한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술

J. Adv. Navig. Technol. 19(6): 574-580, Dec. 2015

시변 지연시간을 갖는 이산 구간 시스템의 안정조건

Stability Condition for Discrete Interval System with Time-Varying Delay Time

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do 461-701, Korea

[요 약]

본 논문에서는 상태변수에 시변 지연시간이 있는 선형 이산 구간 시스템의 안정조건을 고려한다. 고려한 시스템은 시스템 행렬과 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이 구간 행렬로 표현되며, 지연시간도 구간에 대하여 시변인 특성을 갖는다. 제안된 안정조건은 리아프노프 안정 이론에 의하여 유도되며 매우 간단한 부등식의 형태로 표현된다. 기존의 시불변 구간행렬의 안정성 문제를 시변 지연 시간을 갖는 시스템으로 확장한 것이다. 더불어, 새로운 안정조건은 시불변 경우에 대하여 연구된 기존 결과를 포함할 수 있으며, 구간 시변 지연 시간과 시스템의 안정성과의 연관관계를 나타내는 것이다. 제안된 조건은 구간시스템에 대한 교란 변수의 크기를 구하는 문제에도 응용될 수 있다. 수치예제를 통하여 새로운 안정조건의 효용성을 확인할 수 있으며, 기존에 발표된 결과들과의 비교도 이루어진다.

[Abstract]

The stability condition of linear discrete interval systems with a time-varying delay time is considered. The considered system has interval system matrices for both non-delayed and delayed states with time-varying delay time within given interval values. The proposed condition is derived by using Lyapunov stability theory and expressed by very simple inequality. Compared to previous results, the stability issue on the interval systems is expanded to time-varying delay. Furthermore, the new condition can imply the existing results on the time-invariant case and show the relation between interval time-varying delay time and stability of the system. The proposed condition can be applied to find the stability bound of the discrete interval system. Some numerical examples are given to show the effectiveness of the new condition and comparisons with the previously reported results are also presented.

Key word : Discrete interval system, Time-varying delay time, Sufficient condition, Stability.

http://dx.doi.org/10.12673/jant.2015.19.6.574

Received 13 October 2015; **Revised** 25 November 2015
Accepted (Publication) 9 December 2015 (30 December 2015)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

www.koni.or.kr pISSN: 1226-9026 eISSN: 2288-842X

Ⅰ. 서 론

지연된 상태변수를 갖는 이산시스템에 대한 안정조건은 지난 수 십 년간 많은 연구 결과가 발표되었다[1]-[7]. 최근의 연구결과에서는 리아프노프 방정식과[2]-[3] 리아프노프 함수를 이용한 선형부등식 형태의 안정조건이 시불변 지연시간 시스템에 대하여 제시되었다[5]-[7]. 또한, 불확실한 시스템을 표현하는 가장 보편적인 수학적 모델인 구간(interval) 행렬의 형태로 시스템 특성이 표현되는 이산시스템의 안정성도 많이 다루어졌다[8]-[14]. 이들 연구는 시스템의 행렬이 시불변인 경우에는 주로 고유치(eigenvalue)의 성질을 이용[9]-[13]하여 안정 조건이 유도되었으나, 구간시스템이 아닌 경우에 대하여 리아프노프(Lyapunov)안정 이론을 이용한 결과[7]에 비하여 한계가 있다. 고유치 성질을 이용한 기존의 결과들은 시불변 지연시간을 갖는 구간시스템에만 적용가능한 안정조건으로 스펙트랄 노름(spectral norm) [1],[7], 스펙트랄 반경(spectral radius) [9],[11],[13]과 특정한 행렬의 요소 값을 이용한 간단한 부등식 [10]의 형태로 표현된다.

