한국학교수학회논문집 제 18 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 18, Number 4, 353-370, December 2015

나눗셈과 분수의 1차적 개념이 소수의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구[1)]

김화수[2)]

본 연구에서는 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아 3명을 대상으로 소수를 내용으로 하였을 때, 정확한 1차적 개념에 대한 학습과 개념의 연결로 소수에 대한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마[3)]를 어떻게 구성하여 소수에 대한 관계적 이해를 하는지에 대해 질적 사례연구를 통하여 알아보았다. 즉, 연구대상자들이 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 바탕으로 어떻게 소수에 대한 관계적 이해를 하는지, 그리고 소수의 1차적 개념을 바탕으로 어떠한 변형된 1차적 개념을 형성하여 수직적 수학화를 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 그 결과 정확한 1차적 개념에 대한 학습으로 형성된 변형된 1차적 개념과 그들의 연결로 구성된 스키마와 변형된 스키마가 소수에 대한 관계적 이해와 수직적 수학화에 중요한 요인으로 작용 한다는 것을 알 수 있었다.

주요용어 : 1차적 개념, 변형된 1차적 개념, 스키마, 변형된 스키마

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

본 연구의 연구대상자들은 연구 과정에서 소수가 무엇이고, 소수와 관계가 있는 개념은 무엇이며, 소수점이하의 수의 개수가 한 개인 경우에는 왜 분모가 10인 분수 형태로 나타낼 수 있는지 알고 싶어 하는 것을 볼 수 있었다. 또한 Renzulli(1986)의 영재 행동 세 가지, 즉 창의성, 과제집착력, 평균 이상의 지능과 같이 소수를 분수 이외에도 다른 어떠한 형태로 나타낼 수 있는지, 그리고 분수만 있어도 되는데 왜 소수를 만들었는지, 분수와 소수는 어떠한 관계가 있는지에 대해서도 알고 싶어 했으며, 그들의 관계에 대해서 자신만의 창의적인 방법으로 개념들을 연결하여 문제를 해결하고 이해하기를 원했다.

---

1) 이 논문은 2015년도 세한대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 세한대학교 (hskim@sehan.ac.kr)
3) Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태가 새롭게 변형된 1차적 개념을 다른 일차적 개념이나 스키마와 연결 시켜 형성되는 새로운 스키마를 의미한다.(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨)

이에 본 연구에서는 대상자들을 수학영재아로 하였는데, 수학영재아들을 연구대상으로 한 이유는 2002년 ~ 현재까지 초등학생들을 대상으로 1차적 개념[4]과 변형된 스키마를 활용한 개념구성과정을 계속하여 종단적인 연구를 해 오는 과정에서 1차적 개념을 학습한 학습자들(영재아, 평재아, 부진아) 대부분은 연구 초반에는 1차적 개념에 대한 학습이 거의 되어있지 않아서, 즉 Koichu & Berman(2005)이 얘기한 것과 같이 우리나라의 수학영재아들도 반복적인 계산에 의한 훈련된 수학에 익숙해져 있어서 문제를 풀었을 때, 답은 맞아도 그 이유가 왜인지를 설명하는 학생은 거의 없을 뿐만 아니라, 문제를 해결하는 방법 또한 오직 한 가지 밖에 없었다. 하지만 본 연구자가 한국수학교육학회와 영재학회에서 학술대회 발표와 논문을 통하여 발표한 내용과 같이, 1차적 개념에 대한 학습을 시켰을 때, 영재아, 평재아, 부진아 중에서 수학영재아들이 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양을 다르게 변화시킨 변형된 1차적 개념을 더욱 다양하게 형성하는 것을 볼 수 있었고, 수학영재아들이 자신이 스스로 형성한 변형된 1차적 개념들을 여러 가지 형태로 연결하여 더욱더 다양하고 창의적인 변형된 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근하는 것을 볼 수 있었기에 영재아들을 연구 대상으로 정하였다. 이러한 초점을 바탕으로 본 논문에서는 스키마와 변형된 스키마를 구성하기 위해 필요한 1차적 개념에 대한 연구와 이로 인해 형성되는 스키마와 변형된 스키마를 분석 하고 이것을 중심으로 수업을 실시할 때, 나타나는 여러 현상, 즉 학생들의 개념 형성 과정상의 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나타나는 현상을 나눗셈, 분수, 소수를 중심으로 조사 연구 하였다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제가 설정되었다.

1. 연구대상자들은 소수의 1차적 개념의 이해로 어떠한 변형된 1차적 개념과 변형된 schema를 형성 하는가?
2. 연구대상자들은 어떠한 변형된 스키마를 형성하여 소수에 대한 관계적 이해를 하는가?

3. 용어의 정의

1) 1차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념. 즉, 그 개념이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다(김화수, 2014).

예를 들어, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나 병합하는 계산법으로, 더해짐을 당하는 수는 피가수라 하고 더하는 수를 가수라고 하며, 그 결과를 합이라고 한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

---

4) Skemp의 1차적 개념은 정해진 의미와 형태를 가지지만, 본 연구자의 1차적 개념은 본질에 가까울수록 더욱더 새로운 의미와 다양한 형태를 가진다. 그러므로 본질에 더 가까운 1차적 개념을 찾기 위해 본 연구자는 2002년부터 현재까지 질적 사례연구를 통하여 종단적인 연구를 진행하고 있다.

2) 변형된 1차적 개념

1차적 개념에 대한 본질은 변하지 않으면서, 모양을 다르게 변화시킨 1차적 개념을 뜻한다(김화수, 2014). 즉, 변형된 1차적 개념은 본질(참 값)에 가까워지는 또 다른 형태의 1차적 개념을 의미한다.

예) 나눗셈의 1차적 개념,
피제수가 제수에 의해서 몇 등분이 되는지 아는 것(등분제).
피제수에 제수가 얼 만큼 포함이 되는지 아는 것(포함제).
나눗셈의 변형된 1차적 개념,
피제수에서 제수를 몇 번 뺄 수 있는지 아는 것.
제수가 몇 번 더해지면 피제수가 되는지 아는 것.
제수에 얼마를 곱하면(더해진 개수만큼) 피제수가 되는지 아는 것.

