

원의 방정식의 서술형 평가에서 오류유형 분석

한경민(수지고등학교)
고상숙(단국대학교)[†]

I. 서론

21세기 사회는 하루에도 수많은 정보와 지식이 생성되고 변화되고 있다. 급변하는 사회에 적응하고 미래사회의 인재를 양성하기 위해서 교육은 변화해야 한다. 이에 따라서 교육은 주입식, 암기 위주의 교육에서 다양한 활동을 통하여 창의력과 문제해결력, 사고력 등을 향상시킬 수 있도록 변화하여야 한다. 다양한 교육 방법에 맞추어 다양한 평가 방법이 필요한데 최근에는 다양한 사고력과 창의력을 신장하기 위하여 서술형 평가를 확대 실시하고 있다.

서술형 평가란 학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 선택하도록 하는 방식이 아니라 학생이 문제 풀이 과정을 직접 '서술'하도록 하는 평가이다(서울특별시교육청 외, 2011)). 서술형 평가는 정답만을 요구하는 기존의 평가와 달리, 학생들의 인지적, 과정적 지식을 모두 요구하는 평가로써 학생들이 다양한 수학적 사고를 수행하도록 하여 학생들의 사고능력, 수행능력을 향상시키는 것을 목적으로 한다(김래영, 김구연, 노선숙, 김민경, 전지훈, 김기영, 이민희, 2012).

이런 서술형 평가를 통해 학생들의 사고력과 문제해결력을 평가하고 교사는 평가 결과를 이용하여 학생들이 어떤 어려움을 겪고 있는지 또한 어떤 오류를 범하고 있는지 파악할 수 있으며 이를 교수학습 과정에 반영해야 한다.

수학교사로서 수업을 진행하면서 새로운 개념을 배우고 난 뒤 간단한 형성평가를 시행하면 교사로서는 생각지

도 못한 생각들을 학생들이 하고 있음을 알게 된다. 한 가지 예로 원의 방정식에서 '중심이 직선 $y=x+2$ 위에 존재하고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원의 반지름의 길이를 구하여라.'라는 문제를 제시했을 때, 학생들이 주어진 직선 위에 중심의 좌푯값을 고려한 해석 기하적 접근보다는 논증 기하적 접근으로 한 원만을 구하는 오류를 공통적으로 범하였다. 학생들의 이런 모습을 보고 교사 스스로 문제풀이의 차이점을 충분히 설명하지 못했기 때문이라는 자책감마저 들게 되었다.

오류는 극복해야 할 나쁜 것이 아니라 그를 통해 사고의 발전이 일어날 수 있는 좋은 것이다(한경민, 2013). 그렇기에 오류에 관한 많은 선행 연구들이 진행되어 왔다. Artigue와 Viennor(1987), Clements와 Del Campo(1987), Herscovics(1989) 등의 연구에서처럼 학생이 지니고 있는 오개념의 파악으로부터 시작된 오류에 관한 연구는 Cornu(1991), 국내 연구로는 이종희, 김부미(2004) 연구와 같이 오개념의 특성 이해, 오류 양상과 개념 변화 과정의 이해, 이를 해소할 수 있는 수업 모형의 개발과 이치현, 김구연(2013)의 학교에서 과거 시행된 평가의 서술형 평가의 문항들을 교육과정의 적합성에 따라 분석하는 등으로 연구의 종류가 다양해져가고 있다.

김부미(2004)는 수학적 오류를 학생들이 고쳐야 할 잘못된 개념으로 보지 않고, 연구자들의 입장과 견해에 따라서 대안적 개념(alternative conception), 소박한 개념(naive conception), 학생들의 개념(Student's conception), 인지적 장애(cognitive obstacle), 인식론적 장애(epistemological obstacle), 직관적 신념(intuitive belief) 등으로 통용된다고 하였다. 또한 김부미(2004)에서 이러한 수학적 오류들은 4가지 공통된 특징이 있다고 하였다. 첫째, 수학적 오류는 학습자가 지식을 구성해갈 때, 지각에 의존하거나 분화되지 않은 개념을 사용한다. 둘째, 상황에 따라 다르게 생각하며 단순히 인과적으로 생각하는 경향이 있다.

* 접수일(2014년 10월 21일), 수정일(2014년 11월 10일), 게재확정일(2014년 11월 17일)

* ZDM분류 : D74

* MSC2000분류 : 97D70

* 주제어 : 서술형평가, 오류유형, 원의 방정식, 비평준화지역 고등학교

[†] 교신저자

셋째, 새로운 상황을 이해하려고 할 때, 능동적인 인식 틀의 역할을 할 뿐 아니라 다른 작동 기제에 선행한다. 넷째, 사고방식 내에서 일관성을 갖고 나타나며, 쉽게 변화하지 않는 견고성을 갖고 있다. 이 연구를 살펴보면 오류가 일관성을 가지고 쉽게 변화하지 않으므로 오류가 생기기 전에 미리 교수·학습 준비를 통해 오류의 유형을 파악하고 이에 잘 대처해야하는 방안을 모색해줄 필요가 있다.

선행 연구들이 나타내듯이 오류는 학생들이 새로운 수학적 개념을 배울 때 자연스럽게 생기는 것이며, 그것을 제거해야 하는 나쁜 것으로 보기보다는 오류 극복을 통해 수학적 개념을 더욱 공고히 할 수 있고, 한 단계 더 나아갈 수 있는 동력이 될 수 있는 것으로 보아야한다. 또한 오류 극복을 통한 수학에 대한 이해는 학생들의 자기 주도적 학습 능력 향상에 긍정적인 영향을 미친다. 그렇기에 본 연구에서는 논증 기하적 방정식 풀이만을 경험한 학생들이 고등학교에 진학하여 해석 기하적 접근을 시도하는 원의 방정식에 관해 서술형의 문항을 개발하고 이 문항에서 흔히 나타나는 오류 유형을 파악하고자 하였다.

II. 이론적 배경

1. 원의 방정식

고등학교 1학년 수학에서는 중학교 3학년 수학에서 익힌 도형에 관한 여러 성질과 관계를 데카르트의 해석 기하적인 관점에서 대수적인 방법으로 접근하여 기하학을 새롭게 조명해보고, 직관적인 사고에서 논리적이고 창조적인 사고로 발전시키는 것을 목적으로 한다(교육과학기술부, 2012). 즉, 좌표평면에서 원의 중심을 $C(a, b)$, 일정한 거리를 반지름 r , 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 $\overline{CP}=r$ 이므로 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다(유희찬 외 8인, 2012).

교과서에서 원의 방정식에 포함되어 있는 내용은 원의 정의뿐만이 아니라 원과 직선의 위치 관계, 두 원의 위치 관계, 원의 접선의 방정식에 대하여 학습하도록 되어 있다. 원의 중심과 반지름을 알고 있을 때의 원의 방정식뿐만 아니라 원이 지나는 네 점이 주어졌을 때의 원의 방정식의 일반형 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (단, $A^2+B^2-4C>0$)도 제시하고 있다. 또한 두 원의 위치 관계에 따라서 두 원의 중심사이의 거리와 반지름 사

이의 관계를 파악할 수 있도록 하고 있으며, 원의 접선의 방정식을 세 가지 종류로 구분하여 기울기가 주어진 경우, 원의 접점이 주어진 경우, 원 밖의 한 점에서 접선을 그을 경우로 나누어 접선의 방정식을 찾아 볼 수 있도록 제시하고 있다. 학생들이 이러한 내용을 해석학적인 관점으로 분석하여 원의 존재 여부를 파악할 수 있도록 도와야 한다.

