형식적, 직관적 설명은 학생들의 인지 발달 수준을 고려한 교수학적 선택의 결과라기보다는 극한의 개념이 반드시 필요한 뿔의 부피 공식을 극한 개념을 학습하지 않은 학생들에게 설명해야 하는 상황에서 비롯된 불가피한 선택이고, 이를 명시적으로 밝힌 문제가 바로 힐베르트의 세 번째 문제라는 것이다. 그리고 공리의 관점에서 보면, 이는 분할과 재배열의 방법을 정당화해주는 넓이와 부피에 대한 가법성의 공리를 '유한 번'의 분할과 재배열에 대한 공리로 대체할 수 있는가 없는가의 문제 즉, 합동분해가 가능한가 불가능한가의 문제로서, 다각형의 넓이의 경우 이것이 가능한 반면 다면체의 부피는 이것이 불가능함을 앞선 논의를 통해 확인하였다.

도형의 넓이와 부피를 포함하여 중학교 기하 교육과정에는 평행선과 각의 관계로부터 시작하여 삼각형의 합동, 닮음, 피타고라스 정리, 원과 직선의 관계 등에 관한 여러 가지 내용들이 결과로서 제시되어 있다(교육과학기술부, 2011). 일부 내용에 대한 논증이 이루어지고 있으나 그 속에 내재되어 있는 공리나 엄밀한 증명은 교육과정에서 부각되지 않는다. 또한 현행 중등학교 기하 내용의 근간인 유클리드 원론의 내용 구성 방식이 공리계를 근간으로 한 직렬적 형태인 반면, 중등학교 기하 교육과정은 평행선 공리와 동치인 평행선에서의 동위각과 엇각의 관계, 삼각형의 합동과 닮음, 피타고라스의 정리, 삼각비, 원과 직선의 관계, 도형의 넓이와 부피 측정 등의 몇 가지 주제를 중심으로 한 병렬식 내용 전개 방식을 취하고 있어 내용의 전체적인 구조를 파악하기가 쉽지 않다(도종훈・허선희, 2013).

서론에서 언급한 바와 같이 학교수학에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나지 않은 기본 가정이나 공리를 파악하고 교과의 전체적인 구조와 흐름에 대한 안목을 갖추는 것은 교사가 끊임없이 추구해야 할 중요한 과제 중 하나이다. 학교수학은 공리적 방법에 의해 전개되지 않지만, 학교수학에서 사용하는 어떤 개념이나 전개 방식은 그 이면에 있는 공리적인 측면

을 고찰할 때 그 교육적 의미가 더욱 명확해지는 경우가 있다. 교사들이 이러한 측면을 파악하고 수업에 임하는 것은 학생들에게 보다 명료하고 의미 있는 수학적 설명을 하는데 도움을 줄 것이다(도종훈・허선희, 2013). 본고의 논의는 학교수학에 제시된 여러 가지 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 공리적 관점에서의 분석과 고찰의 한 사례로서 그 의의가 있을 것으로 보이며, 이와 유사한 사례 연구가 문헌 분석 뿐 아니라 교사와 학생의 인식 현황에 대한 질적 연구 방법 등을 통해 보다 심도 있게 이루어지길 기대한다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

구광조・라병소 (1997). 초등학교에서의 도형의 넓이 지도. 수학 및 통계연구 21, 41-57.

도종훈・박윤범 (2014). 초등학교 수학의 넓이 지도 내용에 대한 공리적 해석. 초등수학교육

도종훈・최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. 수학교육 42(5), 697-706.

도종훈・허선희 (2013). 공리적 관점에서 학교수학의 넓이와 부피 개념 재조명. 교육논총 19, 133-144.

정동권 (2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. 인천교육대학교 과학교육논총 13, 1-36.

최영기・도종훈 (2000). 학교수학에서 차원 다루기. Math Festival. 수학사랑.

최영기・홍갑주 (2006). 원의 넓이와 관련된 순환논법과 국소적 조직화. 학교수학 8(3), 291-300.

한인기 (1999). 힐베르트의 세 번째 문제. 한국수학사학회지 12(2), 25-39.

황혜정 (2010). 교과 내용 지식(SMK)에 초점을 둔 수학 수업평가 기준 고찰. 한국학교수학회논문집 13(1), 45-67.

황혜정 (2011). 수학 수업의 교사 지식에 관한 평가 요소 탐색 : 교수·학습 방법 및 평가를 중심으로. 한국학교수학회논문집 14(3), 241-263.

허민, 김선희, 도종훈, 조혜정, 조숙영, 이경은, 양서윤, 이규희, 김소연 (2013). 중학교 수학 ①. ㈜대교.

Barker, S.F. (1964). 수리철학. 이종권 역(1983). 종로서적.