3) 2차적 개념

1차적 개념들의 연결이나, 1차적 개념과 변형된 1차적 개념의 연결, 그리고 변형된 1차적 개념들의 연결로 형성된 개념을 뜻한다(김화수, 2014).

4) 변형된 스키마

Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 변형된 1차적 개념을 다른 1차적 개념이나 다른 변형된 1차적 개념과 연결하여 형성한 기존에 나와 있지 않은 새로운 형태의 스키마를 의미한다(변형된 스키마 또한 많은 사람들이 사용하고 일반화 되면 스키마에 포함됨)(김화수, 2014).

예를 들면, 약수는 나눗셈의 변형된 1차적 개념과 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 1차적 개념이 연결되어 만들어진 변형된 스키마이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺐을 때, 피제수의 나머지가 없으면[5] 그때의 제수는 약수가 된다. 그리고 제수를 한 번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

5) 6의 약수는 6을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이므로 이것을 뺄셈과 연결시키면, 피제수 6에서 제수 1을 6번(6÷1), 제수 2를 3번(6÷2), 제수 3을 2번(6÷3), 제수 6을 한 번(6÷6) 피제수의 나머지가 없이 뺄 수 있다. 그러므로 6의 약수는 1, 2, 3, 6이 된다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 관계적 이해

기존의 스키마는 새로운 지식을 얻는데 꼭 필요한 필수적인 도구이다. 우리가 학습하는 대부분은 이미 알고 있는 어떤 것에 의존한다. 분수를 배우려면 최소공배수, 공배수, 배수를 알아야하고, 이에 앞서서 약분, 최대공약수, 공약수, 약수를 알아야 하며, 이에 앞서서 나눗셈, 곱셈, 뺄셈, 덧셈에 대해서 알아야하고 그들의 관계에 대해서 알아야 한다. 이와 같이 높은 차원의 모든 학습은 읽기, 쓰기, 말하기 등 과 같은 기본적인 스키마에 의존하게 된다(Richard R. Skemp 지음/ 황우형 옮김, 1997).

수학에서 스키마를 어떻게 구성하는 것이 바람직한 것인가에 대한 아이디어로 Skemp는 관계적 이해를 들고 있다.(Skemp, 1987). 그는 관계적 이해를 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 아는 능력이라고 설명하였다. 대부분의 초등학생들은 수학문제를 대할 때, 개념을 스스로 구성하여 자신의 생각을 바탕으로 문제를 해결하기 보다는 유형과 공식에 의한 도구적인 문제해결을 한다. 그리고 어떻게 해서 그 문제를 풀었는지에 대한, 답을 할 때도 공식에 근거해서 설명을 하고 관계적 이해를 하지 못했다 하더라도 답만 맞으면 이해를 했다고 생각을 한다. 이것은 관계적 이해가 아닌 도구적 이해로 훈련이 되었다는 것을 의미하며 다른 방향으로 생각해 본다면, 도구적 이해가 관계적 이해보다는 처음에 학습할 때, 더 빠르게 습득이 된다는 의미와도 연결이 된다. 그러나 도구적 이해는 '공식'이라는 접근방법이 이미 정해져 있어서 중재사고 활동이 거의 없이 문제를 해결하기 때문에 문제를 해결하는 속도는 빠를지 모르지만 다른 형태의 응용된 문제를 해결하거나 상위 단계의 개념으로 확장하기는 쉽지 않다. 하지만 Ausubel의 실사성의 원리[6]처럼 1차적 개념을 바탕으로 여러 형태의 변형된 1차적 개념을 형성하면, 관계적 이해뿐만 아니라 수학적 의사소통과 서술형 문제 해결에 있어서도 좋은 결과를 보일 수 있다. 실제로 두 명의 초등학교 3학년 학생들에게 나눗셈을 분수로 나타내는 내용에 대해서, 학생 A에게는 기존의 방법과 같이 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$를 이용한 도구적 이해의 수업을 하였고, 학생 B에게는 나눗셈의 1차적 개념을 이용한 관계적 이해의 수업을 하였을 때, 학생 A는 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$만을 이용하여 문제를 해결 하였지만, 학생 B는 나눗셈의 1차적 개념인 피제수에 제수가 얼 만큼 포함되는지 아는 것(포함제)을 바탕으로 피제수에서 제수를 몇 번 뺄 수 있는지 아는 것, 제수가 몇 번 더해지면 피제수가 되는지 아는 것, 제수에 얼마를 곱하면(더해진 개수만큼) 피제수가 되는지 아는 것, 이라는 변형된 1차적 개념을 형성하여 문제를 해결 하는 것을 볼 수 있었다. 예를 들어 $3 \div 5$의 문제를 해결할 때, 학생 B는 피제수 3에 제수 5가 얼 만큼 포함이 되는지 아는 것(포함제)이라는 1차적 개념을 바탕으로 피제수 3이 제수 5보다 작기 때문에 제수 5가 피제수 3에 포함될 수 없는 것처럼 보이지만 제수 5중에서 3은 포함되기 때문에[7] $\frac{3}{5}$이 된다는 2차적 개념(나눗셈

6) 실사성의 원리란 표현을 달리해도 명제의 의미가 변하지 않는 것을 의미한다.

7) 만약 다 성장한 코끼리가 소형 경승용차에 탄다면 코끼리 몸 전체가 경승용차에 다 들어가지는 못하지만 앞발 두 개 정도는 태울 수 있는 것과 비슷한 이치

의 1차적 개념을 바탕으로 형성된 분수개념)을 형성하면서 피제수÷제수가 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$가 되는 과정까지 설명하는 것을 볼 수 있었다. 하지만 학생 A는 $\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}$라는 공식만을 이용하여 문제를 해결했기 때문에 문제해결과정을 설명하지 못하는 것을 볼 수 있었다. 즉, 학생 B는 자기 스스로가 문제를 여러 가지 방법으로 해결해 나가는 능동적인 모습으로 변해 가고 있었지만, 학생 A는 여전히 교사의 스키마와 공식에 의존하는 수동적인 모습을 계속해서 보이고 있었다. 위와 같이 관계적 이해가 이루어진 학생들은 여러 가지 방법으로 문제 해결에 접근 할 수 있을 뿐만 아니라, 아직 배우지 않은 상위 단계의 수학 내용도 스스로 해결할 수 있는 능력과 생활 속에서 일어나는 일들을 수학적으로 해결해 나갈 수 있는 능력을 가지게 된다.

