韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.4.525
2014. 11. 제 53권, 제 4호, 525–539.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2014, Vol. 53, No. 4, 525–539.

초등학교 6학년 학생들의 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식과 수학적 정당화 수준

김희진(Maryland University)
김성경(울산중앙고등학교)
권종겸(경북대학교 대학원)†

Ⅰ. 서론

수학교육의 목적은 수학 지식과 기능을 익힘으로써 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기르며 현상을 수학적으로 고찰하고 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기르는 것이다(교육과학기술부, 2011). 모든 수준의 학생들이 수학적 사고를 바탕으로 의사소통할 수 있고 문제 상황을 분석할 수 있으며, 또한 자신의 생각을 수학적 언어로 표현하고 더 나아가 수학 명제를 증명할 수 있도록 학습 기회를 제공해야 한다. 학생들이 수학적으로 사고하기 위해서는 자신의 생각이 왜 옳은지를 교사와 다른 학생들에게 설명할 수 있는 수학적 정당화를 배울 필요가 있다.

전통적으로 증명은 수학 명제가 참임을 입증하고, 수학자들이 연역적 공리 체계를 이해하고 새로운 정리를 만들어 낼 수 있도록 한다(De Villers, 1990). 수학자들은 수학의 개념을 명확하게 정의하고, 주장하는 것을 분명하게 정리로 나타내며, 이 정리를 엄격하게 증명한다. 그러나 학생들이 수학적으로 엄밀하게 증명하기는 쉽지 않다. 수학적 정당화와 증명의 중요성에도 불구하고 학생들은 증명에 대해서 어려움을 느끼고 있으며, 실제로 증명을 하는 과정에서 엄밀한 연역적 정당화를 하지 못하고 있다(Fischbein & Kedem, 1990; Usiskin, 1987). 한편 Piaget는 초등학생은 구체적 조작기이므로 연역적 정당화가 어렵다고 보고, 형식적 조작기에 있는 중학생 이상의 학생들에게 연역적 정당화가 가능하다고 본다(우정호, 2011).

그러나 초등학생들도 연역적 사고가 충분히 가능하기 때문에 초등학생들에게 연역적인 정당화에 대한 지도가 가능하다는 주장들이 제기되었고 초등학생들을 대상으로 정당화 연구를 하여 연역적 정당화에 대한 지도의 가능성을 보이고 있다(서지수, 류성림, 2012; 김정하, 2010). 그리하여 최근 연구들(김정하, 2010, 2011; 최수미 & 정영옥, 2010; Harel & Sowder, 1998; Marrades & Gutierrez, 2000)은 학생들의 엄밀한 수학 증명 능력을 향상시키는 것보다 학생들이 수학 증명을 이해할 수 있도록 돕고 수학 증명에 대한 학생들의 이해 능력을 향상시킬 수 있는 방법에 관심을 가진다. 그런 의미에서 증명의 확장된 개념으로 수학적 정당화를 생각할 수 있다. 수학적 정당화는 자신이 주장하는 것이 옳다는 것을 보일 수 있고 다른 사람에게 그 주장이 참임을 논리적으로 설명할 수 있기 때문에 필요하다. 또한 학생들이 다양한 방법으로 수학적 정당화를 경험하면 정당화의 필요성을 인식할 수 있을 뿐 아니라 증명에 대한 이해 능력을 키울 수 있을 것이다.

이러한 연구의 일환으로 김정하(2010)는 수학적 정당화의 인식과 단계를 알아보기 위해 초등학교 6학년 449명을 대상으로 한 설문을 통하여 학생들은 대체로 자신을 확신시키기 위해 정당화를 하며, 대수 영역에서는 경험적·귀납적 정당화의 단계의 학생들이 많고, 기하 영역에서는 형식적 정당화를 하는 학생이 많았다는 결과를 얻었다. 그리하여 초등학교 6학년 학생들도 충분히 연역적 사고가 가능하며, 연역적이고 형식적 정당화의 지도

* 접수일(2014년 10월 14일), 수정일(2014년 11월 13일), 게재확정일(2014년 11월 18일)
* ZDM분류 : E52
* MSC2000분류 : 97E50
* 주제어 : 초등학교 6학년, 수학적 정당화, 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식, 수학적 정당화 수준
† 교신저자

가 가능하다고 한다. 수학적 정당화의 단계를 알아보기 위한 설문지에서 각 문항을 선다형으로 제시하여 학생 자신이 옳다고 생각하는 것을 모두 선택하게 하고 여러 개를 선택하였을 때 그 중 가장 높은 단계의 수학적 정당화를 그 학생의 수학적 정당화의 단계로 결정하였다. 그러나 이와 같이 선다형을 이용하는 방식으로는 학생들의 정당화에 대한 인식과 정당화 수준을 정확하게 밝혀내기 어렵다는 한계점이 제기될 수 있다. 왜냐하면 학생들이 연구자가 제시하는 보기 중 특정 수준의 정당화를 선택했다고 해서 그 학생이 실제로 스스로 해당 수준의 정당화를 끌어낼 수 있는지 확신하기 어렵기 때문이다.

이에 본 연구는 김정하(2010)의 연구 결과에 대한 의문점을 해결하기 위하여 선택 보기를 제시하지 않고 학생들이 직접 자신의 정당화 과정을 기록하는 개방형 문항을 활용하여, 초등학교 6학년 학생들이 수학적 정당화의 필요성에 대하여 어떻게 인식하는지와 그들의 정당화 수준은 어떻게 나타나는지 살펴보고자 한다. 이렇게 함으로써 이 연구에서는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 정당화에 대한 인식을 조사하여 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 지향하는 '교과 내용의 이해와 의사소통'으로서의 수학적 정당화와 현재 학생들이 인식하는 수학적 정당화의 필요성을 비교하고자 한다. 그리고 대수 영역과 기하 영역에 대한 학생들의 정당화 수준을 분석하고 학생들의 학업성취도에 따른 정당화 수준을 비교함으로써 정당화 지도 방안에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 정당화(Mathematical Justification)

수학적으로 사고할 때 어떤 진술에 대해서 자신을 확신시키기 위해서는 왜 참인지를 생각하면 되지만 친구를 확신시키려면 자신의 주장을 더욱 일관성 있게 조직해야 하고, 나아가 자신의 주장을 반대하는 사람을 설득하려면 상대의 비판에 대처할 수 있도록 자신의 생각을 명확하게 정리해야 하는데, 수학적으로 사고한다는 것은 결국 증명 개념을 획득하는 것이다(Tall, 2003). 증명은 어떤 주장이 참이라는 것을 논리적으로 보여주는 과정으로, 자신이 발견한 사실이나 문제해결과정에서 거짓이 있는지를 확인하는 방법이고 나아가 자신의 주장에 대해서 다른 사람을 설득하는 수단이 된다. 초등학생들이 증명의 개념을 획득한다는 것은 증명의 넓은 의미로 수학적 정당화의 개념을 획득하는 것으로 볼 수 있다. 그리고 이후에 중고등학교에서 보다 엄밀한 증명의 개념을 획득하게 된다.