본 논문에서는 기존에 주로 다루어진 시불변 지연시간을 갖는 구간시스템을 더욱 확장하여, 일정한 구간에서 지연시간이 시변인 복잡한 구간시스템에 대하여 리아프노프 이론을 이용하여 새로운 안정조건을 유도한다. 이는 양의 시변 선형 이산 구간 시스템에 대한 안정조건[14]을 일반적인 시불변 이산 구간 시스템으로 확장한 것으로, 유도된 조건은 지연시간 독립(delay-independent)인 조건으로 표현되며, 기존의 안정조건 [2]-[4],[7]에 비하여 매우 간단하게 표현된다. 또한, 시불변 지연시간에만 적용가능한 기존의 결과들[1],[6],[7],[13]을 포함하는 매우 강력한 조건이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 기존 결과를 요약하고 3장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하고, 4장에서는 기존 수치 예제[5],[12]에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 기존의 것과 비교한다.

Ⅱ. 기초 이론

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬 및 행렬방정식의 중요한 기존 이론을 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는 $R^{n\times m}$는 실수 행렬 요소를 갖는 $n\times m$ 행렬이며, $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|$: X^TX행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $A=[a_{ij}]$는 행렬 요소 값 a_{ij} 로 구성된 행렬. $|A|=[|a_{ij}|]$,$A\le_e B$는 행렬 요소별 부등식을 나타내며, $\lambda_{\max}(X)$는 행렬 X의 최대 고유치, $\rho(X)$ 는 $max|\lambda_i(X)|$,즉, 스펙트랄 반경(spectral radius), I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

다음과 같은 시불변 지연시간을 갖는 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&A\in[A^-,A^+]\subset R^{n\times n}\\&A^-\le_e A\le_e A^+(a_{ij}^-\le a_{ij}\le a_{ij}^+)\ \forall i,j\\&B\in[B^-,B^+]\subset R^{n\times n}\\&B^-\le_e B\le_e B^+(b_{ij}^-\le b_{ij}\le b_{ij}^+)\ \forall i,j\end{aligned} \tag{2}$$

여기서, 식 (1)은 일반적인 지연 이산시스템이며, (2)를 포함하면 구간시스템으로 고려한다. A는 $n\times n$차원의 상태행렬(state matrix), B는 $n\times n$차원의 지연 상태변수에 대한 상태행렬을 의미하며, 이들 행렬의 요소값은 정확히 알 수 없고 단지 동작조건에 따라 각 요소값의 하한값과 상한값에 따른 변동 범위만을 알 수 있다. 각 행렬의 구간행렬들을 이용하여 다음과 같은 행렬을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}&F=[f_{ij}],\ f_{ij}=\max(|a_{ij}^-|,|a_{ij}^+|)\ \forall i,j\\&G=[g_{ij}],\ g_{ij}=\max(|b_{ij}^-|,|b_{ij}^+|)\ \forall i,j\end{aligned} \tag{3}$$

구간시스템이 아닌 일반 시스템 (1)에 대한 안정 조건은 다양하게 제시되었으며, 최근에는 리아프노프 안정이론을 이용하여 안정조건을 유도한 결과도 발표되었다. 다음의 기존결과1의 안정조건은 고유치의 성질을 이용하여 유도되는 대표적인 안정조건이다. 이 조건은 구간행렬은 고려하지 않은 식(1)만을 만족하는 시스템에 대하여 적용되는 간단하고 유용한 안정조건이다.

기존결과1([1,7의 정리1],[6의 부연설명2.11]:식 (1)의 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정(asymptotically stable)하다.

$$\|A\|+\|B\|<1 \tag{4}$$

이외에도 많은 안정조건들이 다양한 형태로 제시되었으나, 위의 결과에 비교해 복잡한 과정을 갖는다.

다음의 기존결과2는 식(1)(2)의 구간행렬에 대한 안정조건을 식(3)을 이용하여 간단한 조건으로 유도한 결과이다.

기존결과2([9의 정리4]):식 (1)-(3)을 만족하는 구간 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\rho(F+G)<1 \tag{5}$$

본 논문에서는 다음과 같은 잘 알려진 정리를 사용한다.