구성주의에서 지식이란 적절한 환경에서 교사의 안내나 도움을 받음으로써 더 잘 구성될 수 있는 것으로 보고 있다(박영배, 1996). 그러므로 교사는 수학자가 발명한 지식을 학생이 스스로 다시 만들어가는 과정을 지켜봐 주고, 좀 더 나은 방법을 찾도록 도와주기 위해서는 먼저 수학자가 어떻게 지식을 만들었는지 알아야 할 것이다(라병소, 1999).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 N초등학교 3학년 학생 3(남학생 2명, 여학생 1명)명을 대상으로 2013년 6월1일 ~ 2014년 12월 31일까지 대전에 위치한 본 연구자의 수학교육 연구실에서 매주 화요일, 목요일, 토요일 각각 2시간씩 수업을 실시하였다. 화요일은 1차적 개념과 변형된 1차적 개념에 대한 학습, 목요일은 서술형 문제해결에 대한 학습, 토요일은 1차적 개념과 변형된 1차적 개념을 바탕으로 연구 대상자들 스스로가 형성한 변형된 스키마와 2차적 개념에 대한 학습을 실시 하였다. 실시한 3명은 모두, 전교 석차 10% 안에 포함[8]되고 KAGE 영재학술원에서 지능검사(한국 웩슬러 지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 선발되어 교육을 받는 학생으로 수학적 문제 해결력이 비슷한 성향의 학생들이었다.

2. 연구 방법과 절차

1) 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을

8) 학년 석차 10%안에 포함되는 학생은 송상헌(1998)이 언급한 것처럼 ‘이미 탁월한 성취를 나타내 보인 재능아는 물론, 아직 탁월한 성취를 보이지는 않았지만 그러한 성취를 보일 잠재적 가능성(영재성)을 가지고 있는 자’이기 때문에 영재아의 대상으로 선택하였다.

습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰 ,인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구를 택하였다.

본 연구의 사례는 초등학교 4학년에서 지도되는 소수에 대한 내용을 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년인 세 명의 연구 대상자들에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

2) 연구 절차

본 연구는 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전을 할 때, 어떠한 수학적 개념 구성과정을 거치고 어떠한 변형된 스키마를 형성하는지에 대해 알아보기 위해 연구를 하였다. 두 가지 연구 문제를 통해 연구 대상자들에게 1차적 개념에 대한 학습과 1차적 개념을 바탕으로 형성된 변형된 1차적 개념, 그리고 1차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 2차적 개념의 구성에 대한 내용과 학습 활동지를 경험하게 하여 학생들에 의해서 발견되고 형성된 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다.

본 연구자는 연구 대상자들에게 새로운 스키마를 형성 할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 학습을 전개하였다.

이와 같은 절차에 의해 학습을 수행한 후, 연구자는 연구 대상자들과 토의한 내용과 연구 대상자들이 발견한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 정리하고, 이를 통하여 연구문제를 해결한 분석 결과를 제시 하였다.

연구 대상자들에게 새로운 변형된 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 절차에 따라 학습을 전개하였다.

(1) 1차적 개념에 대한 설명을 해 주었다.
(2) 기존에 형성된 1차적 개념의 모델을 보여 주었다.
(3) 연구대상자들이 구성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마에 대해서 토의를 하였다.
(4) 토의에 대한 내용을 분석하였다.
(5) 토의를 통해 발견된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 정리하였다.
(6) 학습활동지에 제시한 문제를 해결하게 하였다.
(7) 해결된 문제를 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 스키마가 이루어졌는지에 대한 분석을 하였다.

예) 나눗셈을 예로 들면,
(1) 나눗셈의 1차적 개념에 대한 설명.
(2) 나눗셈에 대한 기존의 모델 제시.
(3) 연구대상자들이 구성한, 나눗셈의 변형된 1차적 개념에 대해서 토의.
(4) 토의된 내용 분석.
(5) 토의를 통해 발견된 나눗셈의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 정리.
(6) 학습활동지에 제시한 문제 해결.
(7) 연구대상자들이 해결한 학습활동지의 내용 분석.

3) 연구 도구

연구 도구의 전체 구성은 나눗셈과 분수의 1차적 개념과 변형된 1차적 개념, 그리고 나눗셈과 분수의 변형된 스키마와 소수의 1차적 개념에 관한 내용으로 이루어 졌다.
연구 도구에 나타난 나눗셈과 분수의 1차적 개념과 변형된 1차적 개념, 그리고 나눗셈과 분수의 변형된 스키마와 소수의 1차적 개념은 본 연구자의 선행연구를 바탕으로 하고 있으므로 바라보는 시각이나 상황의 차이에 의해서 다시 바뀔 수 있다.

4) 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 1차적 개념의 학습과 1차적 개념을 바탕으로 형성된 변형된 1차적 개념의 발견, 그리고 이들의 구성으로 형성되는 스키마(개념의 구성체)와 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 세 명의 N초등학교 연구 대상자들의 토의 내용과 학습활동지에 쓰여진 내용들을 중심으로 자료를 수집하였다.

5) 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해와 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 연구 대상자들에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 1) 1차적 개념의 숙지, 2) 위와 같은 내용을 가진, 연구대상자들의 변형된 1차적 개념의 형성, 3) 1차적 개념과 변형된 1차적 개념들의 연결, 변형된 1차적 개념들의 연결로 형성된 변형된 스키마에 대해서 분석을 하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 연구 대상자들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 다음의 연구 문제에 대한 접근을 하였다.

1. 연구대상자들은 소수의 1차적 개념의 이해로 어떠한 변형된 1차적 개념과 변형된 schema를 형성 하는가?