수학적 정당화는 적절한 논리에 의해 자신 또는 다른 사람에게 어떤 주장이 참임을 확신시키는 과정으로써, 수학적 정당화는 어떤 명제의 진위나 자신의 해결 방법에 대해 자신을 확신시키는 과정으로서의 개인적 측면과 추측이 참임을 보이기 위해 다양한 표현 방법을 이용하여 근거를 개인적인 논거 형식으로 제시하는 논리적 측면과 수학공동체를 설득시키고 확신시키기 위한 의사소통의 과정으로서의 사회적 측면이 있다(김정하, 2010; 홍선미, 2013). 즉 수학적 정당화에는 개인적 측면, 사회적 측면, 논리적 측면이 모두 포함되어 있다. Harel & Sowder(2007)는 수학적 정당화를 '증명 스킴'이라 한다. 증명 스킴은 진실이 불확실한 개인의 추측 또는 사실을 확인하는 주장이며 개인 또는 사회 공동체에 의하여 주장의 진실에 대한 의심을 제거하는 과정이거나 다른 사람의 의심을 제거하는 과정이다. Harel & Sowder의 증명 스킴은 김정하의 수학적 정당화의 정의의 개인적 측면, 논리적 측면과 사회적 측면을 의미를 내포하고 있다.

2. 수학적 정당화의 수준

Harel & Sowder(2007)는 수학적 증명 스키마를 외부적 확신에 의한 증명 스키마, 경험적 증명 스키마, 연역적 증명 스키마로 분류한다. Harel & Sowder의 수학적 증명 스키마의 분류를 정리하여 [표 1]과 같이 만들었다.

첫째, 외부적 확신에 의한 증명 스키마는 권위적 증명 스키마, 의식적인 증명 스키마, 비참조적 증명 스키마로 구분된다. 권위적 증명 스키마는 교사나 책과 같은 권위에 의존하는 것이고, 의식적인 증명 스키마는 증명이 서술되는 형식에 치중하는 것이며, 비참조적 기호 증명 스키마는 기호와 연산에 대해 관련 논리가 없고 일관성 없이 증명하는 증명 스키마이다.

둘째, 경험적 증명 스키마는 귀납적 증명 스키마와 지각적 증명 스키마로 구분된다. 귀납적 증명 스키마는 하나 또는 그 이상의 예를 이용하는 증명 스키마이고,

[표 1] Harel & Sowder(2007)의 수학적 증명 스키마의 분류
[Table 1] Harel & Sowder(2007)'s tadonomoy of proof schemes

구분	유형
외부적 확신에 의한 증명 스키마	권위적 증명 스키마
	의식적인 증명 스키마
	비참조적 기호 증명 스키마
경험적 증명 스키마	귀납적 증명 스키마
	지각적 증명 스키마
연역적 증명 스키마	변형적 증명 스키마
	공리적 증명 스키마

지각적 증명 스키마는 엄밀한 증명이 아닌 이해를 목적으로 명제와 관련된 그림을 그리고 그 그림을 분석하는 증명 스카마이다.

셋째, 연역적 증명 스키마는 변형적 증명 스키마와 공리적 증명 스키마로 구분된다. 변형적 증명 스키마는 일반화, 조작적인 사고, 논리적인 추론을 이용하여 증명을 한다. 공리적 증명 스키마는 변형적 증명 스키마의 세 가지 특성인 일반화, 조작적인 사고, 논리적인 추론을 이용하여 증명하는 것뿐만 아니라 공리의 원리를 받아들이고 증명 과정의 원리도 이해할 수 있는 스키마를 포함한다.

한편, 김정하(2010)는 수학적 정당화의 6단계를 [표 2]와 같이 제시하였고, 각 단계에 대해 살펴보면 다음과 같다. 0단계는 정당화가 나타나지 않는 단계로 무응답을 한 경우 또는 의미 없는 것을 쓰거나 그린 경우이다. 1단계는 책이나 교사의 권위를 이용하는 외적 확신에 의한 정당화의 단계이다. 2단계는 구체적인 예를 이용하여 정당화를 시도하는 경험적·귀납적 정당화의 단계이다. 예를 이용하여 그 사이의 일반적인 속성을 찾아내거나 감각적, 활동적으로 직접 해 봄으로써 정당화를 시도하는 경우이다. 3단계는 포괄적 예에 의한 연역적 정당화로서, 대표적인 예를 사용하여 연역적인 사고 방법으로 설명하는 경우이다. 4단계는 학교 수학에서 인정된 형식에 따라 연역적으로 증명을 하는 단계로 3단계와 5단계를 구분하기 위해 단순 연역적 정당화라고 한다. 마지막으로 5단계는 어떤 인정된 형식에 따라 논증하는 것으로 엄밀한 수학적 증명을 시도하는 형식적·이론적 정당화의 단계이다. 이 단계는 많은 지식과 형식을 요구하기 때문

[표 2] 수학적 정당화의 단계(김정하, 2010, p29)
[Table 2] Steps of mathematical justification(Kim, 2010, p29)

단계	유형	
0	정당화 없음	
1	외적 확신에 의한 정당화	1A. 권위적 정당화 1B. 관습적 정당화 1C. 기호적 정당화
2	경험적·귀납적 정당화	2A. 지각적·활동적 정당화 2B. 평범한 예에 의한 정당화 2C. 결정적 예에 의한 정당화
3	포괄적 예를 통한 연역적 정당화	3A. 포괄적 예에 의한 정당화 3B. 시각적 예에 의한 정당화
4	단순 연역적 정당화	4A. 식의 조작에 의한 정당화 4B. 단순 연역적 정당화
5	형식적·이론적 정당화	5A. 가설 연역적 정당화 5B. 형식적 정당화

에 초등학생들에게는 나타나지 않는 정당화라고 할 수 있다.