보조정리 1([7,lemma 2.4]):임의의 벡터 x,y와 양의 상수 ϵ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^Ty \le \epsilon^{-1}x^Tx + \epsilon y^Ty \tag{6}$$

보조정리 2([15,491쪽]): $|X| \le_e Y$ 를 만족하는 정방행렬 X, Y 에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

a) $\rho(X) \le \|X\|$
b) $\rho(X) \le \rho(|X|) \le \rho(Y)$
c) $\|X\| \le \||X|\| \le \|Y\|$

보조정리 3([16,183쪽]): 선형시불변 시스템 $x(k+1) = Ax(k)$ 의 점근 안정성을 위한 필요충분조건은 임의의 양의 정칙행렬 $Q = Q^T > 0$ 에 대하여, $A^TPA - P = -Q$의 식을 만족하는 유일한 양의 정칙행렬 해 $P = P^T > 0$가 존재한다.

위의 보조정리를 사용하면, 식 (2)의 구간행렬 시스템에 대하여 기존 결과1,2를 따름정리1과 같이 적용할 수 있다.

따름정리 1: 식 (1)-(3)을 만족하는 구간 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\|F\| + \|G\| < 1$$

증명 : 보조정리 2의 c)성질을 이용하면 식 (3)에서 정의된 행렬 F, G는 구간행렬에 속한 모든 A, B에 대하여 $A \le_e F, B \le_e G$가 되어 가 $\|A\| \le \|F\|, \|B\| \le \|G\|$성립하고, $\|A\| + \|B\| \le \|F\| + \|G\|$이 만족한다. 따라서, 모든 A, B에 대하여 $\|F\| + \|G\| < 1$ 이 만족되면 $\|A\| + \|B\| < 1$의 조건이 성립된다. 또한, 보조정리2의 a)를 고려하면 따름정리1을 만족하는 구간시스템은 기존결과2도 만족하게 된다.

III. 주요 결과

본 논문에서는 위의 기존결과들과 같이 매우 간단한 형태의 안정조건을 시불변 지연시간이 아닌 구간을 갖는 시변 지연시간 시스템에 대하여 유도한다. 이를 위하여 다음과 같은 구간 시변 지연시간을 갖는 이산시간 구간시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d(k)) \\ &0 \le d_m \le d(k) \le d_M \; \forall k \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, A, B 는 식(2)에서와 같이 구간행렬로 표현된다. 식 (1)의 시불변 지연시간에 대한 시스템 식에 비해 위의 식 (7)은 두 시스템 행렬 A, B가 구간행렬임과 동시에 지연시간도 일정한 구간에서 시간에 따라 변동이 있는 것으로 고려한다. 이는 기존의 시스템 식(1),(2)을 $d_m = d_M$ 인 경우로 포함할 수 있는 보다 확장된 시스템이다.

식 (7)의 시스템에 대한 안정조건은 기존의 시불변 지연시간 경우에 적용된 고유치 이론을 이용한 방법으로는 얻어질 수가 없으며, 또한, 리아프노프 방정식의 해를 이용한 안정조건들을 바로 적용할 수 없다. 따라서, 본 논문에서는 리아프노프 이론을 적용하여 식 (7)의 시스템에 대하여 새로운 안정조건을 유도한다. 이를 위하여 리아프노프 함수를 [14]와 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &+ \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서, 대칭행렬 P, R은 양의 정칙행렬로 $P, R > 0$.

보조정리 4[14, 보조정리5]: 식(7)의 시스템은 식(8)에 정의된 리아프노프 함수에 대하여 다음의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &\le x^T(k)(A^TPA - P + (1 + d_M - d_m)R)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))(B^TPB - R)x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k))B^TPAx(k) \end{aligned} \tag{9}$$

정리 1: 식(2)와 식(7)를 민족하는 구간 이산시스템은 시스템 행렬 A이 점근안정하고, 즉

$$\rho(A) < 1 \tag{10}$$

하고 다음의 부등식을 만족하면 점근안정하다.