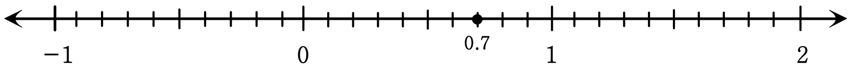
1) 소수에 대한 개념 설명

소수란 0과 1사이에 존재하는 모든 실수를 말한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

2) 1차적 개념 모델 제시

소수의 1차적 개념.
예를 들어 0.7은 0보다는 크고 1보다는 작은 실수, 즉 0과 1사이에 존재하는 수(0 〈0.7 〈1)

이므로 소수이다. 0.7을 수직선 위에 표시하기 위해서는 아래 그림처럼, 0과 1사이를 10등분을 해야 표시가 가능하다.



[그림 Ⅳ−1] 소수의 1차적 개념

3) 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 1】은 소수의 1차적 개념에 대하여 학습한 후, 교사와 연구 대상자(영재아)들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 1】

ⓐ S1: 선생님! 0과 1사이에 존재하는 수면, 0보다 크고 1보다 작은 수를 말하는 거죠?
T: 응~ 물론이지~
ⓑ S1: 그러면 1과 2사이에 있는 수는 소수가 아닌가요? 학교에서 1.5도 소수라고 배웠는데...
T: 1과 2사이 또한 0과 1사이와 같은 경우야~ 왜냐하면, 자연수 1을 시작점으로 한다면 1에서 2사이는 0에서 1사이가 되는 거잖아. 그래서 1.5의 경우는 1+0.5가 되는 거야. 소수도 분수처럼 진소수와 가소수라는 것이 있었으면 좋겠다. 그래서 0.5와 같은 소수는 진소수라고하고, 1.5와 같은 소수는 가소수라고 하면 분수랑 소수를 잘 연결해서 이해할 수 있을 텐데...
ⓒ S1, S2, S3: 아~ 그러내요~ 하하하~
ⓓ S3: 선생님～ 0과 1사이에는 분수도 있지 않나요?
T: 물론 있지?
ⓔ S3: 선생님~ 그럼 0과 1사이에 있는 분수와 같은 위치에 소수도 있지 않을까요?
T: 그렇지!
ⓕ S3: 선생님~ 그러면 같은 위치에 있는 분수랑 소수는 같은 수니까, 분수를 소수로 바꿀 수 있고, 소수를 분수로 바꿀 수 있지 않을까요?
S1, S2: 형준이 말이 맞는 것 같아요~
T: 오호~, 그럼 형준이가 분수를 소수로 만들어 볼래?
S3: 선생님, 생각해 보고 말씀 드릴께요.
T: 그래~
S3: 선생님, 선생님께서 문제를 내주세요. 그럼 제가 소수로 바꿔 볼께요.
T: 그래~ 그럼, 선생님이 문제를 낼께~
S1, S2, S3: 네～
T: $\frac{3}{5}$을 소수로 만들어 볼래?
S1, S2, S3: 음…

T: $\frac{3}{5}$은 어떤 수와 어떤 수 사이에 있을까?
ⓖ S1, S2, S3: 0과 1사이에 있어요~
T: 그렇지! 0보다 크고 1보다는 작은 수 지? 그럼 무슨 수와 같을까?
S1: 소수요~
S2: 선생님! 알 수 있을 것 같아요! 시간 좀 주세요.
T: 그래~ 시간을 줄 테니까 모두 한번 생각해봐~
S1, S2, S3: 네~
S2: 선생님! 저요!
T: 그래, 인길이~
ⓗ S2: 선생님, 분수는 분모와 분자가 서로 같은 배수 형태로 증가할 때, 같은 크기의 분수가 되잖아요~ 그래서 저는 $\frac{3}{5}$의 분모와 분자에 2를 곱해서 $\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{6}{10}$으로 만들었어요. 그리고 $\frac{6}{10}$은 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 6개에 해당되고, 한 칸이 0.1이니까 $\frac{6}{10}$은 0.6이 되요.
S3: 선생님, 저도 하나 발견했어요.
T: 그래, 형준이!
ⓘ S3: $\frac{3}{5}$을 나눗셈으로 나타내면 3÷5가 되고, 3÷5는 피제수가 제수 보다 작아서 제수 3에다가 10을 곱해줬어요. 그리고 30÷5가 되서, 이것을 계산해보면 6이 되고, 아까 10을 곱한 만큼 6을 10으로 나누면, $\frac{6}{10}$이 되서, 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 6개에 해당돼요. 그리고 그 한 칸이 0.1이기 때문에 6칸은 0.6이 돼요~

4) 토의된 내용 분석

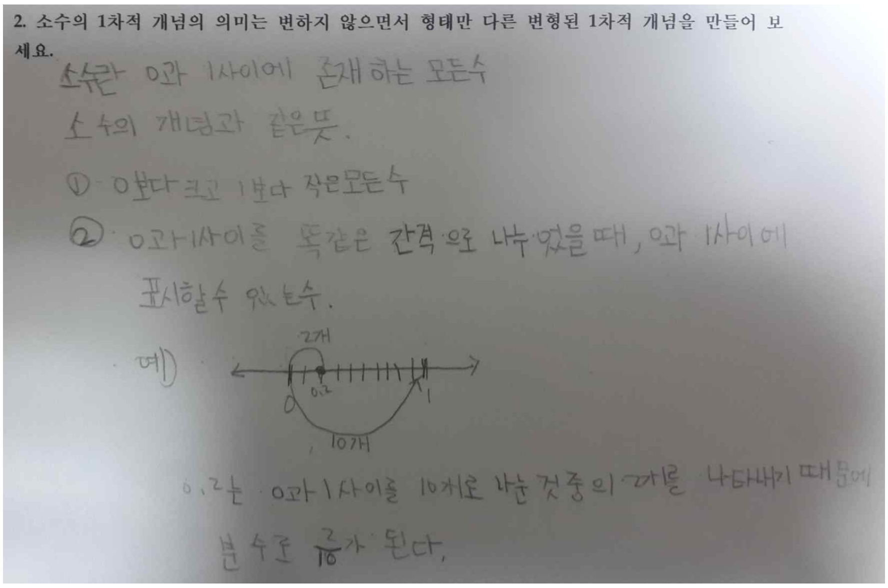
【프로토콜 1】에서는 연구대상자들이 나눗셈의 1차적 개념과 분수의 1차적 개념, 그리고 나눗셈과 분수의 변형된 1차적 개념을 소수의 개념 안에 포함시켜 소수의 관계적 이해(ⓐ, ⓑ, ⓒ)를 했을 뿐 만 아니라, 나눗셈과 분수와 소수의 관계(ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, ⓗ, ⓘ)를 연구대상자들이 지금까지 학습한 1차적 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마를 바탕으로 스스로가 변형된 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근을 하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리해 보면, 다음과 같다.