Harel & Sowder(2007)의 외부적 확신에 의한 증명 스키마와 경험적 증명 스키마는 각각 김정하(2010)의 외적 확신에 의한 정당화와 경험적·귀납적 정당화와 유사하다. 그리고 김정하(2010)는 연역적 정당화를 세 가지로 세분하고 있는데, 포괄적 예를 통한 연역적 정당화는 Harel & Sowder의 변형적 스키마와 유사하며 이 단계를 연역적 정당화로 가는 중간 단계로 보고 있다. 김정하(2010)의 형식적·이론적 정당화는 Harel & Sowder(2007)의 공리적 증명 스키마와 유사하다. 이에 본 연구는 Harel & Sowder(2007)와 김정하(2010)의 연구들을 근거로 하지만, 초등학교 수학 교육과정에서 학생들은 형식적으로 엄밀하게 증명하는 것을 배우지 않으므로 단순 연역적 정당화와 형식적 이론적 정당화를 합쳐 연역적 정당화로 보고, 수학적 정당화의 수준을 5단계로 구분하여 분석하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구는 두 개의 초등학교에서 연구에 협조적인 담임교사들의 학급들을 대상으로 D광역시 소재의 A초등학교에서 6학년 4개 반 중 3개 반의 학생 74명, U광역시 소재의 B초등학교에서 6학년 6개 반 중 5개 반 학생 98명으로 하였다. 그리고 검사지를 백지로 제출한 A초등학교 학생의 답안 2개를 분석대상에 제외하였다.

2. 검사도구

본 연구의 검사 도구는 초등학생의 수학적 정당화에 관하여 알아보기 위해 수학적 정당화 인식에 관한 문항 1개와 내용영역과 관련된 문항 4개로 구성하였다. 검사도구의 5개 문항은 [표 3]과 같이 1번은 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식에 대한 문항이고, 수학적 정당화의 수준을 알기 위해서 문항 2와 3은 대수 영역의 문제와 문항 4, 5번은 기하 영역의 문제로 구성되었다. 본 검사의 검사문항은 김정하(2010)의 문항을 개방형 문항으로 바꾸어 사용하였다.

3. 자료수집

A초등학교와 B초등학교의 담임교사들을 직접 만나 연구의 의도를 설명하였고 학생들이 자신의 생각을 충분히 기술할 수 있도록 지도해줄 것을 당부했다. 검사는 두 개 초등학교 모두 수업 시간에 담임교사의 지도 아래 40분 동안 이루어졌고, 검사이후 결과지는 연구자들이 직접 회수하였다.

4. 검사 분석틀

1) 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식의 분석틀

학생들의 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식은 김정하(2010)연구를 바탕으로 정당화의 개인적 측면, 사회적 측면, 논리적 측면으로 분류하였다. 수학적 정당화에 대한 인식의 분석틀은 [표 4]와 같다. '문제를 틀리지 않기 위해서'와 같이 문제 풀이나 답을 확인하기 위해서라고 응답하면 자신의 해결 방법에 대해 자신을 확신시키는 과정으로서의 개인적 측면으로 분류하였다. '친구와 선생님에게 설명하기 위해서' 또는 '다른 사람과 의견을

[표 3] 수학적 정당화 검사도구
[Table 3] Test for mathematical Justification

영역	번호	문항
수학적 정당화의 필요성에 대한 인식	1	수학문제를 풀면서 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지를 다시 확인해 보는 것이 왜 필요할까요?
대수영역	2	'홀수+홀수=짝수'라는 것이 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?
	3	'연속한 세 자연수를 곱하면 6의 배수가 된다.'는 것이 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?
기하영역	4	'사각형의 내각의 크기의 합은 360도이다.'가 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?
	5	'두 직선이 만나면 마주보는 각의 크기는 같다'가 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?

[표 4] 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식 분석틀
[Table 4] Awareness of necessity for mathematical Justification

수학적 정당화의 필요성에 대한 인식	설명
개인적 측면	자신의 풀이나 답이 맞는지 확인하기 위해서라고 답하는 경우
사회적 측면	다른 사람이 이해하거나 설득하기 위해서 또는 친구나 교사와 의견을 나누기 위해서와 같이 답하는 경우
논리적 측면	자신이 알고 있는 것을 정리한다는 것과 같이 지식의 체계화에 대해서 답하는 경우
무응답	문항에 어떤 응답도 하지 않은 경우

[표 5] 수학적 정당화 수준 분석틀
[Table 5] Levels of mathematical Justification

수준		설명
0	정당화 없음	정당화가 없는 경우
1	외적 권위에 의한 정당화	권위 있는 사람이나 자료를 통해 근거를 제시
2	경험적 정당화	특정한 예들을 통해 정당화를 제시
3	포괄적 정당화	포괄적 예들을 통해 연역적 정당화를 표현
4	연역적 정당화	특정한 예에 의존하지 않고 연역적인 논증을 제시

나누기 위해서' 등과 같이 응답을 하면 다른 사람을 설득시키고 확신시키기 위한 의사소통의 과정으로서의 사회적 측면으로 분류하였다. 초등학생들의 표현 수준을 고려해 '자신이 알고 있는 것을 정리하여 다음에 안 틀리게 위해서'와 같은 응답들을 지식을 체계화하는 수학적 정당화의 측면이 논리적 측면으로 분류하였다.

2) 수학적 정당화 수준의 분석틀

학생들의 수학적 정당화 수준을 분석하기 위하여 선행연구를 바탕으로 분석틀을 마련하였다. 수학적 정당화 수준에 대한 분석틀은 [표 5]와 같다. 무응답이거나 문제를 잘못 이해하였거나 틀린 경우는 0수준의 정당화 없음으로 하였다. '책에서 읽었다'거나 '선생님이 그렇게 가르쳐 주셨다' 등과 같이 권위 있는 사람이나 자료를 통해 정당화를 제시하는 경우는 1수준의 외적 권위에 의한 정당화이다. 구체적인 수나 도형들을 예로 들어 제시하는 경우는 2수준의 경험적 정당화로 분석하였다. 3수준의 포괄적 정당화는 4수준의 연역적 정당화에는 미치지 못하고 특정한 예들로부터 좀 더 일반적이고 포괄적으로 정당화를 제시하는 경우이다. 4수준의 연역적 정당화의 수준은 특정한 예에 의존하지 않고 연역적으로 증명을 제시하는 경우로 하였다. 이 연구의 대상들은 초등학생이므로 문자를 말이나 기호 등으로 표현한 것을 고려하였다.

수학적 정당화의 필요성의 인식과 수준의 분석에서 경계가 모호한 것들은 연구자들이 모여 합의하여 분석하였고, 정당화의 수준에 대한 문제에서 학생이 여러 수준으로 응답한 경우는 그 수준들에서 가장 높은 것으로 하였다.

5. 자료 분석

먼저 문항에 따른 수학적 정당화 수준의 예를 구체적으로 논의하는 과정을 거친 후, 1명의 연구자가 먼저 학생들의 검사지를 분석하였고, 논의가 필요한 사례의 경우 연구자들이 함께 논의한 후 다시 분석하였다.