$$\begin{aligned} &(\|A\| + \sqrt{1 + d_M - d_m}\; \|B\|) \\ &\times \left(\frac{A^TA}{\|A\|} + \sqrt{1 + d_M - d_m}\, \frac{B^TB}{\|B\|}\right) < I_n \end{aligned} \tag{11}$$

증명: [14]에서와 같은 방법으로 임의의 $q > 0$ 을 이용하여 양의 정칙행렬 $Q = Q^T > 0$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} Q = q\Big(&\frac{\sqrt{1 + d_M - d_m}\; \|B\|}{\|A\|} A^TA \\ &+ \frac{(1 + d_M - d_m)\|B\| + \sqrt{1 + d_M - d_m}\, \|A\|}{\|B\|} B^TB\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

식 (11)의 가정과 위와 같은 행렬Q의 선택에 의하여 보조정리3 으로부터, $A^TPA - P = -Q$의 방정식을 만족하는 양의 정칙행렬 $P \in R^{n \times n}$가 존재함을 알 수 있다. 식(11)의 조건을 이용하면, 다음을 얻는다.

$$A^T(qI_n - P)A - (qI_n - P) = Q + qA^TA - qI_n$$

$$= q\left(\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}{\|A\|}A^TA + \frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TB + A^TA - I_n\right) = q((\|A\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|) \times (\frac{A^TA}{\|A\|} + \sqrt{1+d_M-d_m}\frac{B^TB}{\|B\|}) - I_n) = S < 0 \tag{13}$$

식 (13)와 보조정리 3에 의해, $A^T(qI_n - P)A - (qI_n - P) = S, S<0$ 의 방정식을 만족하는 $qI_n - P > 0$가 존재한다. 따라서, $qI_n - P > 0$ 이므로 $q > \lambda_{\max}(P)$ 됨을 알 수 있다.

보조정리1에 의해, 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 다음이 성립한다.

$$x_d(k) = x(k-d(k)) \\ 2x_d^T(k)B^TPAx(k) \le \epsilon^{-1}x^T(k)A^TPAx(k) + \epsilon x_d^T(k)B^TPBx_d(k) \tag{14}$$

식 (14)와 보조정리4를 이용하면 다음을 얻는다.

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \le x^T(k)(A^TPA - P + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}A^TPA)x(k) + x_d^T(k)((1+\epsilon)B^TPB - R)x_d(k) \tag{15}$$

임의의 양수 ϵ과 대칭행렬 R을 다음과 같이 정한다.

$$\epsilon = \frac{\|A\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|} \\ R = (1+\epsilon)B^TPB = \frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\| + \|A\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}B^TPB \tag{16}$$

식 (16)과 앞서 증명한 $q > \lambda_{\max}(P)$ 관계를 이용하면, 다음을 얻는다.

$$(1+d_M-d_m)R = \frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TPB \le \lambda_{\max}(P)\frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TB < q\frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TB \quad (\because q > \lambda_{\max}(P)) \tag{17}$$

따라서, 식(12),(16),(17)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \le x^T(k)(A^TPA - P + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}A^TPA)x(k) = x^T(k)(-Q + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}A^TPA)x(k) < x^T(k)(-q(\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}{\|A\|}A^TA + \frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TB) + q\frac{(1+d_M-d_m)\|B\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\|A\|}{\|B\|}B^TB + q\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}{\|A\|}A^TA)x(k) = 0 \tag{18}$$

그러므로, $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ 이 되어 시스템은 점근안정하다.

부연설명 1: 정리1의 결과는 [6]의 정리2.1의 결과와 유사한 형태이다. [6]에서는 시변 지연을 고려하지 않은 상태에서 다음과 같은 결과를 얻었다.

$$(\|A\| + \|B\|)(\frac{A^TA}{\|A\|} + \frac{B^TB}{\|B\|}) < I_n \tag{19}$$

이는 정리1에서 $d_M - d_m = 0$,즉 시불변 지연시간으로 두면, 동일한 부등식으로 표현된다. 따라서. 정리1의 결과는 [6]의 결과를 포함함을 알 수 있다. 주어진 조건을 보다 간략하게 하기 위하여 정리2를 유도한다.