Boltianskii, V.G. (1978). Hilbert's third problem. V. H. Winston & Sons.

De Barra, G. (1981). Measure theory and integration. Ellis Horwood Ltd.

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources teacher presentations of the subject-matter. Educational Studies in Mathematics 29.

Eves, H.W. (1976). An Introduction to the history of mathematics, 이우영・신항균 역(1999). 수학사. 경문사.

Heath, T.L. (1956). The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1,-3. Dover Publications, Inc.

Laczkovich, M. (2001). Conjecture and proof. The Mathematical Association of America.

Roe, J. (1995). Elementary Geometry. Oxford Science Publications.

Axioms underlying area of triangle and volume of triangular pyramid and Hilbert't third problem

Do, Jonghoon[4)]

Abstract

In this paper we investigate the axioms defining area and volume so that revisit area formula for triangle, volume formula for triangular pyramid, and related contents in school mathematics from the view point of axiomatic method and Hilbert's third problem.

Key Words : area axioms, volume axioms, volume formula for pyramid, Hilbert's third problem

Received July 28, 2015
Revised December 16, 2015
Accepted December 24, 2015

4) Seowon University (jhoondo@seowon.ac.kr)

<부록> $\cos r\pi$ 가 유리수이기 위한 필요충분조건 증명(Laczkovich, 2001)

$r=\dfrac{p}{q}$ $(p,q$ 는 서로소인 정수, $q>0)$일 때, $\cos r\pi$ 가 유리수이기 위한 필요충분조건은 $q=1$, 2, 3 중 하나이다.

[증명] $q=1$, 2, 3 이면 $\cos r\pi$ 의 값은 ± 1, 0, $\pm\dfrac{1}{2}$ 중 하나이므로 유리수이다.

$$\cos r\pi=\begin{cases}\pm 1 &, q=1\\ 0 &, q=2\\ \pm\dfrac{1}{2} &, q=3\end{cases}$$

이제 $\cos r\pi$ 가 유리수이면, $q=1$, 2, 3 중 하나임을 보이자. 이를 위해 먼저 음이 아닌 정수 $n=0,1,2,\cdots$ 에 대하여 $2\cos nx=t_n(2\cos x)$ (모든 실수 x 에 대하여)인 다항식 $t_n(x)$ 가 존재함을 n 에 대한 귀납법으로 보이자.
$n=0$, $n=1$ 인 경우는 $t_0(x)=2$, $t_1(x)=x$ 로 놓으면 된다. $n\geq 1$ 일 때, $k\leq n$ 인 모든 k 에 대하여 다항식 $t_k(x)$ 가 존재한다고 하자. $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x=2\cos nx\cos x$, $2\cos(n+1)x=2\cos nx\cdot 2\cos x-2\cos(n-1)x$ 이므로 $t_{n+1}(x)=t_n(x)\cdot x-t_{n-1}(x)$ 이라 하면, $t_{n+1}(2\cos x)=2\cos(n+1)x$ 가 성립한다. 그러므로 모든 $n=0,1,\cdots$ 에 대하여 다항식 $t_n(x)$ 가 존재한다. 한편, $t_{n+1}(x)=t_n(x)\cdot x-t_{n-1}(x)$ 이므로, 모든 $n\geq 1$ 에 대하여 $t_n(x)$ 은 최고차항의 계수가 1 이고, 다른 항들의 계수 역시 모두 정수인 n 차 다항식이다.

이제 $\cos r\pi$ $(r\in Q)$가 유리수라고 가정하면, $2\cos r\pi=\dfrac{a}{b}$ $(a,b$ 는 서로소인 정수)로 나타낼 수 있다. r 의 분모를 n 이라고 하면 nr 은 정수이고, 따라서 다음과 같은 등식이 성립한다.

$$\pm 2=2\cos nr\pi=t_n(2\cos r\pi)=t_n\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+c_0\ ,\ c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\text{ 은 정수.}$$

위 등식의 양변에 b^n 을 곱하면 등식 $\pm 2b^n=a^n+c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_0b^n$ 을 얻는다. 이때 항 a^n 을 제외한 항들은 모두 b 의 배수이므로 $b\mid a^n$ 이다. $\gcd(a,b)=1$ 이므로 $b=\pm 1$ 이고, 따라서 $2\cos r\pi(=a)$ 는 정수이다. $|2\cos r\pi|\leq 2$ 이므로 $2\cos r\pi$ 의 값으로 가능한 수는 $0,\pm 1,\pm 2$ 이다. 즉, $\cos r\pi=0,\pm\dfrac{1}{2},\pm 1$ 이다. 따라서 $r=\dfrac{k}{2}$, $\dfrac{k}{3}$ 이므로$(k\in Z)$, $q=1$, 2, 3 중 하나이다.