5) 발견된, 변형된 1차적 개념 정리

(1) 분수와 소수의 관계(ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)에 대한 내용을 바탕으로 한, 소수의 변형된 1차적 개념.

소수란, 0과 1사이에 존재하는 모든 실수를 의미하므로 0과 1사이를 똑같은 크기로 나누었을 때, [그림 Ⅳ-2]와 같이 소수를 정확한 위치에 표시할 수 있다. 그리고 0과 1사이를 나

눈 전체 개수는 분모가 되고, 소수가 있는 위치는 나눈 전체 개수의 부분이 되므로 똑같은 위치에 같은 크기의 분수가 존재한다. 그러므로 소수의 변형된 1차적 개념으로 연구대상자들(영재아)은 0과 1사이를 똑같은 크기고 등분을 했을 때, 0과 1사이에 나타낼 수 있는 수(0과 1사이에 표시할 수 있는 수)를 추상하고 있다.



[그림 Ⅳ-2] 소수의 변형된 1차적 개념

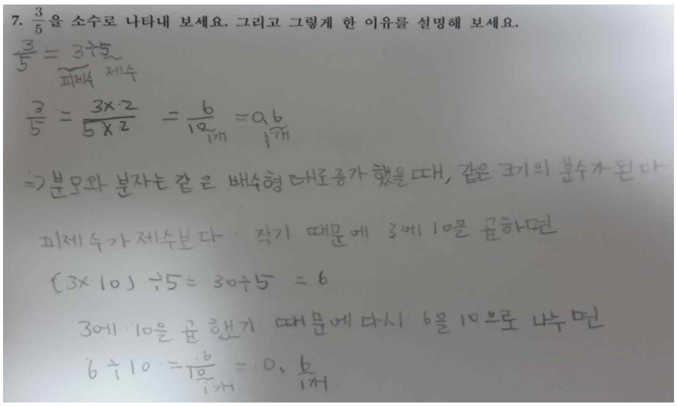
6) 발견된, 변형된 Schema 정리

(1) 분수를 소수로 나타내는 방법(ⓗ)의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema.

분모와 분자는 같은 배수 형태로 증가할 때, 같은 크기의 분수가 되므로 $\frac{3}{5}$의 분모와 분자에 각각 2를 곱해서 $\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{6}{10}$을 만든다. 이 때, $\frac{6}{10}$은 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 6개에 해당되고, 한 칸이 0.1이므로 0.6이 된다.

(2) 나눗셈을 소수로 나타내는 방법(ⓘ)의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema.

$\frac{3}{5}$을 나눗셈으로 나타내면 3÷5가 되고, 3÷5는 피제수가 제수 보다 작기 때문에 제수 3에 10을 곱해서 30÷5로 만든 후, 계산 한 결과인 6을 다시 10으로 나누면(앞에서 3에 10을 곱하였으므로 계산 결과인 6을 다시 10으로 나눈다), $\frac{6}{10}$이 된다. 이 때, $\frac{6}{10}$은 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 6개에 해당되고 그 한 칸이 0.1이므로 6칸은 0.6이 된다.



[그림 Ⅳ-3] 나눗셈과 분수와 소수의 관계

2. 연구대상자들은 어떠한 변형된 스키마를 형성하여 소수에 대한 관계적 이해를 하는가?

1) 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 2】는 소수의 1차적 개념과 소수의 변형된 1차적 개념에 대하여 학습한 후, 교사와 연구 대상자(영재아)들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 2】

ⓐ S3: 선생님, 소수는 0과 1사이에 존재하는 수니까요, 0과 1사이에 표시할 수 있어야 해요. 그리고 0과 1사이에 표시를 하기 위해서는 0과 1사이를 똑같은 간격으로 나누어야 해요.

T: 어떻게 나누지?

S3: 0.1은 10개로 나누면 되고, 0.2는 10개로 나누어도 되고 5개로 나누어도 돼요.

T: 0.2는 왜 5개로 나눌 수 있지?

S3: 0과 1사이를 5개로 나누면 1칸이 0.2가 되잖아요. 0.2를 5번 더하면 1이 돼요. 그래서 5개로 나누었어요.

S2: 선생님! 0.3은 10개로만 나누어야해요!

T: 왜 처음에 0과 1사이를 10개로 나눴지?

S2: 그것은요, 0과 1사이를 10개로 나누면 1칸이 0.1이 되니까요, 0.1, 0.2, 0.3 모두 다 눈금에 표시할 수 있어서요.

ⓑ S1, S2, S3: 선생님! 0.1부터 0.9까지 0과 1사이를 10개로 나누면 다 표시할 수 있어요!!!

T: 그럼, 0.01은 0과 1사이를 몇 개로 나누면 표시할 수 있을까?

S2, S3: 선생님!

T: 인길이랑, 형준이가 동시에 선생님을 불렀네? 하하하~ 누가 먼저 얘기해 볼래?

S2: 제가 먼저 할께요!

T: 형준아, 괜찮겠니?