1번 문항은 정당화의 필요성에 대한 인식과 관련된 문항이므로 [표 4]의 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식 분석틀에 따라 분석하였고, 2번 문항부터 5번 문항까지는 내용영역으로 [표 5]의 수학적 정당화 수준의 분석틀에 따라 분석하였다. 내용영역의 각 문항에 대해서 0

[표 6] A초등학교와 B초등학교의 수학적 정당화 검사 점수 차이 검정
[Table 6] Difference between 2 elementary schools on mathematical Justification

학교	사례 수	평균	표준편차	t	유의확률(양쪽)
A	72	5.47	2.432	1.388	0.167
B	98	4.94	2.507		

수준의 답안은 0점, 1수준의 답안은 1점, 2수준의 답안은 2점, 3수준의 답안은 3점, 4수준의 답안은 4점으로 부여하였다.

그리고 내용 영역에 따른 학생들의 수학적 정당화 수준에 차이가 있는지 분석하기 위하여 빈도분석 및 χ^2-검정을 실시하였다. 또한 학업성취수준에 따라 학생들의 수학적 정당화 수준에 차이가 있는지 알아보기 위해 일원분산분석(ANOVA)을 실시하였다. 각 문항에 대한 빈도분석을 통하여 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식과 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준을 문항별로 분석하였다.

6. 수학학업성취도에 따른 집단 분류

학생들의 수학학업성취도에 따른 정당화 수준을 비교하기 위하여 A초등학교와 B초등학교의 학생들을 수학학업성취도에 따라 세 집단 즉, 상수준, 중수준, 하수준의 집단으로 구분하였다. 집단을 구분하는 데 동일한 기준을 적용하기 위하여 두 학교의 학력 수준에 대한 정보를 수집하였다. A초등학교의 경우는 2012학년도 국가수준학업성취도 평가 수학과목에서 보통학력 이상 82%, 기초학력 16.4%, 기초학력미달 1.6%라는 정보를 제공받았으나, B초등학교의 수준에 대한 정보를 제공받지 못하였다.

그리하여 두 초등학교의 수준을 수학적 정당화 검사 점수를 이용하여 살펴보고자 하였다. 두 초등학교 학생들의 수학적 정당화 수준에 차이가 있는지를 알아보기 위해서 검사지에서 정당화 인식에 대한 1개 문항을 제외하고 내용 영역과 관련된 4개 문항(2, 3, 4, 5번)들을 사용하여 평균에 대한 t-검정을 실시하였다. 각 문항을 4수준으로 구분함에 따라 4점 척도로 나타내었으므로 16점을 만점으로 간주하였을 때, A초등학교는 평균은 5.47, B초등학교는 4.94이다. 두 초등학교 학생들의 내용 영역에 대한 기술통계 및 t-검정 결과는 [표 6]과 같다. 두 초등학교 학생들은 수학적 정당화 수준에서 유의수준 0.05에서 통계적으로 유의미한 차이가 없는 것으로 분석되었다. 이러한 결과로부터 두 초등학교 학생들의 정당화 수준이 유사한 것으로 간주하였다.

그리하여 본 연구에서 수학학업성취도에 따른 학생들의 수준을 구별하기 위해 각 학교에서 실시한 1학기 수학 기말고사 성적을 사용하였다. 각 초등학교에서 실시한 1학기 기말고사 성적을 기준으로 상위 25%의 학생들을 상수준, 중간의 50%의 학생들을 중수준, 하위 25%의 학생들을 하수준으로 구분한 다음, 두 개의 학교에서 같은 수준인 학생들을 묶어서 결과를 분석하였고, 학업성취도에 따라 집단을 분류하면 [표 7]과 같다.

[표 7] 수학학업성취도에 따른 집단 분류
[Table 7] The classification of the group on mathematical achievement

수학학업성취수준	학교	학생수	학생 수(%)
상수준	A	18	43(25.3)
	B	25	
중수준	A	36	84(49.4)
	B	48	
하수준	A	18	43(25.3)
	B	25	
합 계			170(100)

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

초등학교 6학년 학생들을 대상으로 실시한 수학적 정당화 인식(1번)과 수준(2, 3, 4, 5번)에 대한 검사 결과를 살펴보고자 한다.

1. 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식에 대한 결과

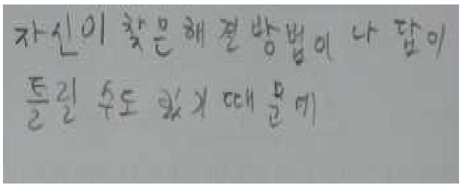
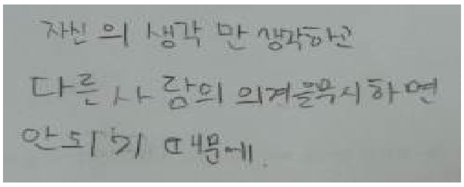
[표 8]은 1번 문항인 학생들의 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식의 결과이다. 김정하(2011)의 연구에서 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식의 개인적 측면은 78.6%, 사회적 측면 7.6%과 논리적인 측면은 14.8%의 비율로 나왔다. 이는 선다형 문항으로 제시한 선행연구와 달리 본 연구에서는 학생들이 직접 자신의 생각을 기술하도록 하는 개방형 문항이기 때문에 다른 결과를 보여 준다. 수학 문제를 풀면서 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지를 다시 확인해 보는 과정인 수학적 정당화가 필요하다고 답한 학생이 약 96%에 이르렀다. 이는 대부분의 학생들이 수학적 정당화가 필요하다고 인식하고 있음을 알 수 있다. 94.7%의 학생들은 수학적 정당화의 개인적인 측면을 인식하고 있으며, 다른 사람을 설득하거나 설명하기 위해 수학적 정당화가 필요하다는 사회적 측면에 대한 인식을 하는 학생은 1.2%에 불과하였으며 지식의 체계화라는 수학적 정당화의 논리적 측면에 대한 인식을 하는 학생은 없었다. 이는 2009 개정 교육과정에서 제시된 의사소통으로서의 사회적 인식이 아직 부족하고 교과 내용 이해 면에서 지식의 체계화에 대한 인식을 하지 못하는 것을 보여준다.

학교 수학에서 많은 학생들은 수학문제를 해결 한 후 답만 확인하는 경우가 많다. 교사는 문제의 답뿐 아니라 풀이 과정 또한 맞는지 확인을 하도록 지도하고, 수업시간에 자신의 풀이와 답을 설명하는 기회를 많이 제공 할 필요가 있다. 그리고 학생들이 수학적 정당화의 필요성과 중요성을 인식할 수 있도록 지도한다면 학생들은 다양한 측면에서 수학적 정당화의 필요성을 느끼게 되고

[표 8] 수학적 정당화 인식에 대한 빈도분석
[Table 8] Frequency analysis of awareness of necessity for mathematical justification

문제	수학적 정당화의 필요성에 대한 인식	수학학업성취수준에 따른 빈도수 (%)			
		상	중	하	합계
1. 수학 문제를 풀면서 자신이 찾은 해결 방법이나 답이 맞았는지를 다시 확인해 보는 것이 왜 필요할까요?	무응답	1(2.3)	3(3.6)	3(7.0)	7(4.1)
	개인적 측면	42(97.7)	80(95.2)	39(90.7)	161(94.7)
	사회적 측면	0(0)	1(1.2)	1(2.3)	2(1.2)
	논리적 측면	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
합계		43(100)	84(100)	43(100)	170(100)