2. 서술형 평가

서울특별시 교육정보 연구원(2011)은 서술형평가는 “학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 선택하도록 하는 방식이 아니라 학생이 문제 풀이과정을 직접 ‘서술’하도록 하는 평가방식이다.”(p. 5)라고 정의하면서 서술형 평가를 통해 학생의 창의력, 문제해결력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보 수집력 및 분석력 등 고등사고 기능을 평가할 수 있다고 언급하였다. 또한 경기도 교육청(2013)은 서술형 평가란 “요약, 개념, 이해, 설명, 풀이 과정 등 사실을 바탕으로 기술하는 평가”라고 정의하면서 서술형 평가를 통해 고등사고기능을 쉽게 평가할 수 있으며 문제해결과정에 대하여 학생 스스로 깊이 사고하도록 하여 스스로 수학적 사고를 발전시켜 논리적으로 기술할 수 있도록 하는 평가이다(김래영 외 1인, 2013, 재인용).

서술형 평가는 학생들이 다양한 수학 문제를 해결하는데 있어 아이디어를 자유롭게 기술하도록 하여 학생들의 수학적 개념 및 문제 해결 흐름, 수학적 표현 능력 등을 다각적으로 평가할 수 있는 평가라 할 수 있기에 본 연구에서는 학생들이 원의 방정식에 관련된 문제를 자유롭게 글로 풀어 쓰거나 그림을 통해서 문제 해결 과정을 제시하도록 하여 학생들의 문제 풀이 과정에서의 수학적 오류를 파악하고자 하였다.

3. 수학적 오류

일찍이 독일의 수학자 Radats(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 5가지로 구분하고 있다. 언어의 어려움 때문에 생기는 오류(langage difficulties), 공간적 지식 획득의 어려움에 생기는 오류(difficulties in obtain spatial information), 선행 기술, 사실과 개념의 미숙에 따른 오류(deficient mastery of prerequisite skills, facts and concepts), 부정확한 결합 또는 사고의 경직성에 따른 오

류 (incorrect associations or rigidity of thinking), 부적절한 규칙과 전략의 응용에 따른 오류 (application of irrelevant rules or strategies)이다. Hadar, Zaslavsky, & Inbar(1987)는 대수와 기하 영역에 대한 이스라엘 학생들의 졸업 시험 결과를 바탕으로 잘못 이용된 자료(missed data), 잘못 해석된 언어(misinterpreted language), 논리적으로 부적절한 추론(logically invalid inference), 곡해된 정리나 정의(misunderstood theorem or definition), 논증되지 않은 해답(unverified solution), 기술적 오류(technical errors)의 6개의 범주로 분류하였다. Clements(1980)는 문제해결과정에서 일어날 수 있는 오류로써 수학 읽기 오류(mathematics reading errors), 이해 오류(comprehension errors), 변환 오류(translation errors), 처리기술 오류(process skills errors), 부주의(careless)인 5 가지 오류유형을 제시하였다.

이종희, 김부미(2006)는 학생들이 일차방정식을 풀 때의 오류를 구조적 오류와 실행적 오류로 나누었다. 구조적 오류는 개념의 불완전한 이해로 발생하는 복잡한 패턴을 가진 오류이며, 실행적 오류는 방정식 문제해결과정에서 비교적 단순한 조작의 오류나 주어진 형식이나 연산 과정에서 나타나는 오류이다. 구조적 오류에 속하는 오류의 범주는 논리적 오류, 개념상 오류로 범주화되며, 실행적 오류는 주어진 연산의 우선성 선택 오류, 수치 연산의 오류, 생략의 오류로 분류된다.

김차숙, 류희찬(2003)은 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구에서 오류 분석을 위해 오류 유형을 4가지로 분류하였다. 이해의 오류, 처리 기술의 오류, 요구되지 않은 해답, 애매한 오류로 분류하였으며 분석 결과 이해의 오류가 가장 많이 발생한다고 하였다.

이들 선행연구를 통해 알 수 있듯이 고교 수학에 대한 오류연구가 그리 많지 않음을 알 수 있으며 특히 원의 방정식에 대해서는 찾아보기 어려웠다.

III. 연구방법

1. 연구 대상

경기도 용인시의 비평준화 지역에 위치한 S고등학교 1학년 6개 학급 120명을 대상으로 진행하였다. 고등학교 1

학년 원의 방정식 부분 교과내용을 모두 배운 상태에서 오류의 유형을 파악하기 위해 수학교사의 지도아래 수업 시간 중 검사를 실시하였다. 검사 문항은 형성평가 형식으로 성적에는 반영하지 않았다.

2. 검사지

학생들은 비평준화지역의 공립 고등학교로 전국학력평가에서 수리 1등급인 비율이 50%에 달하는 우수한 인재들이다. 따라서 기본 개념에 관한 문제보다는 여러 개념이 합쳐진 서술형의 문항으로 구성되어 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류를 분석하고자 하였다. 교과서 4종 이상을 조사하고 수학 교육 전공자 1인과 수학교사 4인의 검토를 통해 교과서에 나오는 원의 방정식에 관련된 개념들을 중심으로 문항 11개를 개발하였고, 문항의 신뢰도를 측정하기 위하여 SPSS V.12를 이용하였는데 Cronbach alpha 계수가 0.831로 나타나 신뢰도가 높게 나타났다. 문항에 따른 분석은 연구결과에 제시하였다. 평가하고자 한 각 문항의 수학내용은 [표 1]과 같다. 수집한 검사지의 점수화에는 연구자와 함께 근무하는 다른 두 교사가 참여하

[표 1] 검사지 평가 내용

[Table 1] The Contents of the Test

번호	평가 내용
1	중심이 특정 직선 위에 존재하며 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식
2	중심이 특정 직선 위에 존재하며 특정 점을 지나 는 원의 방정식
3	특정 점을 지나며 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심 사이 거리
4	아폴로니우스 원의 방정식
5	원 위의 점으로 이루어진 삼각형 무게중심 자취
6	원과 직선의 위치관계
7	기울기가 주어진 원의 접선의 방정식
8	원 위의 점에서의 접선의 방정식
9	원 밖의 한 점에서의 접선의 기울기
10	원 밖의 한 점 P 에서 그은 접선의 접점과 점 P 사이의 거리
11	두 원의 공통 접선

여 엑셀파일로 저장하였는데 이 때 채점자간의 차이를 나타내는 문항에 대해서는 서로 의견을 합의하였고 특히 오류의 원인을 잘 파악하기 어려운 경우에는 응답한 학생과 면담을 통해 그 의도를 파악하고자 하였다. 하지만 그런 경우는 2번 문항을 제외하고 오류의 유형이 전형적이어서 그런지 그리 많지 않았다.

오류유형으로는 본 연구의 수학영역과 가장 근접하게 대수와 기하 영역에서 오류를 분석한 Hadar, Zaslavsky, & Inbar(1987)의 유형에 바탕을 두었으나 학생들의 검사지에 나타난 결과를 주요 초점으로 다음 [표 2]와 약간의 수정을 통해 오류와 오류유형을 분류하고 분석하기로 하였다. 다만 영어 알파벳 분류는 본 연구에서 나타난 빈도 순서를 내림차순으로 정리한 것이다.