S3: 네, 선생님.
T: 그럼, 인길이가 먼저 얘기해 봐라.
ⓒ S2: 0.1은 0과 1사이를 10개로 나누었잖아요. 그러니까 10개로 나눈 것을 또 10개로 나누면 될 것 같아요.
S3: 저랑 같아요.
T: 그럼 전체가 몇 개로 나누어지지?
S2, S3: 100개요~
S1: 어! 그럼 0.01는 100개로 나누어야 표시 할 수 있고, 100개중의 1개니까... 분수로 바꾸면 $\frac{1}{100}$ 이네요?
T: 하하하~ 그렇지!
S2: 0.02는 $\frac{2}{100}$!. 선생님, 또 문제 내 주세요~
T: 얘들아~ 여기에서 발견 할 수 있는 규칙이 뭐 없을 까?
S1, S2, S3: 음...
S2: 선생님! 0.1에서요, 점을 뭐라고 해요?
T: 소수점이라고 해~
ⓓ S2: 그럼 하나 발견했어요! 소수점 아래에 있는 수하고, 나누는 것하고 관계가 있는 것 같아요!
T: 어떻게?
ⓔ S2: 0.1은 소수점 아래에 있는 수가 하나잖아요~ 그래서 10개로 나누고, 0.01은 2개라서 100개로 나누는 것 같아요~
S1: 어! 하하하~ 선생님! 인길이가 얘기한 것에서 하나 발견했어요!
T: 뭔데?
ⓕ S1: 소수점 아래에 있는 수가 하나면, 10개로 나누고, 두 개면 100개로 나눈다고 했잖아요~ 그러니까 분수로 나타낼 때, 분모랑 같아요~
S2, S3: 어! 그러네~
ⓖ S1: 선생님! 소수점 아래에 있는 수의 개수랑 0과 1사이를 나누는 10하고 100에서 0의 개수랑 서로 같아요! 0.1은 소수점 아래에 있는 수가 1개니까 10개로 나누는데, 0이 1개고, 0.01은 소수점 아래에 있는 수가 2개니까 100개로 나누는데, 0이 2개라서 소수점 아래에 있는 수랑 0의 개수가 서로 같아요.

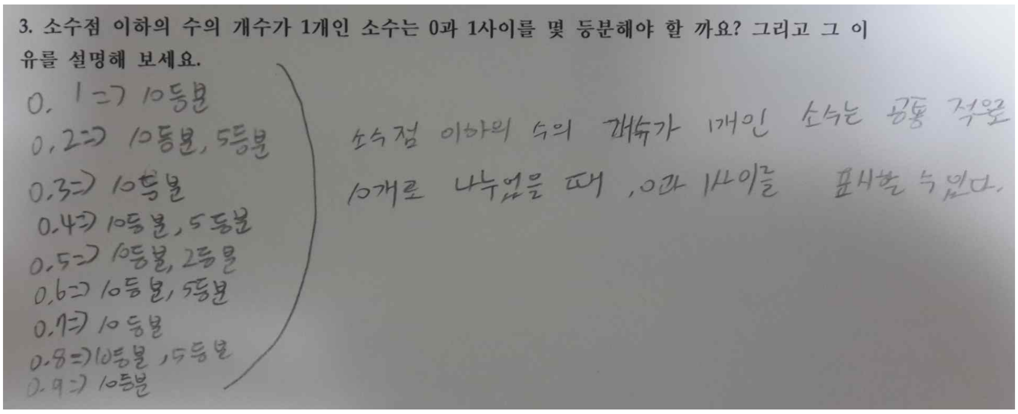
2) 토의된 내용 분석

【프로토콜 2】에서는 연구대상자들이 10의 거듭제곱수와 분모와 소수점이하의 수의 관계(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)를 위의 【프로토콜 1】에서 스스로 구성한 소수의 변형된 스키마와 연구대상자들이 지금까지 학습한 1차적 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마를 바탕으로 문제 해결에 접근을 하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리해 보면, 다음과 같다.

3) 발견된, 변형된 Schema 정리

1) 10의 거듭제곱수와 분모와 소수점이하의 수의 관계(ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema.

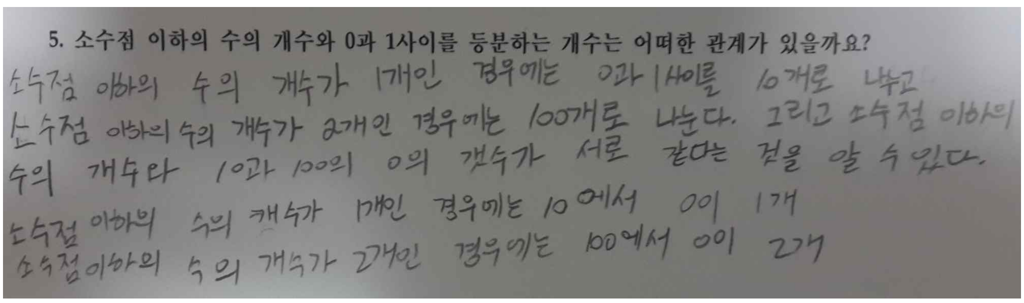
소수를 0과 1사이에 표시하기 위해서는 0과 1사이를 10의 거듭제곱으로 등분을 하면 편리하다. 0.1, 0.2, 0.3, … 과 같은 소수점이하의 수의 개수가 1개인 경우에는 0과 1사이를 10등분을 하면 0과 1사이에 표시하기 쉽고, 0.01, 0.02, 0.03, … 과 같이 소수점이하의 수의 개수가 2개인 경우에는 0과 1사이를 100등분하면 0과 1사이에 표시하기 쉽다. 이 때, 소수점 이하의 수의 개수와 0과 1사이가 등분된 10의 거듭 제곱의 수에서 0의 개수가 서로 일치하는 것을 알 수 있다. 0.1(소수점 이하의 수의 개수 1개)은 10등분(0의 개수 1개), 0.01(소수점 이하의 수의 개수 2개)은 100등분(0의 개수 2개)를 나타내므로 반대로, 분수를 소수로 나타낼 때, 분모의 십의 거듭 제곱수의 0의 개수가 1개이면, 소수점 이하의 수가 1개, 0의 개수가 2개이면, 소수점 이하의 수가 2개임을 알 수 있다. 소수점이하의 수의 개수는 0과 1사이를 등분하거나 소수를 분수로(유한소수를 유리수로) 나타낼 때, 또는 분수를 소수로 나타낼 때, 중요한 역할을 한다.