정리 2: 다음의 부등식을 만족하면 시스템 (2),(7)은 안정하다.

$$\|A\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\| < 1 \tag{20}$$

증명: [14]의 증명과 같은 방법으로, 다음을 얻을 수 있다.

$$(\|A\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|) \times (\frac{A^TA}{\|A\|} + \sqrt{1+d_M-d_m}\frac{B^TB}{\|B\|}) \le (\|A\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|)^2 I_n \tag{21}$$

그러므로, $\|A\| + \sqrt{(1+d_M-d_m)}\ \|B\| < 1$ 를 만족하게 되면 정리1의 조건을 만족하게 되어 식 (2),(7)의 시스템은 안정하다.

위의 정리2의 조건은 시변 지연시간까지도 포함한 안정조건으로 매우 중요한 의미를 갖는다. 이와 더불어, 위의 식(20)의 조건은 그 간결함에 있어서도 시불변 지연시간 시스템에 대한 안정조건에 관한 기존의 부등식[5],[6]의 조건에 비하여 간단한 형태를 갖는다.

정리 3 : 식 (2)와 식 (7)을 만족하는 구간시스템은 다음의 부등식을 만족하면 안정하다.

$$\|F\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\,\|G\| < 1 \qquad (22)$$

증명: $|A| \le_e F, |B| \le_e G$ 이므로 보조정리 2를 이용하면 $\|A\| \le \||A|\| \le \|F\|, \|B\| \le \||B|\| \le \|G\|$ 이므로 식 (22)를 만족하면 식 (2)를 만족하는 모든 A,B 에 대하여 $\|A\| + \sqrt{1+d_M-d_m}\,\|B\| < 1$ 을 만족한다.

위의 결과는 시불변 지연시간에 대한 기존결과인 따름정리1의 결과를 포함하는 더욱 일반적인 결과이다. 즉, 지연시간 구간에 해당되는 $1+d_M-d_m$ 항이 안정조건 부등식에 포함되어 시변 지연시간이 안정에 미치는 영향을 고려할 수 있다. 기존의 결과에서는 정리3과 같은 간단한 형태로 시변 지연시간의 영향을 표시한 결과가 발표된 바 없다. 새로이 제시된 안정조건에서 시변 지연시간 범위가 안정성에 미치는 영향이 제곱근에 비례한다는 사실은 시변 지연시간에 대한 개략적인 안정해석에 도움이 될 것이다.

다음 장에서는 제안된 안정조건들이 기존의 예제에서 다루어졌던 구간시스템에 적용한 결과를 설명한다.

Ⅳ. 예 제

본 장에서는 기존 문헌의 2개 예제를 중심으로 제안된 조건을 비교한다.

예제 1 [12]: 식 (1),(2)과 같이 표현되는 시스템을 고려한다

$$A^- = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad (23)$$
$$B^- = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$$

여기서, 다음의 행렬을 구할 수 있다.

$$F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}$$

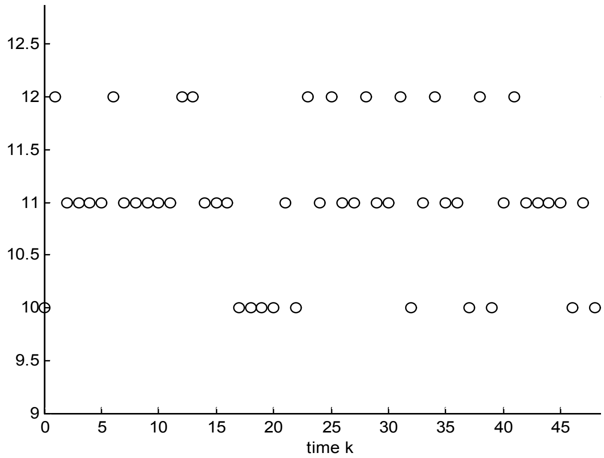
정리 3의 조건을 시불변인 경우인 $d_M - d_m = 0$로 적용하면, $\|F\| + \|G\| = 0.7233 < 1$가 되어 안정함을 확인할 수 있다. 이를 시변 지연시간인 $d_M - d_m = 2$ 인 경우에 대하여 적용하면, $\|F\| + \sqrt{3}\,\|G\| = 0.9921 < 1$ 이 되어 이 경우에도 안정함을 알 수 있다. 다음의 그림1은 위의 시스템에 대하여 $d_M = 12, d_m = 10$, 초기조건이 $x(k) = [1\ -1]^T, k = -d_M, -d_M+1, \ldots, 0$ 인 경우에 구간에 속한 행렬 A,B를 아래와 같이 무작위로 선택하여 시간에 따른 지연시간과 이에 따른 상태변수 출력을 도시한 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.0299 & 0.0536 \\ 0.0477 & 0.0758 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1296 & 0.1152 \\ 0.1424 & 0.2392 \end{bmatrix}$$