[표 2] 오류유형 분류 틀
[Table 2] The Frame of Types of Errors

Hadar, Zaslavsky, & Inbar(1987)	본 연구의 오류유형
논리적으로 부적절한 추론(logically invalid inference)	부적절한 논리적 추론: A형 오류
잘못 해석된 언어(misinterpreted language)	풀이과정의 생략: B형 오류
기술적 오류(technical errors)	기술적 오류: C형 오류
논증되지 않은 해답(unverified solution)	잘못된 결론: D형 오류
곡해된 정리나 정의(misunderstood theorem or definition)	잘못된 정리의 사용: E형 오류
잘못 이용된 자료(missed data)	시각적 오류: F형 오류

IV. 결과 분석 및 논의

1. 서술형 평가의 문항 분석

11개의 문항은 교과서에서 제시하는 원의 방정식에 관련된 개념을 포함하고 있으며, 학생들의 문제해결 능력을

측정할 수 있는 적절한 문항인지에 대해 점검하기 위해 문항별 난이도와 문항별 변별도를 조사하였다. 120명의 학생들의 검사지를 수집하여 각 문항을 단계별로 점수를 부여하였으며, 그 점수를 토대로 문항별 난이도와 문항변별도, 문항제거시 신뢰도를 측정하였다. 11개 문항에 대한 문항별 난이도와 문항 변별도 검사 결과는 [표 3]과 같다.

[표 3] 문항별 난이도와 문항 변별도
[Table 3] Item Difficulty, & Discrimination

문항	난이도	문항변별도	문항제거시 신뢰도
1	0.183333	0.267	0.835
2	0.433333	0.217	0.834
3	0.146667	0.267	0.825
4	0.43	0.45	0.815
5	0.455	0.517	0.828
6	0.241667	0.433	0.819
7	0.208333	0.417	0.809
8	0.245	0.4	0.811
9	0.44	0.683	0.807
10	0.476667	0.7	0.802
11	0.463333	0.75	0.796

문항 1~3번 문항에서 문항의 변별도가 0.2 수준으로 낮은 반면 4번 문항이후에선 변별도가 높게 나타나서 문항으로써 의미가 있다. 변별도가 낮은 문항들은 이들의 내적 일관성이 낮다는 뜻으로써 이들 문항에서 옳게 답한 학생이 다른 곳에 오답할 확률이 높다는 것을 암시한다. 특히 1과 2번을 제거한다면 문항의 신뢰도는 더 향상될 것으로 보인다. 또한 문항 1과 3에서 난이도가 매우 낮게 나타난 것으로 보아 비평준화지역의 우수한 학생들에게 원의 방정식에 관한 대표적인 문항으로써 전이가 잘 이루어진 것으로 짐작해볼 수 있다. 각 문항은 다음 단원에서 오류분석과 함께 제시되었다.

2. 전체 오류 유형과 오류 유형별 빈도 분석

원의 방정식에서 나타나는 오류는 부적절한 논리적 추론(38.81%)이 가장 높은 비율로 나타났다. 이는 학생들이 문제를 해결할 때, 수학적 개념을 완벽하게 정립하지 못하여 부적절한 추론을 통해 문제를 해결했기 때문에 발생된 것이라 할 수 있다.

문항별로 살펴보면 2번 문항에서 부적절한 논리적 추론가 압도적으로 높게 일어났다. 2번 문항의 특성 상 문제 해결에 필요한 식이 두 가지였는데 학생들은 평소 교과서에서 보아온 기본형 문제에 비추어 식을 한 가지만 제시함으로써 오류를 범한 것으로 생각된다. 그 다음은 풀이과정의 생략(25%)인데 학생들이 문제 풀이 과정 중 계산이 복잡해지거나 숫자가 복잡해지는 단계에서 문제 풀이를 포기한 경우가 많았기 때문에 나타난 오류로 보인다. 세 번째로는 기술적 오류(15.67%)로 계산 과정 중 부호의 변형이나 숫자의 변형으로 인한 오류가 많았다. 이는 문제를 빠르게 풀고 문제 풀이를 점검하지 않기 때문에 나타나는 오류라 생각된다. 네 번째로는 잘못된 결론 오류(11.94%)로 이는 문제 해결 과정은 옳았으나 문제에서 묻고자 하는 것을 정확히 파악하지 못하여 올바른 결론을 도출하지

못한 경우이다. 이는 많은 학생들이 빠른 문제 풀이 과정에서 처음에 읽었던 문제를 제대로 기억해 내지 못하고 문제 풀이 과정에서 도출된 답을 그대로 정답으로 인식했기에 나타난 오류라 생각된다.

다섯 번째 오류는 잘못된 정리의 사용에서 발생하는 오류(5.97%)로 오류의 빈도는 낮았다. 연구 참여 학생들의 학습 수준이 높은 만큼 정의나 정리에 관해서는 학습이 잘되어 있는 상태였기에 일부 수학 미성취 학생들에게서 발생했다. 마지막으로는 시각적 자료에서 발생하는 오류(2.61%)로써 원의 방정식에 관련된 문제를 해결하면서 문제풀이의 도구였던 도형을 잘못 그리게 되어 잘못된 정답을 도출하게 된 경우이다. 따라서 공통적으로 오류 유형이 많이 나타난 문항의 특징은 [표 5]와 같다.

[표 4] 오류 유형과 유형별 빈도
[Table 4] Error Types & Frequency

오류유형	오류 내용	빈도 (%)
부적절한 논리적 추론 - A형 오류	주어진 정보에서 타당치 못하게 이끌어 내진 정보이거나 이미 추론된 것에서 타당치 못하게 이끌어 내진 새로운 정보인 경우	38.81
풀이과정의 생략 - B형 오류	문제풀이 과정이 중단된 경우, 현 단계까지의 풀이 과정은 맞았으나 다음 단계의 풀이가 생략된 경우	25
기술적 오류 - C형 오류	계산상의 오류로써 이전 단계까지의 문제해결 과정은 맞았으나 다음 단계에서 옮겨 쓰는 과정에서 부호, 숫자의 변형 등이 일어난 경우	15.67
잘못된 결론 - D형 오류	결론 전 단계까지 문제해결은 옳았으나 문제가 요구하는 결론을 틀리게 제시한 경우	11.94
잘못된 정리의 사용 - E형 오류	정리나 정의의 내용은 잘 알고 있으나, 주어진 조건에 맞지 않은 경우에 사용한 경우	5.97
시각적 오류 - F형 오류	문제해결의 도구로 사용하는 도형을 잘못 사용한 경우	2.61
합		100

[표 5] 오류 문항의 특징
[Table 5] Characteristics of errors

오류 유형	문항 번호	문항의 특징
A	1, 2	1, 2번 문항은 모두 원의 방정식을 구하는 문제로서 x 축과 y 축에 접하기 위해서 필요한 조건을 묻는 문제이다. 두 문항에서 A형 오류가 가장 높게 나타난 공통된 이유는 원이 x 축, y 축에 접하면 원이 반지름 r 과 원의 중심 x 좌표의 절댓값이 같거나 원의 중심 y 좌표의 절댓값이 같음을 이용해야하는데 부적절한 논리적 추론으로 인해 절댓값을 생각하지 못했기 때문이다.
		4, 9, 10, 11번 문항은 문제 풀이 과정이 간단함에도 풀이과정의 중단이 일어난 것으로 보아 뒷 번호의 문항이라 문제 해결 시간이 부족하였을 것이라 추측된다.
B	4, 9, 10, 11	4, 11번 문항은 문제해결 과정에서 계산 과정이 복잡하고 사칙 연산이 복잡한 문제로서 많은 학생들이 계산 과정을 끝까지 이행하지 못하고 중간이 그만 됨으로써 발생하였다. 9, 10번 문항은 문제 풀이 과정이 간단함에도 풀이과정의 중단이 일어난 것으로 보아 뒷 번호의 문항이라 문제 해결 시간이 부족하였을 것이라 추측된다.
		5번 문항은 미지수를 학생 스스로 설정하여 무게중심 좌표를 설정하고 원의 방정식에 대입하는 3단계의 문제 풀이 과정이 포함된 복잡한 문제로서 학생들이 각 단계를 거치면서 숫자의 변형이 나타난 경우가 많았다. 7번 문항은 점과 직선사이의 거리를 구하는 과정에
C	6, 7	

		서 근호($\sqrt{\quad}$)를 계산하면서 제곱을 놓치는 경우에 오류가 발생하였다.
D	3, 6, 11	3번 문항은 문제 해결에서 나온 결론을 이용하여 답을 구하는 문제로써 구해야 할 정답을 학생들이 잊었기에 나타난 오류이며, 6번과 11번은 문제 풀이 과정에서 답이 2개가 나왔으나 정답을 1개만 기술했던 경우이다.
E	10	원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결하려 하였으나 이 문제는 접선의 방정식은 구할 필요가 없는 문제이다. 접선의 방정식을 구했다면 접선과 원의 방정식을 연립하여 점점을 구한 뒤 원 밖의 한 점과 점점 사이의 거리를 구하면 되는 문제이다. 그러나 많은 학생들이 접선의 방정식을 이용한 문제 해결은 과정이 복잡하기에 접선의 방정식이 문제 해결에 필요한 정리가 아니었기에 문제를 끝까지 해결하지 못하였다.
F	10	피타고라스 정리를 이용하는 간단한 문제이지만 학생들이 문제해결의 도구로 이용한 도형을 잘못 그림으로써 발생한 경우이다.