3. 소수점 이하의 수의 개수가 1개인 소수는 0과 1사이를 몇 등분해야 할 까요? 그리고 그 이유를 설명해 보세요.

0.1 => 10등분
0.2 => 10등분, 5등분
0.3 => 10등분
0.4 => 10등분, 5등분
0.5 => 10등분, 2등분
0.6 => 10등분, 5등분
0.7 => 10등분
0.8 => 10등분, 5등분
0.9 => 10등분

소수점 이하의 수의 개수가 1개인 소수는 공통 적으로 10개로 나누었을 때, 0과 1사이를 표시할 수 있다.

[그림 Ⅳ-4] 소수점이하의 수의 개수와 0과 1사이를 등분하는 개수와의 관계 1.


5. 소수점 이하의 수의 개수와 0과 1사이를 등분하는 개수는 어떠한 관계가 있을까요?

소수점 이하의 수의 개수가 1개인 경우에는 0과 1사이를 10개로 나누고
소수점 이하의 수의 개수가 2개인 경우에는 100개로 나눈다. 그리고 소수점 이하의
수의 개수와 10과 100의 0의 갯수가 서로 같다는 것을 알 수 있다.
소수점 이하의 수의 개수가 1개인 경우에는 10에서 0이 1개
소수점이하의 수의 개수가 2개인 경우에는 100에서 0이 2개

[그림 Ⅳ-5] 소수점이하의 수의 개수와 0과 1사이를 등분하는 개수와의 관계 2.

V. 결론

본 연구는 본 연구자의 선행연구에서 나눗셈의 1차적 개념과 분수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아들이(김화수, 2014) 나눗셈과 분수의 1차적 개념을 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 구성 하여 초등학교 4학년에서 배우는 소수에 대한 학습 내용에 대하여 어떻게 접근을 하는지 연구 분석 하였다.

본 연구자는 초등학교에서 다루는 소수에 대해서 나눗셈과 분수, 그리고 소수의 1차적 개념을 바탕으로 연구대상자(영재아)들을 가르쳐 왔다. 연구 초반에 연구대상자(영재아)들은 나눗셈과 분수, 그리고 소수에 대한 1차적 개념을 개념 그 자체의 내용이 아닌, 나눗셈과 분수, 그리고 소수에 대한 문제를 예로 들어가면서 설명하는 것을 볼 수 있었고, 연구대상자(영재아)들 스스로도 개념을 설명할 때, 문제를 예로 들어가면서 설명하는 것을 당연하게 생각하고 있었다. 또한 "소수는 어떠한 개념들을 어떻게 구성하여 설명할 수 있을까"?란 질문에 연구대상자(영재아)들은 어리둥절해 하였고, 연구대상자(영재아)들 모두 개념의 구성 과정에 대해서는 아무 대답도 하지 못 하는 것을 볼 수 있었다. 이들은 개념의 본질에 대한 내용과 문제를 해결하는 방법을 동일시 해왔고, 자신의 생각이 담긴 수학보다는 외적인 다른 영향에 의해서 수동적으로 이루어진 수학을 보여 주었다. 그러나 1차적 개념을 바탕으로 한 연구가 진행되면서 연구대상자(영재아)들의 수학에 대한 태도가 달라지기 시작하였고, 한 가지 방법만을 외치고 멈추어 버리는 수학이 아닌, 계속해서 자신의 생각을 여러 가지 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 구성으로 이야기하는 능동적인 수학이 되어 가는 것을 볼 수 있었다.

무엇보다도 연구절차에서 제시한 학습전개 방식은 연구대상자들에게 소수의 1차적 개념에 대한 정확한 이해뿐만 아니라 본질은 변하지 않으면서 모양(형태)을 변화시킨 소수의 변형된 1차적 개념을 스스로 형성하여 나눗셈과 분수의 변형된 1차적 개념과 연결하여 소수를 분수로 분수를 소수로 나타내는 부분까지 해결하는 것을 볼 수 있었다. 또한 중학교 과정에서 학습하게 될, 유한 소수를 유리수로 나타내는 부분과 무리수의 의미까지 생각해 내는 것을 볼 수 있었다.

학생들은 자신이 알고 있는 모든 개념과 지식을 서로 연결하여 새로운 지식에 대해서 관계적 이해를 하려고 하며, 수학적 개념을 서로 연결하면서 스스로가 수학 원리에 대해서 알아가게 된다. 또한 학생 스스로가 수학적 개념의 연결을 통해 교사가 가르쳐 주는 것 보다 더 많은 것을 이해하고, 추론하고 통찰을 할 수 있다(NCTM, 2000). Hiebert와 Carpenter(1992)는 수학적 개념이 네트워크의 일부분이 되었을 때 그 내용을 이해한다고 보고 있다.

수학은 실제적인 문제에서 개념이나 아이디어를 얻어내어 이상화하고, 관련 있는 여러 개념들을 체계화하여 그 문제에 대한 가능한 해를 직관적으로 이끌어내는 동시에 그 예상을 연역적으로 증명하는 학문이다(이종희, 김부미, 2004). 그러므로 이해(관계적 이해)를 하기 위해서는 1차적 개념에 대한 학습이 필요하다. 1차적 개념에 대한 학습이 이루어졌을 때, 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 학습자 스스로가 다양하게 구성할 수 있으므로 수학적 문제해결에 도움을 줄 수 있기 때문이다. 수학적 문제 해결은 학습자가 이미 알고 있는 기초적인 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 다양한 내용을 문제 상황의 해결에 이르기 위해 종합적으로 활용하는 과정으로(방승진, 이상원, 황동주, 2002) 그 과정을 학습자가