[표 9] 수학적 정당화 인식에 대한 학생 응답 예시
[Table 9] Examples for awareness of necessity for mathematical justification

수준	개인적 측면	사회적 측면
학생 답안 예시		

[표 10] 내용 영역에 따른 수학적 정당화 수준
[Table 10] Levels of mathematical justification on Algebra and Geometry

내용 영역	정당화 수준에 따른 빈도수(%)						χ^2	유의확률 (양쪽)
	0	1	2	3	4	합계		
대수영역 (2,3번)	94(27.6)	4(1.2)	227(66.7)	5(1.5)	10(3.0)	340(100)	39.78^{***}	0.000
기하영역 (4,5번)	167(49.2)	6(1.7)	149(43.9)	11(3.2)	7(2.0)	340(100)		

수학적 정당화의 수준도 높아질 것이다. 또한 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 제시된 '이해하고 설명할 수 있다'의 학습 목표를 개인적 측면 뿐 아니라 사회적, 논리적 측면의 인식에 의해서 도달 할 수 있을 것이다. 따라서 초등학교 수학교육에서 수학적 정당화의 지도가 잘 이루어진다면 중고등학교에서의 수학적 정당화의 지도는 좀 더 높은 수준으로의 지도가 원활하게 잘 이루어 질 것이고, 학생들 또한 학업에 대한 부담이 낮아질 것이다.

[표 9]는 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식 문항에 대한 학생 응답 예시이다. 수학적 정당화의 개인적 측면을 제시한 학생은 자신이 찾은 해결방법이나 답이 맞는지 확인하기 위해서 정당화가 필요하다고 생각하였다. 한편 사회적 측면을 제시한 학생은 다른 사람과의 의견을 나누기 위해서 정당화가 필요하다고 생각하였다. 따라서 학생들이 오직 하나의 측면만 답하는 것이 아니라 적어도 두 개 이상의 측면으로 수학적 필요성을 인식하고 답할 수 있다면 수학과 교육과정이 지향하는 바에 가까워질 수 있을 것이다.

2. 수학적 정당화 수준에 대한 결과

1) 내용 영역에 따른 수학적 정당화 수준의 차이

[표 10]은 대수 영역과 기하 영역에 따른 수학적 정당화 수준의 분석 결과이다. 또 학생들의 정당화 수준이 대수 영역과 기하 영역에서 차이가 있는지 알아보기 위한 t-검정 결과를 포함한다.

대수 영역에서 약 67%의 학생들이 경험적 정당화인 2수준이었고, 3수준과 4수준인 학생은 적었다. 한편 기하 영역에서는 0수준인 정당화를 하지 못하는 학생이 약 49%로 가장 높은 비율을 보였다. 그리고 기하 영역에서 0수준의 학생을 제외하면 대수 영역과 마찬가지로 경험적 정당화인 2수준의 학생이 약 44%로 가장 많았다. 그리고 기하 영역에서도 3수준과 4수준인 학생은 적었다. 정당화 수준이 대수 영역과 기하 영역에서 차이가 있는지 알아보기 위해 χ^2-검정을 하였다. 학생의 수는 170명이고 대수 영역과 기하 영역의 문항이 각 2문항이므로 합계는 각 340이다. χ^2-검정의 결과 학생들의 수학적 두 영역에서 학생들의 정당화 수준이 통계적으로 유의미한 차이가 있음을 보여준다. 즉 Leddy(2001)의 연구에서와 같이 학생들이 기하 영역보다 대수 영역에서 정당화

[표 11] 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준
[Table 11] Levels of mathematical justification on mathematical achievement

학업성취 수준	사례 수	수학적 정당화 수준에 따른 빈도수(%)						평균	표준 편차
		0	1	2	3	4	합계		
상수준	43	44(25.6)	1(0.6)	109(63.4)	11(6.4)	7(4.0)	172(100)	1.63	2.424
중수준	84	130(38.7)	7(2.1)	188(55.9)	4(1.2)	7(2.1)	336(100)	1.26	2.074
하수준	43	87(50.5)	2(1.2)	79(45.9)	1(0.6)	3(1.8)	172(100)	1.02	2.703

[표 12] 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 대한 일원분산분석 결과
[Table 8] One-way analysis of variance of levels of mathematical justification on mathematical achievement

	제곱합	df	평균 제곱	F	유의확률
집단-간	130.960	2	65.480	12.011***	.000
집단-내	910.428	167	5.452		
합계	1041.388	169			

***p<.001

수준이 높다는 결과이다. 한편 기하 영역에서 더 나은 정당화 또는 증명을 한다는 선행연구(김정하, 2010; Healy & Holyes, 1998)와는 대조적인 결과를 보여준다.

2) 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 차이

[표 11]은 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 분석결과이다. 학업성취수준이 높을수록 높은 수준의 수학적 정당화를 사용하는 학생의 비율이 대체로 높았다. 정당화를 하지 못하는 0수준의 학생의 비율이 모든 학업성취수준에서 높은 편이나 상수준의 경우는 25%로 낮은 편이다. 그리고 외적 권위에 의존해서 정당화를 하는 1수준의 학생의 비율은 아주 낮았다. 이는 학생들은 외적 권위에 의존해서 정당화하기 보다는 적어도 구체적인 수학적 논거를 찾으려는 것으로 볼 수 있다. 정당화를 하지 못하는 경우를 제외하면 초등학생들은 대체로 2수준 이상의 수학적 정당화를 사용하였다. 상수준의 학생들은 2수준인 경험적 정당화에 해당하는 비율이 약 63%로 높았으나 3수준과 4수준에 해당하는 경우도 10%정도 되었다. 이는 상수준의 학생들은 2수준의 경험적 정당화에서 3수준인 포괄적 정당화나 4수준의 연역적 정당화로 발전할 수 있는 가능성을 보여준다.

학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 차이가 있는지 알아보기 위하여 일원분산분석(ANOVA)을 실시한 결과는 [표 12]와 같다. 상수준, 중수준, 하수준인 세 집단은 수학적 정당화 수준에 대한 평균에서 통계적으로 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

따라서 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 대한 사후분석 결과는 [표 13]과 같이 2개의 부집단으로 분류되었다. 학업성취도에서 중수준과 하수준인 학생들은 정당화 수준이 비슷하나, 상수준의 학생들은 다른 학생들과 정당화 수준에서 통계적으로 유의미한 차이를 보였다.