3. 문항별 오류 유형 및 빈도

각 문항별로 오류 유형빈도가 다르게 나타났는데 이는 문항에서 나타난 수학적 내용에서 비롯된 오류 유형의 차이가 존재함을 나타내고 있다. 각 문항에 대한 분석 후 각 문항이 묻고자 하는 내용에 따라 어떤 오류가 나타나는지 살펴보고자 한다.

1) ①번 문항

문제 : 중심이 직선 $y = x - 2$ 위에 있고 점 $C(2, 2)$ 를 지나며 y 축에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

[표 6] 문항 1의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 6] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 1

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
73.33	11.67	4.17	0.83	1.67	0.83	0.83	6.67	26.67

이 문항은 부적절한 논리적 추론(A형)이 가장 높게 나타났는데, 이는 중심이 $y = x - 2$ 위에 있고 y 축에 접하

는 원이기 때문에 원의 중심을 $(a, a - 2)$ 라 하면 반지름 $r = a$ 인데 $r = a - 2$ 라고 조건을 잘못 사용하여 원의 방정식을 1개만 찾게 되는 경우였다. 잘못된 결론(D형)은 반지름만을 구하고 문제에서 원한 원의 방정식은 구하지 않고 끝낸 경우이다. 비교적 평이한 문제로 많은 학생들이 정답을 쉽게 구한 문항이다.

2) ②번 문항

문제 : 중심이 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하여라.

[표 7] 문항 2의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 7] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 2

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
33.33	56.67	0	1.67	0	0	0	8.33	66.67

이 문항은 부적절한 논리적 추론(A형)이 가장 많이 나타났는데, 중심이 $y = 2x + 1$ 위에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하므로 중심을 $(a, 2a + 1)$ 이라하면 $a = |2a + 1|$ 이 성립해야하는데 많은 학생들이 절댓값 기호를 빼고 계산을 하는 오류가 가장 많았다. 절댓값을 생각한 경우에도 원이 제 2사분면과 제 3사분면에 존재하기 때문에 원의 중심의 좌표의 x 값과 y 값이 같은 경우와 절댓값이 같은 경우로 분리해야하는데 이를 분리하지 않은 경우가 있었다. 정답을 제시한 학생들은 $y = 2x + 1$ 와 $y = x$, $y = -x$ 의 교점을 찾아 원의 중심으로 사용함으로써 정답을 구할 수 있었다. 이 문항은 의외로 많은 학생들이 오류를 범하였던 문제로 학생들과의 면담을 해본 결과 그림을 이용한 문제 풀이 방법을 사용하지 않고 대수적인 식을 이용한 문제를 해결하면서 머릿속에 떠오르는 원의 형상이 하나뿐이었기에 다른 원이 또 존재할 것이라는 생각을 하지 못했다고 설명하였다.

3) ③번 문항

문제 : 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심사이의 거리를 구하여라.

[표 8] 문항 3의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 8] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 3

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
77.5	4.17	1.67	0	5.83	0.83	0	10	22.5

이 문항은 잘못된 결론 오류(D형)가 가장 많이 나타났는데 원이 x 축, y 축에 동시에 접하면서 $(-1, 2)$ 를 지나므로 원은 제2사분면 위에 존재하기 때문에 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2$ 이라하고 이 원 위에 점 $(-1, 2)$ 이 지나므로 a 를 구하면 $a = -1, -5$ 가 나오는데 a 의 값을 구한 후 두 원의 중심 사이의 거리를 구하지 않은 경우가 가장 많았다. 그 다음으로 부적절한 논리적 추론(A형)이 많이 나타났는데 이는 원이 몇 사분면에 존재하는지 생각하지 않은 채 x 축, y 축에 동시에 접한다는 사실만 생각하고 원의 중심의 x, y 좌표가 서로 같을 것이라 생각하고 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 으로 원의 방정식을 세워 계산했기 때문이다.

4) ④번 문항

문제 : 좌표평면 위에서 두 점 $A(2, -2), B(5, 4)$ 까지의 거리의 비가 1:2로 일정하게 움직이는 점 P 의 자취의 방정식을 구하여라.

[표 9] 문항 4의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 9] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 4

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
47.5	7.5	11.67	9.17	0	0	0	23.33	52.5

이 문항은 점 $P(x, y)$ 의 자취를 구하는 문제이다. 기술적 오류(C형)는 점 A, B 와의 거리비가 1:2이므로 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2, \overline{PA}^2 : \overline{PB}^2 = 1 : 4$ 로 식을 세워 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 사용하면 되는 문제이나 많은 학생들이 처음에는 $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$ 으로 옳게 식을 세웠으나 다음 단계에서 $\overline{PA}^2 : \overline{PB}^2 = 1 : 2$ 로 식을 세워 오류를 범하였다. 풀이과정의 생략(B형)은 문제풀이를 끝까지 이행하지 못한 경우로 문제 풀이에 필요한 식

이 길어짐에 따라 문제 풀이에 대한 확신이 없어 포기하는 경우가 많아지는 것으로 생각된다.

5) ⑤번 문항

문제 : 두 점 $A(2, -3), B(7, -5)$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 삼각형 ABP 의 무게중심의 자취의 방정식을 구하여라.

[표 10] 문항 5의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 10] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 5

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
46.67	0.83	15	4.17	1.67	0	0	31.67	53.33

이 문항은 삼각형의 무게중심의 자취를 구하는 문제로 새로운 무게중심 $G(x, y)$ 을 설정하여 문제를 해결해야 하는 문제이다. 점 $P(a, b)$ 라 하면 P 는 원 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족한다. 따라서 $x = \frac{a+2+7}{3}, y = \frac{b+(-3)+(-5)}{3}$ 이므로, $a = 3x - 9, b = 3y + 8$

로 변형하여 $a^2 + b^2 = 1$ 에 대입하여 정답을 구하는 문제이다. 기술적 오류(C형)는 식에 올바르게 대입하였으나 끝까지 계산하는 과정에서 계산 실수가 생긴 경우이다. 풀이과정의 생략 오류(B형)는 복잡하고 긴 문제풀이 식을 끝까지 이행하지 못한 경우이다. 잘못된 결론 오류(D형)는 a, x 에 관한 식은 잘 세웠으나 마지막에 $a^2 + b^2 = 1$ 에 대입해야 할 식을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 $x = \frac{a+9}{3}, y = \frac{b+8}{3}$ 를 대입한 경우이다. 자취의 방정식을 묻는 문

제로 많은 학생들이 무응답을 많이 보였는데 미지의 점을 존재한다고 가정 한 후 무게 중심을 구하고 마지막에 조건을 만족하는 원의 방정식에 대입해야하는 총 3단계의 문제 풀이 단계를 요구하는 문제이기 때문에 많은 학생들이 문제 풀이에 곤란함을 느껴 많이 포기한 것이라 생각된다.