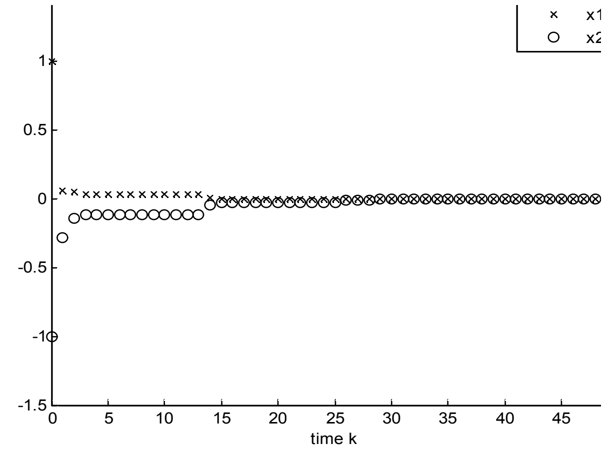
예제 2 [5]: 다음과 같이 시불변 변수 α, γ 에 의하여 구간행렬의 범위가 결정되는 경우를 고려한다. 이 예제는 시불변 지연에 대하여 안정성을 유지할 수 있는 γ 변수의 범위를 구하는 예로 [5]에서 사용되었다.

$$A^- = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & \alpha \end{bmatrix}$$
$$B^- = -\gamma \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \gamma \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \gamma > 0$$

$\alpha = 0.5$ 인 경우에 $F = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ 이며 안정조건은 $\|F\| + \gamma\|G\| < 1$ 이 되어, γ 값의 범위를 $\gamma < (1-\|F\|)/\|G\| = 1.0574$ 로 구할 수 있다.



(a) 지연시간



(b) 상태변수 궤적

그림 1. $d_M = 12, d_m = 10$인 시변 지연시간에 대한 구간시스템 시간특성

Fig. 1. Time repsonse of interval system with time-varying delay time ($d_M = 12, d_m = 10$).

마찬가지로, $\alpha=0.15$인 경우에는 $F=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & 0.15\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$ $\gamma<(1-\|F\|)/\|G\|=1.6352$ 가 된다

[5]에서는 구간시스템을 고려하지 못하고, 일반적인 시스템 (1)을 $\alpha=0.15, A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & -0.15\end{bmatrix}$, $\alpha=0.5, A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\0.1 & 0.5\end{bmatrix}$, $B=\gamma\begin{bmatrix}0.3 & 0\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$로 고려하여 γ의 최대범위를 유사 리아프노프 방정식의 해를 이용하여 2.09, 1.51로 계산하였다. 이에 비해 제안된 조건을 이용한 1.6352,1.0574는 보수적인 범위를 제공한다. 그러나, [5]의 결과가 구간시스템에 속한 특정한 하나의 시스템에 해당되므로, 구간시스템 전체에 대하여 안정성을 보장하는 범위를 계산한 본 논문의 결과와 비교하면 [5]의 결과가 더 크게 계산되는 것은 당연한 것으로 생각할 수 있다.