이는 중수준의 학생들과 하수준의 학생들은 0수준과 2수준의 비율이 높고, 상수준의 학생들은 2수준의 비율이 높기 때문이다. 따라서 중수준의 학생들과 하수준의 학생들은 2수준의 수학적 정당화 지도를 통하여 학생들의 정당화 수준을 높일 수 있고, 상수준의 학생들은 3 또는 4수준의 지도를 통해 학생들의 수학적 정당화 수준을 높일 수 있을 것이다.

3) 문항별 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준

[표 14]는 문항 2(대수 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 대한 빈도분석 결과이다. 모든 학업성취수준의 집단에서 경험적 정당화 수준인 2수준에

[표 13] 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 대한 사후분석
[Table 13] Post analysis of variance of levels of mathematical justification on mathematical achievement

학업성취수준	사례수	유의수준 = 0.05에 대한 부집단	
		1	2
하	43	1.02	
중	84	1.26	
상	43		1.63
유의확률		.114	1.000

[표 14] 문항 2(대수 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 빈도분석
[Table 14] Frequency analysis of levels for mathematical justification on mathematical achievement of item 2

문제	정당화 수준	학업성취수준에 따른 빈도수(%)			
		상	중	하	합계
2.'홀수+홀수=짝수'라는 것이 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?	0	2(4.7)	8(9.5)	11(25.6)	21(12.4)
	1	0(0)	2(2.4)	0(0)	2(1.2)
	2	33(76.7)	70(83.3)	30(69.8)	133(78.2)
	3	4(9.3)	0(0)	1(2.3)	5(2.9)
	4	4(9.3)	4(4.8)	1(2.3)	9(5.3)
합계		43	84	43	170(100)

[표 15] 문항 3(대수 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 빈도분석
[Table 15] Frequency analysis of levels for mathematical justification on mathematical achievement of item 3

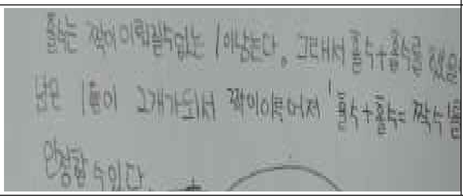
문제	정당화 수준	학업성취수준에 따른 빈도수(%)			
		상	중	하	합계
3.'연속한 세 자연수를 곱하면 6의 배수가 된다.'는 것이 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?	0	11(25.6)	38(45.2)	24(55.8)	73(42.9)
	1	0(0)	2(2.4)	0(0)	2(1.2)
	2	31(72.1)	44(52.4)	19(44.2)	94(55.3)
	3	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
	4	1(2.3)	0(0)	0(0)	1(0.6)
합계		43(100)	84(100)	43(100)	170(100)

해당하는 학생의 비율이 가장 높았다. 학업성취도가 상수준인 학생들은 포괄적 예에 의한 포괄적 정당화와 연역적 정당화를 사용한 비율이 각각 약 9%로 다음으로 높았다. 반면 중수준과 하수준의 학생들 중 3수준 또는 4수준에 해당하는 경우는 5%미만이었다. 그리고 하수준의 학생들은 0수준에 해당하는 경우가 약 26%, 중수준의 학생들은 0수준에 해당하는 경우가 약 10%에 이르렀다. 이는 상수준의 학생들은 중수준이나 하수준의 학생들 보다 3수준 또는 4수준의 비율이 높은 것을 알 수 있다. 이는 상수준의 학생들이 2수준의 경험적 정당화에서 3수준인 포괄적 정당화와 4수준의 연역적 정당화로 발전할 수 있는 가능성을 보여준다. 또한 하수준의 26%에 달하는 0수준의 학생들도 그들의 이해 수준에 맞게 지도와 학습이 이루어진다면 2수준 또는 3수준으로 향상될 수 있을 것이다. 따라서 교사는 학생들의 수준을 고려하여 풀이과정이나 답이 참임을 정당화하는 과정을 지도한다면 학생들의 수학적 정당화 수준을 높일 수 있을 것이다.

[표 15]는 문항 3(대수 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준에 대한 빈도 분석 결과이다. 문항 3에서 학업성취도가 상수준인 경우와 중수준인 경우는 경험적 정당화 수준인 2수준에 해당하는 학생들의 비율이 가장 높았으나 하수준인 경우는 무응답이 많았다. 이 문항은 문항 2와 달리 3수준, 4수준의 수학적 정당화를 한 학생이 거의 없었다. 또한 문항 2와는 달리 문제를 잘못 이해하고 응답한 경우가 많았고 무응답을 비율이 높았다. 이는 문항 2보다 "연속하는"이라는 말을 제대로 이해하지 못하거나 세 수의 곱이기 때문에 심리적으로 학생들에게 어렵게 느껴진 것으로 보인다. 설령 문제를 이해하여 구체적인 수들로 예를 찾아도 문항 2와는 달리 연역적으로 연속한 세 자연수들의 곱을 말로 표현하거나 수식으로 나타내기가 힘들었기 때문에 3수준과 4수준이 거의 없는 것 같다.

[표 16]은 문항 2와 문항 3에 대한 학생들의 정당화

[표 16] 문항 2와 문항 3에 대한 학생 응답 예시
[Table 16] Examples of Questions item 2 and item 3

문항	2	3
수준	4수준 연역적 정당화	1수준 외적 권위에 의한 정당화
학생 답안 예시		

[표 17] 문항 4(기하 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 빈도분석
[Table 17] Frequency analysis of levels for mathematical justification on mathematical achievement of item 4

문제	정당화 수준	빈도수(%)			
		상	중	하	합계
4. '사각형의 내각의 크기의 합은 360도이다.'가 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?	0	5(11.6)	21(25.0)	15(34.9)	41(24.1)
	1	0(0)	2(2.4)	0(0)	2(1.2)
	2	32(74.4)	54(64.3)	27(62.8)	113(66.5)
	3	5(11.6)	4(4.8)	0(0)	9(5.3)
	4	1(2.3)	3(3.6)	1(2.3)	5(2.9)
합계		43(100)	84(100)	43(100)	170(100)

예시이다. 문항 2에 대한 학생 답안의 예시에서 이 학생은 문자를 사용하여 표현하지 못했지만, 초등학교 수준에서 홀수는 짝을 이루고 한 개가 남는다는 설명으로 연역적 정당화를 하고 있다. 이 학생에게는 문자와 식을 사용하여 형식적인 표현을 지도하여 수학적 표현의 간결성과 심미성을 인식할 수 있도록 할 수 있다. 문항 3에 대하여 응답한 학생은 정당화의 근거를 외부 권위에서 찾는 1수준의 정당화 수준을 보여주고 있다. 이 수준의 학생에게 정당화 수준에 맞는 지도를 한다면 2또는 3수준으로 정당화의 수준을 높일 수 있을 것이다.