6) ⑥번 문항

문제 : 원 $x^2 + y^2 - 2x = 3$ 과 직선 $y = kx + 2$ 가 한

점에서 만나도록 k 의 값을 구하여라.

[표 11] 문항 6의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 11] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 6

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
62.5	2.5	7.5	7.5	8.33	0	0	11.67	37.5

이 문항은 원의 중심과 직선까지의 거리와 원의 반지름의 길이를 비교하는 방법으로 해결하거나, 두 식을 대입하여 x 에 관한 이차방정식의 판별식을 이용하여 문제를 해결하는 문제이다. 기술적 오류(C형)는 두 번째 방법을 이용하여 문제를 해결하려는 과정에서 판별식을 잘못 사용하여 나타나거나 점과 직선사이 거리 공식에서 x^2 의 계수를 제대로 파악하지 못한 경우이다. 잘못된 결론 오류(D형)는 문제를 잘 해결하였으나 $k = -\frac{4}{3}, 0$ 중에서 한 가지만 답으로 제시한 경우이다. 직선 기울기가 0일 수 없다는 잘못된 판단으로 인한 오류가 많았다.

7) ⑦번 문항

문제 : 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대하여 기울기가 -2 인 접선의 방정식을 구하여라.

[표 12] 문항 7의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 12] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 7

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
75.83	1.67	0.83	3.33	1.67	0	0	16.67	24.17

이 문항은 접선의 기울기가 주어진 경우 원에 접하는 접선의 방정식을 구하는 문제로 공식화 되어 있어 많은 학생들이 정답을 쉽게 구하였다. 잘못된 결론 오류(D형)는 접선의 방정식을 $y = -2x + b$ 라 제시한 후 원의 중심인 원점과 접선까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 임을 이용하여 문제를 해결한 후 완전한 접선의 방정식을 제시해야하는데 $b = \pm 5$ 라는 답만을 제시한 경우이다. 기술적 오류(C형)는 접선과 중심까지의 거리를 구하는 공식을 사용하여 문제를 해결하는 과정에서 $\sqrt{5}$ 를 사용하다 중간에 $\sqrt{\quad}$ 의 기호가 빠져 생긴 오류가 많았다.

8) ⑧번 문항

문제 : 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 한 점 $A(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

[표 13] 문항 8의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 13] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 8

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
75	0	0.83	0.83	0	0.83	0	22.5	25

이 문항은 공식화 되어 있는 문항으로 정답을 쉽게 구할 수 있는 문항이다. 기술적 오류(C형)는 정답을 제시할 때 $y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ 를 $3x - 4y + 25 = 0$ 으로 고치는 과정에서 y 의 계수 부호를 틀리는 경우가 가장 많았다. 풀이과정의 생략 오류(B형)는 $y = m(x+3) + 4$ 라 접선을 가정한 후 기울기 m 을 구하는 과정에서 직선과 원의 중심 사이의 거리를 구해야 하는 단계에서 문제풀이 과정이 멈춘 경우가 많았다.

9) ⑨번 문항

문제 : 점 $(3, 4)$ 에서 원 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

[표 14] 문항 9의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 14] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 9

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
50	0.83	6.67	5	2.5	4.17	0	30.83	50

이 문항은 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제로 $y = m(x-3) + 4$ 를 접선의 방정식이라 가정하고 원의 중심 $(2, 1)$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 임을 이용하여 m 의 값 $2, -\frac{1}{2}$ 을 구한 후 구 값의 곱인 -1 을 구하면 된다. 잘못된 결론 오류(D형)는 기울기의 곱을 제시한 것이 아니라 기울기 값만 제시한 경우이다. 잘못된 정리의 사용 오류(E형)는 교과서에 나와 있는 원의 중심이 원점인 경우의 공식만을 암기하여 중심이 원점이 아닌 경우에는 그대로 적용하면 안 되는 것을 모르는 경우이다.

기술적 오류(C형)는 원의 중심과 접선까지의 거리 공식에서 부호를 잘못 기술한 경우이다.

10) ⑩번 문항

문제: 점 $P(1,3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 에 접선을 그을 때, 점 P 와 접점 사이의 거리를 구하여라.

[표 15] 문항 10의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 15] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 10

정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
48.33	0	4.17	0	1.67	4.17	4.17	37.5	51.67

이 문항은 그림을 이용하여 피타고라스 정리를 사용하는 간단한 문항이다. 그런데 의외로 많은 학생들이 도형을 이용하지 않고 대수적인 방법으로 문제를 해결하려고 한 문항이다. 잘못된 결론 오류(D형)는 접선의 방정식을 구한 경우이며, 시각적 오류(F형)는 원의 중심에서 접점을 연결한 선분은 접선과 수직이나 그림을 그릴 때 원의 중심과 접점을 이은 선분과 원의 중심과 점 P 를 이은 선분이 수직이라고 잘못 그려 도형을 잘못 사용한 경우이다.

11) ⑪번 문항

문제: 반지름의 길이가 각각 4,3이고, 중심거리가 9인 두 원 C, C' 가 있다. 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 구하여라.

[표 16] 문항 11의 정답률 및 오류유형별 오답률
[Table 16] Rates of Correct & Wrong Answers of Item 11

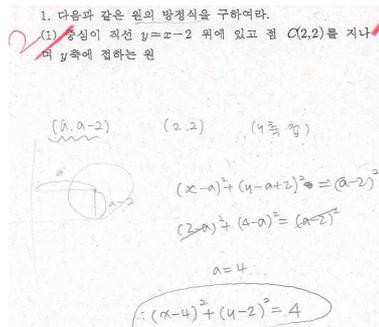
정답률 (%)	오류유형							오답률 (%)
	A	B	C	D	E	F	무응답	
49.17	0.83	3.33	2.5	3.33	2.5	0.83	38.33	50.83

이 문항에서 잘못된 결론 오류(D형)는 공통외접선과 공통내접선을 혼동하여 답을 서로 교차해서 제시한 경우이다. 기술적 오류(C형)는 피타고라스 정리를 이용하는 과정에서 숫자 계산을 잘못한 경우이다. 의외로 쉬운 문제였음에도 오답률이 높은 것은 마지막 문제였기에 학생들이 시간이 부족하여 무응답의 비율이 높았기 때문이라 생

각된다.

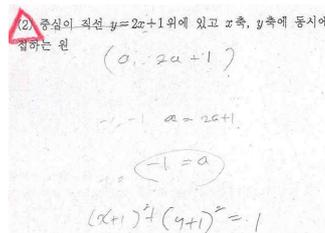
4. 오류 유형별 특징

1) 부적절한 논리적 추론 (A형)



[그림 1] 오류 A형_1
[Fig. 1] Error A_1

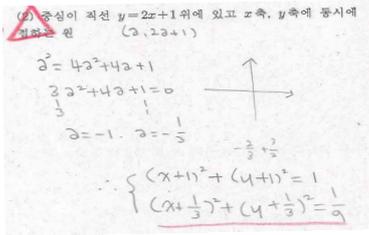
1번 문제로 원의 중심이 직선 $y = x - 2$ 위에 있어 중심 좌표를 $(a, a - 2)$ 라 설정한 후 원이 y 축에 접하므로 원의 반지름은 원 중심의 x 좌표의 절댓값과 같으므로 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - a + 2)^2 = a^2$ 이라 세우면 된다. 그 후 이 원이 지나는 점 $C(2, 2)$ 를 대입하여 a 값을 구하면 되는 문제이다. 위의 그림은 반지름을 $(a - 2)$ 로 잘못 생각함으로써 오류가 나타난 경우이다.