본 논문에서 제안된 조건을 사용하면 이와 같이 구간시스템의 안정조건을 만족하도록 하는 특정 변수의 크기를 구하는 문제도 쉽게 해를 구할 수 있으며, 그 결과도 양호함을 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 지연 이산시스템에서 두 개의 시스템 행렬들이 구간행렬로 표현되고, 지연시간도 시변으로 구간범위 내에서 변하는 시스템의 안정조건을 다루었다. 본 논문에서는 기존의 시불변 지연시간에 대한 구간시스템의 안정조건을 시변 지연시간의 경우로 확대하였으며, 시불변에 대한 안정조건들을 포함하는 효과적인 안정조건을 새롭게 제안하였다. 제안된 안정조건은 매우 간단한 수식이며, 예제를 통하여 편의성과 다양한 안정해석이 가능함을 보였다. 새로운 안정조건이 안정성 판단에 있어 탁월한 수월성을 제공할 수 있고, 데이터 전송 지연이 있는 통신 시스템과 구간시스템의 안정성 판별 조건으로 활용될 수 있으리라 기대한다.

참고 문헌

[1] T. Mori, N.Fukuma and M.Kuwahara, "Delay-independent stability criteria for discrete-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 27, No. 4, pp. 964-966, 1982.

[2] D. Debeljković and S.Stojanović, "The stability of linear discrete time delay systems over a finite time interval: an overview," *Scientific Technical Review,* Vol. 61, No. 1, pp. 46-55, 2011.

[3] D. Debeljković, "Further results on stability of linear discrete time delay systems," *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 2, pp. 48-59, 2010.

[4] J. Liu and J. Zhang, "Note on stability of discrete-time time-varying delay systems," *IET Control Theory & Applications,* Vol. 6, No. 2, p. 335, 2012.

[5] S. Stojanovic, D. Debeljkovic and I. Mladenovic, "Simple exponential stability criteria of linear discrete time-delay systems," *Serbian Journal of Electrical Engineering,* Vol. 5, No. 2, pp. 191-198, 2008.

[6] C. H. Lee, T.-L. Hsien and C.-Y. Chen, "Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation," *Innovative Computing, Information and Control (ICIC Express Letters,* Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, 2011.

[7] D. L. Debeljković and S. Stojanović, "The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview," *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, 2010.

[8] N. S. Rousan and K. Jordan, "Stability of square interval matrices for discrete time systems," *Engineering of Journal of the Universityof Qatar*,Vol.14, pp.127-135, 2001.

[9] C. H. Lee and T. L. Hsien, "New sufficient conditions for the stability of continuous and discrete time-delay interval systems," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 334B, No. 2, pp. 233-240, 1997.

[10] P. Liuy, "Stability of continuous and discrete time-delay grey systems," *International Journal of Systems Science,* Vol. 32, No. 7, pp. 947-952, 2001.

[11] P. L. Liu and W.-J. Shyr, "Another sufficient condition for the stability of grey discrete-time systems," *Journal of the Franklin Institute,* Vol. 342, No. 1, pp. 15-23, Jan. 2005.

[12] J. Fang Han, J. Qing Qiu and J. Hua Zhai, "Stability analysis for perturbed discrete dynamic interval systems with time delay," in *Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC 2007)*, Kumamoto: Japan, pp. 587-587, Sep. 2007.

[13] J. Fang Han, H. Zhu Tian and Z. Y. Meng, "Criteria for robust stability of discrete-time dynamic interval systems with multiple time-delays," in *Proceedings of the Ninth International Conference on Machine Learning and Cybernetics,* Qingdao: China, pp. 11-14, 2010.

[14] H. S. Han, "New stability conditions for positive time-varying discrete interval system with interval time-varying delay time," *Journal of Korea Navigation Institute,* Vol. 18, No. 5, pp. 501-507, Oct. 2014.

[15] R. A. Hornand and C. R. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1985.

[16] Z. Gajić and M. Lelić, *Modern Control Systems Engineering*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, pp. 179-183, 1996.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 건실제어, 센서 응용 시스템