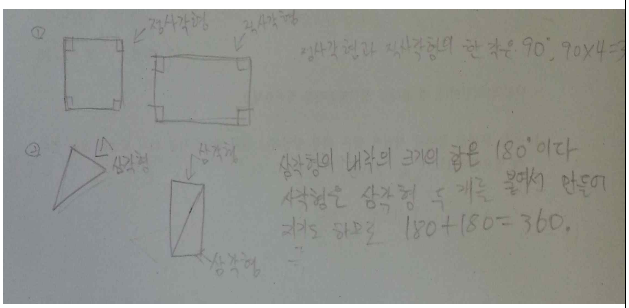
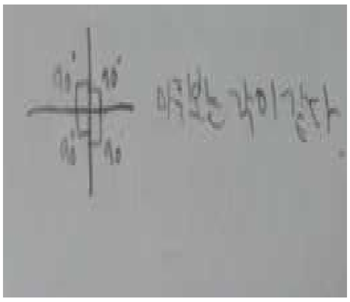
[표 17]은 문항 4에 대한 빈도 분석 결과이다. 문항 4는 모든 학업성취수준에서 경험적 정당화 수준인 2수준에 해당하는 학생들의 비율이 가장 높았다. 사각형의 내각의 합에 대하여 이미 배운 내용이고 사각형은 친숙한 소재임에도 불구하고 1수준의 응답률은 1.2%이었다. 그리고 문항 2보다 0수준의 학생들의 비율이 높게 나왔기 때문에 문항 2와 비교했을 때 전반적으로 문항 4의 수학적 정당화의 수준은 낮았다. 상수준의 학생들은 다른 학업성취수준의 학생들보다 3수준의 포괄적 정당화와 4수준의 연역적 정당화를 더 사용하고 있지만 대수영역인 문항 2의 결과와 비교하였을 때 3수준과 4수준을 합친 비율이 낮았다. 하지만 중수준의 학생들은 3수준과 4수준을 합친 비율이 문항 2보다 높게 나왔다. 따라서 2수준의 학생들을 3수준의 정당화가 되도록 지도한 후 4수준의 정당화가 이루어지도록 지도한다면 많은 학생들의 정당화 수준을 높일 수 있을 것이다.

[표 18]은 문항 5에 대한 빈도분석 결과이다. 문항 5는 모든 학업성취수준에서 정당화를 하지 못하는 0수준

[표 18] 문항 5(기하 영역)의 학업성취수준에 따른 수학적 정당화 수준의 빈도분석
[Table 18] Frequency analysis of levels for mathematical justification on mathematical achievement of item 5

문제	정당화 수준	학업성취수준에 따른 빈도수(%)			
		상	중	하	합계
5. '두 직선이 만나면 마주보는 각의 크기는 같다'가 옳다는 것을 어떻게 설명할 수 있을까요?	0	26(60.5)	63(75.0)	37(86.0)	126(74.1)
	1	1(2.3)	1(1.2)	2(4.7)	4(2.4)
	2	13(30.2)	20(23.8)	3(7.0)	36(21.1)
	3	2(4.7)	0(0)	0(0)	2(1.2)
	4	1(2.3)	0(0)	1(2.3)	2(1.2)
합계		43(100)	84(100)	43(100)	170(100)

[표 19] 문항 4와 문항 5에 대한 학생 응답 예시
[Table 19] Examples of Questions item 4 and item 5

문항	4	5
수준	3수준 포괄적 정당화	2수준 경험적 정당화
학생 답안 예시		

에 해당하는 학생들의 비율이 가장 높았다. 이 문항은 문제를 잘못 이해하고 접근하여 정당화를 하지 못하고 틀린 경우가 많았다. 예를 들면, 어떤 학생들은 두 직선이 만나는 것을 그리려고 하였으나 두 반직선이 같은 출발점을 공유하는 그림을 그려서 마주보는 각을 찾지 못하여 정당화에 실패하였다. 0수준의 학생들을 제외하면 모든 학업성취수준에서 2수준인 경험적 정당화에 해당하는 비율이 높았다. 그러나 다른 문항에 비해서 2수준의 비율도 현저히 낮다. 이 문항은 모든 학업성취도 수준의 학생들의 0수준의 비율이 너무나 높았다. 많은 학생들이 문제를 제대로 이해하지 못하여 그림을 잘못 그리거나 응답하지 않은 경우가 많았다.

문항 5는 문항 3과 비교하면 3과 4수준의 학생의 비율이 낮은 것은 같지만 2수준의 학생의 비율이 많이 낮고 0수준의 학생의 비율은 많이 높았다. 따라서 문항 4와 문항 5에서 문제를 잘못 이해하여 그림을 제대로 그리지도 못하여 경험적 정당화의 비율이 낮고 무응답의 비율이 문항 2와 문항 3보다 높았다. 기하영역에서 학생들에게 수학적 정당화를 지도할 때, 주어진 문제를 그림으로 표현할 수 있는 능력도 함께 지도함으로써 0수준의 학생들이 2수준의 경험적 정당화로 발전할 수 있도록 도울 수 있다. 그리고 문항 4와 문항 5를 비교해 보면 학

생들에게 친숙한 소재와 경험의 여부도 정당화에 중요한 역할을 하는 것 같다. 대체로 중학교에서 수학적 정당화의 교육은 기하 영역에서 이루어진다. 학교 교육에서 학생들이 기하에서 다루는 개념과 성질의 이해를 돕기 위해 구체적인 예를 활용하거나 학생활동을 중시하여 0수준의 학생들을 1 또는 2수준으로 이끌고, 2수준의 학생들은 3 또는 4수준에 이를 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

[표 19]는 문항 4와 문항 5에 대한 학생들의 정당화 예시이다. 문항 4에 대한 학생의 예시에서 이 학생은 직사각형인 경우 내각의 크기의 합이 360도임을 보이고, 여기에서 나아가 직사각형과 유사하게 생긴 사각형을 삼각형 두 개로 분리하여 내각의 크기의 합이 360도임을 보이고 있다. 이런 경우는 경험적 정당화에서 연역적 정당화로 가는 중간 단계인 포괄적 정당화의 수준으로 분류하였다. 문항 5에 대한 학생의 예시에서 이 학생은 직교하는 두 직선을 예로 들면서 맞꼭지각의 크기가 같다고 정당화하여 2수준의 경험적 정당화를 보여주고 있다. 기하영역의 문제는 그림으로 나타내기 위한 학생들의 문제 이해뿐 아니라 경험과 표상 능력이 중요한 것 같다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 개방형 문항을 활용하여 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식과 수학적 정당화의 수준을 분석함으로써 수학적 정당화에 관한 지도 가능성과 정당화 지도 방안에 대한 시사점을 제시하고자 하였다. 연구문제를 해결하기 위해 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 정당화에 대한 인식과 함께 대수 영역과 기하 영역에 대한 학생들의 정당화 수준을 분석하였다. 본 연구의 연구결과를 바탕으로 다음과 같이 몇 가지 시사점을 도출하였다.