[그림 2] 오류 A형_2
[Fig. 2] Error A_2

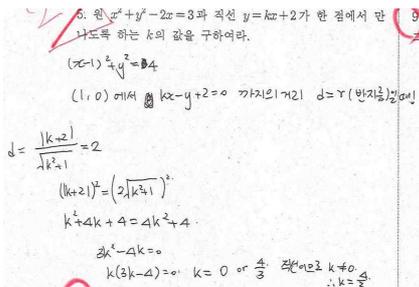
2번 문제로 원의 중심이 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 원이 x, y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름은 원 중심의 x 좌표의 절댓값과 y 좌표의 절댓값이 같으므로

$|a|=|2a+1|$ 을 해결하여 a 값을 구하는 문제이다. 위 풀이는 절댓값을 생각하지 않고 문제를 해결함으로써 오류가 발생한 경우이다.



[그림 3] 오류 A형_3
[Fig. 3] Error A_3

2번 문제로 [그림 2]에서처럼 $|a|=|2a+1|$ 을 해결하여 a 값을 구하면 되는 문제이다. 위 풀이는 절댓값에 대해 a 의 값은 옳게 구했으나 원이 어느 사분면에 존재하는지 생각하지 않은 채 원의 중심의 x, y 좌표가 같을 것이라 하여 $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ 를 생각하지 못해 오류가 일어난 경우이다. 6번 문제로 원과 직선이 접하기 위한 조건을 찾는 문제이다. 위 학생은 원 중심에서 직선까지의 거리와 원의 반지름이 같으면 원과 직선이 접한다는 사실을 알고 있었으나, 마지막 결론 단계에서 $k=0$ 인 경우에 k 는 직선의 기울기를 나타내는데 $k=0$ 인 경우에는 직선이 성립하지 않는다는 부적절한



[그림 4] 오류 A형_4
[Fig. 4] Error A_4

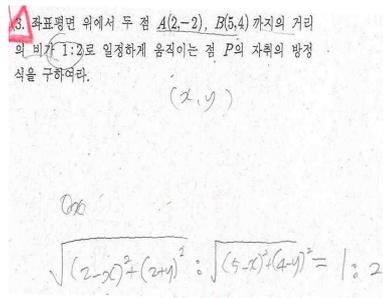
논리적 추론으로 인해 답을 $k = \frac{4}{3}$ 만 제시한 경우이다.

2) 풀이과정의 생략 (B형)

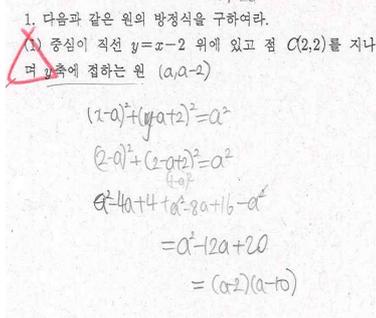
[그림 5]는 4번 문제로 두 점 $A(2, -2), B(5, 4)$ 까지 거리비가 1:2로 일정한 움직이는 점 P 의 좌표를 찾는 문제이다. $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$ 이므로, 다음 등식이 얻어진다.

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} : \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = 1 : 2$$

이제, 이 등식을 풀면 되는 문제인데 [그림 5]는 그 다음의 계산이 생략된 경우이다.



[그림 5] 오류 B형_1
[Fig. 5] Error B_1



[그림 6] 오류 B형_2
[Fig. 6] Error B_2

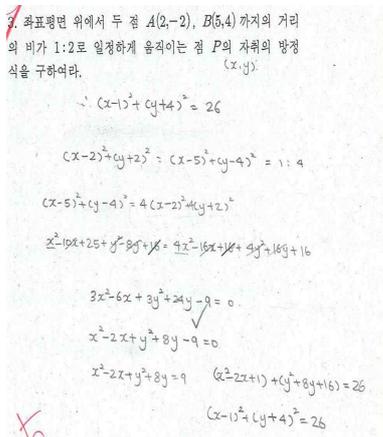
[그림 6]은 1번 문제로 원의 중심이 직선 $y = x - 2$ 위에 있어 중심 좌표를 $(a, a - 2)$ 라 설정한 후 원이 y 축에 접하므로 원의 반지름은 원 중심의 x 좌표의 절댓

값과 같으므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a+2)^2=a^2$ 이라 세우면 된다. 그 후 이 원이 지나는 점 $C(2,2)$ 를 대입하여 a 값을 구하면 되는 문제이다. 위 그림은 a 값을 거의 다 구한 후에 원의 방정식을 구하기 직전까지의 단계에서 풀이 과정이 멈춘 경우이다.

3) 기술적 오류 (C형)

[그림 7]은 4번 문제로 두 점 $A(2,-2), B(5,4)$ 까지의 거리가 1:2로 일정한 움직이는 점 P 의 좌표를 찾는 문제이다. $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$ 이므로, 다음 등식을 얻을 수 있다.

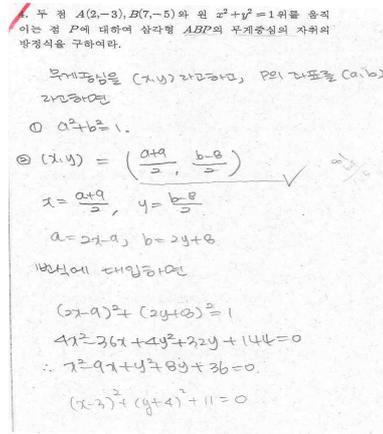
$$\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}:\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=1:2$$



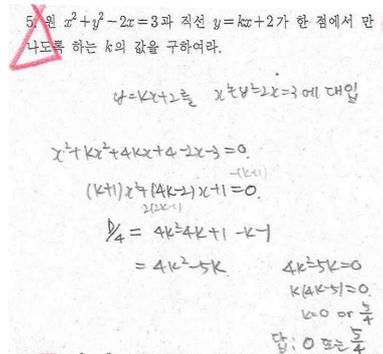
[그림 7] 오류 C형_1
[Fig. 7] Error C_1

이제 이 등식을 푸는 과정에서 $3x^2-6x+3y^2+24y-9=0$ 이고 이 식을 모두 3으로 나누는 과정에서 마지막 상수항을 나누지 않고 $x^2-2x+y^2+8y-9=0$ 으로 기술하는 오류가 발생한 경우이다.

다음 [그림 8]은 5번 문제로 주어진 두 점과 원 위의 임의의 한 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심의 자취를 구하는 문제인데 무게 중심의 좌표를 $(\frac{a+9}{3}, \frac{b-8}{3})$ 으로 잡아야하는데, 위의 그림에서는 분모를 2로 잘못 기술하여 오류가 발생한 경우이다.



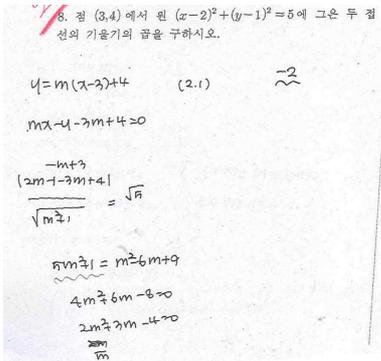
[그림 8] 오류 C형_2
[Fig. 8] Error C_2



[그림 9] 오류 C형_3
[Fig. 9] Error C_3

[그림 9]는 6번 문제로 원과 직선의 방정식을 연립하여 x 에 관한 이차방정식에서 판별식을 이용하여 원과 직선이 공통근을 갖기 위한 조건을 이용해 문제를 해결하고 있다. 위 그림에서는 두 식을 연립하는 과정에서 x^2 의 계수가 k^2+1 인데 $(k+1)$ 로 계산하였기에 오류가 나타난 경우이다.