직접 경험하고 구성했을 때, 오랫동안 장기기억이 되고 필요할 때, 언제든지 문제해결에 사용할 수 있는 것이다. 어떤 내용을 이해하는 것은 그 내용이 다른 내용들과 어떻게 관련되어있고, 연결되는지 아는 것이다(Hiebert et al., 1997). 본 연구의 연구 대상자(영재아)들은 나눗셈과 분수 그리고 소수의 1차적 개념을 바탕으로 형성된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 형성하여 소수점이하의 수의 개수와 0과 1사이를 등분하는 10의 거듭제곱 수의 0의 개수와 일치하는 것을 스스로가 발견하여 설명하는 것을 볼 수 있었다. 소수는 초등학교 3학년에서 귀납적으로 도입되고 있지만 중학교에서는 소수에 대한 정확한 정의가 없기 때문에 교과서별로 소수에 대한 암묵적인 정의가 다르게 나타나고 있다(박달원, 2007). 1차적 개념에 대한 학습은 2차적 개념과 3차적 개념, 그리고 고차원적 개념을 학습자 스스로가 형성할 수 있게 하고, 이미 형성된 2차적 개념과 3차적 개념, 그리고 고차원적 개념을 관계적으로 이해하는데 큰 역할을 한다. 그러므로 교사는 정확한 1차적 개념에 대한 연구를 하는 것이 무엇보다도 중요하다. 그리고 연구된 1차적 개념을 학생들에게 제공해 주어야 하며, 이로 인해 형성된 학생들의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 연구하여 다시 학생들에게 피드백을 주어 수학에 대한 구성능력과 관계적 이해를 할 수 있도록 하는 것이 무엇보다도 중요하다고 하겠다.

참고 문헌

고정일외 백과사전 편찬부 (2003). 파스칼 세계대백과사전. 서울: 동서문화사.

김화수 (2014). 수학의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 수학적 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구: 분수의 덧셈과 곱셈을 중심으로. 영재교육연구, 24(1), 17-43.

김화수 (2014). 나눗셈의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 분수의 나눗셈에 대한 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구. 영재교육연구, 24(3), 339-358.

라병소 (1999). 수학 학습에서의 관계적 이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구. 단국대학교 박사학위 논문.

박달원 (2007). 무한소수에 대한 학생들의 이해. 한국학교수학회논문집, 10(2), 237-246.

박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

방승진·이상원·황동주 (2002). 초등학교 수학 문제 해결 교육에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E<수학교육 논문집>, 14, 1-25.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

이종휘·김부미 (2004). 증명학습에서 생성-수렴 수업 모형의 개발과 적용. 한국학교수학회논문집, 6(1), 59-90.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics research and teaching (pp.65-100). NY: MacMillan.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Koichu, B., & Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to

solve geometry problems? Journal of Secondary Gifted Education. Vol. 16. 168-179.
NCTM (2000). Priciples and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Renzulli, J. S. (1986). The three ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davison (Eds.), conception of giftedness (pp. 246-279). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
Skemp, R. R. (1987). The Psychology of Learning Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey. 황우형 역(1998). 수학학습심리학. 서울: 민음사.

A Case Study on the Effects of the Primary Concepts of Division and Fraction upon Relational Understanding of Decimals

Kim, Hwa Soo[9]

Abstract

This study was conducted as a qualitative case study that explored how gifted 3rd grade elementary school children who had learned the primary concepts of division and fraction, when they studied contents about decimal, formed the transformed primary concept and transformed schema of decimal by the learning of accurate primary concepts and connecting the concepts. That is, this study investigated how the subjects attained relational understanding of decimal based on the primary concepts of division and fraction, and how they formed a transformed primary concept based on the primary concept of decimal and carried out vertical mathematizing. According to the findings of this study, transformed primary concepts formed through the learning of accurate primary concepts, and schemas and transformed schemas built through the connection of the concepts played as crucial factors for the children's relational understanding of decimal and their vertical mathematizing.

Key Words : Primary concepts, Transformed Primary concepts, Schema, Transformed schema

Received October 19, 2015
Revised December 13, 2015
Accepted December 24, 2015

9) Sehan University (hskim@sehan.ac.kr)

<부록>

학습내용(1)

나눗셈

1. 나눗셈은 어떠한 의미를 가지고 있을까요?
2. 나눗셈과 덧셈은 어떠한 관계가 있을까요?
3. 나눗셈과 뺄셈은 어떠한 관계가 있을까요?
4. 나눗셈과 곱셈은 어떠한 관계가 있을까요?
5. 나눔을 당하는 수와 나누는 수를 각각 무엇이라고 부를까요?
6. 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 포함이 되지 않을 때는 어떻게 해야 할까요?

학습내용(2)

분수

1. 분수란 무엇일까요?
2. 분수는 무엇이 발전이 되어서 만들어 졌을까요?
3. 분수를 계산하기 위해서는 제일 처음 해야 할 일은 무엇일까요?
4. 분수와 자연수는 무엇이 다를 까요?
5. 분수에서 분모는 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?
6. 분수의 덧셈을 할 때, 분모의 수를 같게 만드는 것은 왜일까요
7. 분수에서 분모를 같게 만드는 과정을 무엇이라고 할까요?
8. 분수의 분모를 같게 만든다는 것은 수학적으로 어떠한 뜻을 가지고 있을까요?

학습내용(3)

소수

1. 소수란 무엇일까요?
2. 소수의 1차적 개념의 의미는 변하지 않으면서 형태만 다른 변형된 1차적 개념을 만들어 보세요.
3. 소수점 이하의 수의 개수가 1개인 소수는 0과 1사이를 몇 등분해야 할 까요? 그리고 그 이유를 설명해 보세요.
4. 소수점 이하의 수의 개수가 2개인 소수는 0과 1사이를 몇 등분해야 할 까요? 그리고 그 이유를 설명해 보세요.
5. 소수점 이하의 수의 개수와 0과 1사이를 등분하는 개수는 어떠한 관계가 있을까요?
6. $\frac{3}{5}$은 어떤 수와 어떤 수 사이에 있는 수일까요?
7. $\frac{3}{5}$을 소수로 나타내 보세요. 그리고 그렇게 한 이유를 설명해 보세요.
8. 나눗셈과 분수와 소수는 어떠한 관계가 있는지 설명해 보세요.