첫째, 수학적 정당화가 필요하다고 생각하는 학생이 약 96%로 대부분의 학생들은 수학적 정당화의 필요성을 인식하고 있었다. 그러나 자신의 답이 맞는지 알기 위해서 정당화가 필요하다고 생각하는 정당화에 대한 인식이 개인적 측면에 국한되어 있었다. 다른 사람을 확신시키기 위해서는 자신의 주장을 더욱 논리적이고 명확하게 정리해야하기 때문에 학생들에게 수업시간에 교사나 친구에게 설명할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 그리고 교사와 학생이 함께 왜 수학적 정당화가 필요한지에 대해서 지도와 학습이 이루어진다면 이를 통해 학생들이 수학적 정당화의 사회적 측면과 연역적 측면도 고려할 수 있게 되고 더 높은 수준의 수학적 정당성로 나아갈 수 있게 될 것이다.

둘째, 학생들은 기하 영역보다 대수 영역에서 더 높은 수준의 수학적 정당화를 보였다. 대수 영역에서 약 70%의 학생들이 2수준 이상의 정당화를 사용하였다. 대수 영역에서 수학적 정당화 수준이 높기 때문에 초등학생들에게 수학적 정당화를 지도할 때, 대수 영역의 문제로 먼저 접근하면 경험적 정당화에서 더 높은 수준의 정당화로 학생들이 도약하는 것을 도울 수 있을 것이다.

셋째, 기하 영역에서 특정한 예를 이용하여 정당화하는 2수준의 비율은 44%로 대수 영역에서 2수준의 비율인 67%보다 현저히 낮았다. 기하 영역에서 학생들은 주어진 진술을 그림으로 표현하는 표상 능력이 부족하여 특정한 예를 들지 못하는 경우가 많았다. 그러므로 기하 영역에서 학생들에게 수학적 정당화를 지도할 때, 주어진 진술을 표상할 수 있는 능력도 함께 지도함으로써 0수준의 학생들이 2수준의 경험적 정당화로 발전할 수 있도록 도울 수 있다.

넷째, 학업성취수준에 따른 학생들의 수학적 정당화 수준을 비교하였을 때, 상수준의 학생들은 2수준인 경험적 정당화에 해당하는 비율이 약 63%로 다른 수준보다 높았고 3수준과 4수준에 해당하는 경우도 10%정도 되었다. 이는 상수준의 학생들이 2수준의 경험적 정당화에서 3수준인 포괄적 정당화와 4수준의 연역적 정당화로 발전할 수 있는 가능성을 보여준다. 교사는 학생들이 문제를 해결하고 답을 구하는 과정을 지도할 때, 학생들이 찾은 풀이 과정이나 답이 참임을 정당화하는 과정도 함께 지도함으로써 학생들의 수학적 정당화 수준을 높일 수 있을 것이다.

본 연구에서는 개방형 문항을 활용하여 초등학생들의 수학적 정당화의 필요성에 대한 인식과 수학적 정당화 수준을 분석한 데 의의가 있다. 이후의 연구에서는 학생들의 수학적 정당화 수준에 따른 수학적 정당화 지도 방안과 내용영역에 따른 구체적인 수학적 정당화 지도 방안에 대한 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 서울: 교육과학기술부.

Ministry of Education, Science, and Technology (2011). *Mathematics curriculum*. MEST announcement 2011-361 [Separate version 8]. Seoul: MEST.

김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 박사학위 논문, 이화여자대학교.

Kim, J. (2010). *A study on the mathematical justification of elementary school students*. Doctoral dissertation, Ewha Womans University.

김정하 (2011). 초등학생과 중학생들의 수학적 정당화에 대한 인식과 단계에 관한 실태 연구, 한국초등수학교육학회지 15(2), 417-435.

Kim, J. (2011). Awareness and Steps of the Mathematical Justification of Elementary and Middle School Students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 15*(2), 417-435.

서지수, 류성림 (2012). 수와 연산, 도형 영역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구, 수학교육논문집 26(1), 85-109.

Seo, J. & Ryu, S. (2012). A Study on the Types of Mathematical Justification Shown in Elementary School Students in Number and Operations, and Geometry. *Communications of mathematical education 26*(1), 85-109.

우정호 (2011). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

Woo, J. (2011). *Educational basics for the school mathematics*. Seoul: Seoul national university publisher.

최수미, 정영옥 (2010). 패턴의 일반화 과정에서 나타나는 수학적 정당화 수준 분석, 과학교육논총 23, 23-40.

Choi, S. & Chong, Y. (2010). Analysis on mathematical justification levels in process of generalization of patterns. *The bulletin of science education 23*, 23-40.

홍선미 (2013). 수학적 정당화 분석틀 PIRSO에 근거한 수학적 정당화 활동의 사례 연구. 석사학위 논문, 충북대학교.

Hong, S. (2013). *A Qualitative Case Study of Mathematical justification Activities based on a Mathematical justification Framework. PIRSO*, Master's Thesis, Chungbuk National University.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras 24*, 17-24.

Fischbein, E. & Kedem, I. (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*, WN: Cambridge University Press.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* (234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Reston, VA: NCTM.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. London: Institute of Education of University of London.

Leddy, J. F. (2001). *Justifying and proving in secondary school mathematics. doctor of philosophy department of curriculum, teaching and learning*, Toronto, ON: Toronto University Press.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics 44*, 87-125.

Tall, D. (2003). 고등수학적 사고 (류희찬, 조완영, 김인수 공역), 서울: 경문사. (원저 *Advanced mathematical thinking*. 1991년 출판)

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12* (17-31). Reston, VA: NCTM.

6th grade students' awareness of why they need mathematical justification and their levels of mathematical justification

Kim Huijin
Maryland University
E-mail : huijin.kim@faculty.umuc.edu

Kim Seongkyeong
Ulsan Jungang high shcool
E-mail : biblemany@hanmail.net

Kwon Jongkyum†
Kyungpook National University
E-mail : mathkjk26@hanmail.net

In this study, we suggest implications for teaching mathematical justification with analysis of 6th grade students' awareness of why they needed mathematical justification and their levels of mathematics justification in Algebra and Geometry. Also how their levels of mathematical justification were related to mathematic achievement. 96% of students thought mathematical justification was needed, the reasons were limited for checking their solutions and answers. The level of mathematical justification in Algebra was higher than in Geometry. Students who had higher mathematic achievement had higher levels of mathematical justification. In conclusion, we searched the possibility of teaching mathematical justification to students, and we found some practical methods for teaching.

* ZDM Classification : E52
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97E50
* Key words : 6th grade students, mathematical justification, awareness of why they need mathematical justification, levels of mathematical justification
† Corresponding author