[그림 10]은 9번 문제로 원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식을 구하는 문제인데 주어진 점을 지나는 접선의 식을 구한 후 원의 중심 $(2,1)$ 까지의 거리가 원의

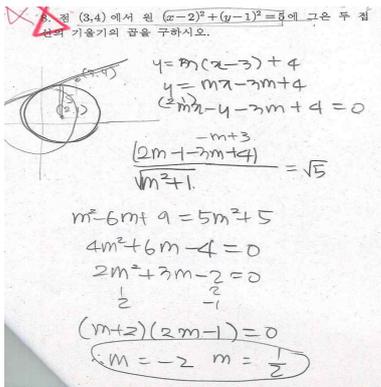


[그림 10] 오류 C형_4
[Fig. 10] Error C_4

반지름인 $\sqrt{5}$ 와 같다고 식을 세운 후 해결하면 되는 문제이다. 위 그림에서 식을 잘 세우다가 분수를 계산하는 과정에서 분모에 $\sqrt{5}$ 를 곱하면서 계산 실수가 나타난 경우이다.

4) 잘못된 결론 (D형)

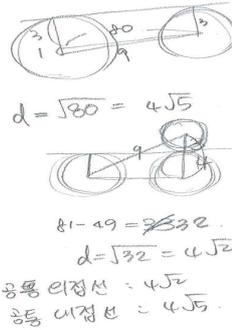
[그림 11]은 9번 문제로 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 기울기 곱을 구하는 문제이다. 위 그림은 직선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 직선까지의 거리가 반지름과 같다는 것을 이용해 문제를 해결하였는데 마지막에



[그림 11] 오류 D형_1
[Fig. 11] Error D_1

기울기 -2 와 $\frac{1}{2}$ 을 구하였으나, 두 기울기 곱인 -1 을 구하지 않은 경우이다.

10. 반지름의 길이가 각각 4,3이고, 중심 거리가 9인 두 원 C, C'가 있다. 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 구하시오.

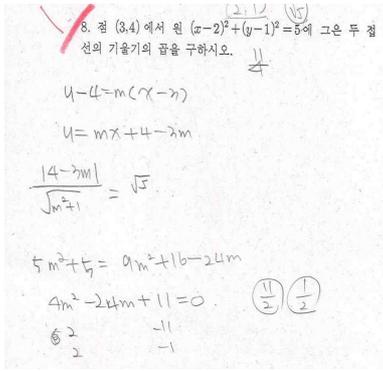


[그림 12] 오류 D형_2
[Fig. 12] Error D_2

[그림 12]는 11번 문제로 두 원의 공통내접선과 공통외접선을 구하는 문제이다. 위 그림은 공통내접선과 공통외접선을 그림을 이용해 잘 구하고 있었으나 마지막에 공통외접선과 공통 내접선 용어를 정확히 알지 못하여 답을 바꾸어 쓴 경우이다.

5) 잘못된 정리의 사용 (E형)

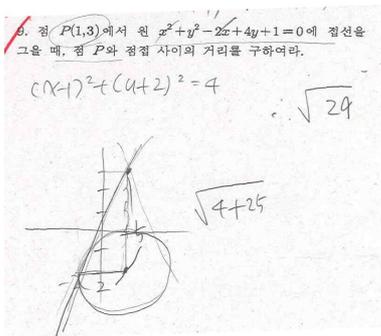
[그림 13]은 9번 문제로 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 기울기 곱을 구하는 문제이다. 위 그림은 기울기가 주어진 경우의 접선의 방정식을 구하는 공식을 이용하여 문제를 해결하려 하였으나 이 공식은 원의 중심이 원점일 때 사용할 수 있는 공식이기에 이 문제에 적절하지 않은 공식이다.



[그림 13] 오류 E형
[Fig. 13] Error E

6) 시각적 오류(F형) 오류

[그림 14]는 10번 문제로 원 밖에서 그은 접선의 방정식을 이용하여 원 밖의 한 점과 접점 사이의 거리를 구하는 문제이다. 이 문제는 식을 이용한 문제가 아니라 그림을 이용한 문제로써 직각 삼각형을 잘 그린다면 쉽게 해결할 수 있는 문제이다. [그림 14]는 학생이 직각 삼각형을 잘못 그려서 빗변을 잘못 찾은 경우이다.



[그림 14] 오류 F형
[Fig. 14] Error F

V. 결론 및 제언

본 연구는 비평준화 우수학교 학생들을 지도하면서 원의 방정식 서술형 문제 풀이과정에서 학생들이 보이는 오

류의 유형과 발생 빈도를 파악하고자 함이다. 일반적으로 비평준화 지역 상위 학교에 재학하는 학생들은 평준화된 지역의 학생들이 나타내는 오류의 유형이나 빈도와 차이가 있으리라 생각한다. 이를 위해 고등학교 1학년 120명의 학생을 대상으로 원의 방정식의 전 영역을 평가할 수 있는 서술형 문제 11문항을 토대로 학생들의 수학적 오류 유형과 빈도를 분석하였다.

실험 결과 학생들이 가장 많이 범하는 오류 유형은 논리적으로 부적절한 추론(38.81%)이었다. 이는 학생들이 서술형 문제풀이 과정에서 원의 존재를 한 개로만 생각하여 문제를 해결하면서 여러 상황에서 원이 존재할 수 있음을 간과했기 때문에 발생하였다. 두 번째로 많이 나타난 오류 유형은 풀이과정의 생략(25%)인데, 복잡한 풀이 단계를 제시하지 않고 중간까지만 문제 풀이를 서술한 경우이다. 이는 학생들이 복잡한 문제에는 자신감이 없어서 중간 과정에서 포기한 경우로 볼 수 있다. 세 번째로 많이 나타난 유형은 기술적 오류(15.67%)로 풀이 과정 중에서 숫자의 변형이 일어난 경우가 가장 많이 나타났다. 네 번째로는 잘못된 결론(11.94%)로 문제를 끝까지 읽지 않을 채 계산의 결과만을 문제의 정답으로 제시한 경우이다. 다섯 번째로는 잘못된 정리의 사용(5.97%), 여섯 번째로는 시각적 오류(2.61%)가 나타났다.

연구 참여 학생들의 수학 성취 수준이 타 학교에 비해 높은 관계로 수학적 개념을 모르거나 정리의 내용을 몰라서 발생하는 오류(E형)는 매우 낮은 비율로 나타났다(예: 문항 1-3). 또한 도형에 관한 문제를 대수적으로 해결함에 있어 필요한 도형을 이용하지 않아 생기는 오류로 볼 수 있는 시각적 오류(F형) 역시 낮은 비율로 나타났다. 이는 일반학교 또는 부진아 학생들과 차이점을 보이는 오류의 특성이라고 할 수 있다.

부진아 학생들의 원의 방정식을 다룬 윤인준, 고상숙(2013)에서 학생들은 점과 직선사이 거리에 대한 해석 기하적 개념을 원의 성질을 이용하여 관계적으로 형성하지 못하고 공식을 외워서 시도하는 모습을 보였다. 하지만 본 연구의 학생들은 도형을 대수적으로 접근하는 과정에서 식을 세우지 못해서가 아니라 예를 들어 식을 세울 때 반지름을 잘못 기입하거나 원의 중심의 위치를 정밀하게 고려하지 않는 점 등으로 인하여 식 안에 일부분을 놓친 것으로서 부적절한 논리적 추론의 오류가 나타났다. 이는 학

생들이 고등학교에서 처음으로 배운 해석기하를 이용하여 문제를 해결할 때 개념형성이 이루어지지 않아서라기보다 문제 해결과정을 계획하고 문제 풀이를 실행한 후에 반성적 사고 없이 결론을 내리기 때문으로 생각된다. 즉 문제 풀이과정을 다시 한번 점검하고 심사숙고하도록 지도하면 쉽게 수정될 수 있는 문제이다. 이와 같이 어떤 유형인가도 중요하지만 그 유형의 원인이 무엇인지도 정성적인 기법으로 조사하는 것도 중요하다는 것을 시사한다.

이런 오류 유형의 분석 연구는 학생들이 보이는 오류의 유형, 빈도, 나아가 그 원인을 교사가 파악하여 차후 수업에 반영한다면 학생들의 오류를 방지할 수 있으며, 학생들의 반성적 사고를 촉진시킬 수 있기 때문에 유효한 과정이다.

비평준화지역 상위 그룹 학생들이 다니는 학교의 학생들을 대상으로 문항의 분석에서 1번-3번 문항이 변별도가 낮은 것으로 나타났을지라도 이들을 제거하지 않고 연구 결과 내용에 포함하였다. 그 이유는 이들 문항들에 대해 다른 연구 집단에서는 다른 결과를 제시할 가능성이 있을 것이므로 후속연구를 위해 결과분석에 이들 문항도 포함하여 제시하였다. 본 연구는 고등학교 원의 방정식에 관한 문항에 대한 오류 분석이기 때문에 다양한 다른 영역에 뿐만 아니라 다양한 집단을 대상으로 오류 분석이 꾸준히 이루어져야 한다. 또한, 이런 연구 결과를 토대로 학생들의 학습에 도움을 줄 수 있는 교수·학습 프로그램의 개발 연구가 병행하여 시도될 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2012). 수학과 교육과정 해설서, 서울: 교육과학기술부.
- Ministry of Education (2012). *The Curriculum of Mathematics*, Seoul: the Author.
- 경기도 교육청 (2013). 창의 지성 역량을 키우는 수업 평가: 2013 중등 서술형 논술형 평가 예시자료, 경기도: 경기도 교육청.
- Gyungi Provincial Office of Education (2013). *An assessment of math classes to raise the power of creativity & intelligence: Some examples for descriptive or essay types of items in 2013*, Gyungi Province: Gyungi Provincial Office of Education.
- 김래영, 이민희 (2013). 수학과 서술형 평가에 대한 중학교 교사들의 인식 연구, 수학교육학연구 23(4), 533-551.
- Kim, R. Y., & Lee, M. H. (2013). Middle school mathematics teachers' perceptions of constructed-response assessments, *Journal of Educational Research in Mathematics* 23(4), 533-551.
- 김래영, 김구연, 노선숙, 김민경, 전지훈, 김기영, 이민희. (2012). 중등 수학과 서술형평가 체계의 실제와 대안적 발전 방향 모색: 경기도 창의 서술형 평가와 미국 오하이오 주 평가를 중심으로, 수학교육논문집 26(3), 273-299.
- Kim, R. Y., Kim, G., Noh, S., Kim, M. K., Jeon, J., Kim, K., Y., & Lee, M., H. (2012). Current status and future direction of constructed-response assessments, *Communications of Mathematical Education* 23(3), 273-299.
- 김부미 (2004). 인지심리학의 관점에서 수학적 오류의 분석가능성 탐색, 수학교육학연구 14(3), 239-266.
- Kim, B., M. (2004). Cognitive psychological approaches on analysing students' mathematical errors, *Journal of Educational Research in Mathematics* 14(3), 239-266.
- 김차숙, 류희찬 (2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구, 대한수학교육학회 학술발표대회 (pp. 405-426). 숭실대학교.
- Kim, C., & Ryu, H. (2003). A study on the analysis of errors and corrections in solving linear equation of the first graders in middle school. *The Proceedings of Korea Society of Educational Studies in Mathematics*(pp. 405-426). Seoul: Soongsil University.
- 서울특별시교육청·서울특별시교육정보연구원 (2011). 수학과 서술형 평가 문항 자료집, 서울: 서울특별시교육정보연구원.
- Seoul Education Research and Information Institute (2011). *The Materials of Descriptive Problems of Mathematics*, Seoul: Author.
- 우정호 (2003). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.
- Woo, J. H. (2003). *The Educational Foundation of School Mathematics*, Seoul: Seoul National University.
- 유희찬, 조완영, 조정묵, 임미선, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 정선윤 (2012). 고등학교 수학, 서울: (주)미래엔 킬처그룹.

- Woo, H. C., Jo, Y., Jo, J., Lim, M., Yoo, I., Han, M., Park, W., Nam, S. Jung, S. (2012). *Mathematics of High School*, Seoul: Future & Culture Ltd.
- 윤인준, 고상숙 (2013). 탐구형 소프트웨어를 활용한 해석기하에서 학습부진학생들의 개념형성에 관한 연구, 한국학교수학회논문집 15(4), 643-671.
- Yoon, I. J., & Choi-Koh, S. (2012). Skemp's concept development underachievers' analytic geometry using the exploratory software, *Journal of the Korean School Mathematics Society* 15(4), 643-671.
- 이종희, 김부미 (2006). 일차방정식에서 오류 탐지-교정 학습법의 교수학적 효과 분석, 교과교육학연구 10(2), 461-483.
- Lee, J. H., & Kim, B. M. (2006). The Effects of 'Error Detection-Correction Instruction' on Learning Linear Equations, *Journal of Research in Curriculum Institution* 10(2), 461-483.
- 이지현, 김구연 (2013). 서술형 평가 문항 분석: 수학과 교육과정의 성격 및 목표와의 적합성을 중심으로, 한국학교수학회논문집 16(4), 899-925.
- Lee, J., & Kim, G. (2013). An Examination of the Alignment between 2007 Mathematics Curriculum and Constructed-Response Assessment, *Journal of the Korean School Mathematics Society* 16(4), 899-925.
- 한경민 (2013). 원의 방정식에서 오류유형 분석과 오류극복 학습에 관한 연구, 석사학위논문, 단국대학교.
- Han, K. M. (2013). *An Analysis on the Types of Errors in Mathematics and How to Overcome the Errors in the Area of the Equation of a Circle*. Unpublished Thesis. Dankook University.
- Artigue, M., & Viennor, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials, *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* 3, 1-8.
- Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks, *Educational Studies in Mathematics* 11, 1-21.
- Clements, M. A., & Del Campo, G. (1987). Fractional understanding of fractions: variations in children's understanding of fractional concepts, across embodiments, *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* 3, 98-110.
- Cornu, B. (1991). Limit In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers.
- Hardar, N. M., Zaslavsky, O & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* 18(1), 3-14.
- Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, 4. Reston, VA: Author.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education* 10(3), 163-172.

An analysis of the mathematical errors on the items of the descriptive assessment in the equation of a circle

Kyung Min Han

Sooji High School, Korea
E-mail : rudals-82@hanmail.net

Sang Sook Choi-Koh[†]

Department of Mathematics Education, Dankook University, Korea
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

This study was to investigate the types of errors and the frequency of errors to understand students' solving process on the descriptive items with the students of an excellent high school which located in a non-leveling local school district of Gyeonggi Province. All 11 items were developed in the equation of a circle and 120 students who attended this high school participated in solving them. The result showed a tendency as follows: Logically invalid inference(Type A, 38.83%) of errors, Omission error of the problem solving process(Type B, 25%), Technical error(Type C, 15.67%), Wrong conclusion(Type D, 11.94%), Use of wrong theorem(Type E, 5.97%), and Use of wrong picture(Type F, 2.61%). The logically invalid inference the students showed with a largest tendency was made because of the lack of reflection. This meant that this error could be corrected in a little treatment of carefulness.

* ZDM Classification : D74

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key words : Descriptive Problem, Error Type, Equation of a Circle, High School in a Non-leveling Region

[†] Corresponding author

* This article was excerpted from the author's thesis in part.