韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.4.493
2014. 11. 제 53권, 제 4호, 493-507.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2014, Vol. 53, No. 4, 493-507.

정다면체 문제 해결 과정에서 나타나는 고등학교 학생들의 심상에 관한 사례연구

홍갑룡(대구과학고등학교)
김원경(한국교원대학교)†

Ⅰ. 서론

공간 능력이란 공간속의 사물의 이미지를 인식하고 회상하며 창출하고 소통할 수 있는 정신적 과정이다 (Linn & Pertersen, 1985). 공간 능력은 공간 시각화, 공간 방향성, 공간 관계성의 3가지 요소로 측정될 수 있다 (Lohman, 1988). 이 때, 공간시각화는 공간에서 사물의 움직임을 상상할 수 있는 능력이고, 공간 방향성은 사물의 시각적인 회전 방향 변화에도 혼동하지 않고 방향을 측정하는 능력이다. 또, 공간 관계성은 머릿속에서 공간에 있는 사물을 빠르고 정확하게 회전시킬 수 있는 능력이다.

공간 능력이 있는 학생들은 측정영역에서의 성취도가 높게 나타나는 경향이 있고(Gathercole & Pickering, 2000), STEM 성취도도 높은 것으로 나타났다(Wai, Lubinski, & Benbow, 2009). Newcombe(2010)은 지난 수년간의 연구 결과를 종합하여 공간 능력이 수학 및 과학 과목에서 학생들의 이해도에 큰 영향을 끼친다고 하였다. 이와 같은 연구 결과는 공간 능력의 향상이 수학교육의 중요한 목표 중의 하나가 될 수 있음을 시사하는 것이다. 실제로 NCTM(2000)은 평면 및 공간에서의 시각화 능력과 추론 능력을 학생들이 개발해야할 핵심 능력이라고 하였다.

공간 능력의 향상을 위해서는 심상(mental image)을 형성하는 것이 중요하다. 심상은 학생들의 경험과 인지수준에 따라 형성된 개인 차원의 관념 또는 직관과 같은 인지 유형이라고 할 수 있다. 학생들은 형성된 심상을 해석하고, 문제 해결에 적절한 정보로 변형하여 공간 문제를 해결할 수 있다(Gutierrez, 1996). Freudenthal(1973)은 심상의 구성이 개념 형성에 선행하는 것으로 보았으며 어떤 개념을 가르치기 위해서는 그 개념 자체보다는 먼저 개념에 대한 심상을 구성할 수 있도록 해주어야 한다고 하였다. 심상의 구성을 고려하지 않은 형식적・언어적 정의를 통한 개념 학습은 오개념 형성의 원인이 될 수 있으므로 새로운 개념의 학습에서는 먼저 전형적인 예를 통해 심상을 구성해 나가는 활동이 강조될 필요가 있다.

학생들은 공간 도형을 탐구할 때, 지필 환경에서보다 컴퓨터 환경에서 풍부한 심상을 형성할 수 있다. Gutierrez(1996)는 컴퓨터 화면상에서 공간도형을 관찰・회전할 때, 도형의 특정 위치가 심상의 연속체의 일부로 나타나고 그것이 상호 관련된 심상의 집합에서 유의미한 사고로 발전된다고 하였다. 따라서 3D 동적 기하 프로그램은 학생들의 입체도형에 대한 심상을 형성하는데 도움을 줄 수 있다.

이에 본 연구에서는 학생들의 공간 능력을 향상시키기 위해서 먼저 심상의 형성이 필요하다고 생각하고, 이를 형성・발전 시켜줄 수 있는 3D 동적 기하 프로그램을 적용한 수업에서 학생들의 기하 과제 수행 과정을 분석하고자 한다. 이를 위해 정다면체 꼭짓점 과제를 개발하고, 이를 해결하는 과정에서 학생들이 형성한 심상을 분석하기 위해 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

「3D 동적 기하 프로그램을 활용하여 정다면체 꼭짓점 과제를 수행하는 과정에서 형성한 학생들의 심상은 어떤 것이며, 학생들은 형성된 심상을 어떻게 해석하여

* 접수일(2014년 09월 12일), 수정일(2014년 10월 12일), 게재확정일(2014년 11월 15일)
* ZDM분류 : U64
* MSC2000분류 : 97U70
* 주제어 : 정다면체, 심상, 3D 동적 기하프로그램.
* 이 논문은 한국교원대학교 2014년도 KNUE 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.
† 교신저자

문제를 해결하는가? 」

정다면체는 쌍대성과 순환성의 성질을 가지고 있다. 이와 같은 정다면체의 성질을 파악하기 위해서는 학생들이 정다면체의 꼭짓점 및 내부 구조를 알아야 한다. 정다면체의 꼭짓점을 찾도록 도와주는 실물 교구나 소프트웨어는 많이 있지만 기존의 실물 교구들은 꼭짓점을 찾는 과정에서 탐구 과정을 보여주는 것이 아니라 결과만을 보여 주고, 또 3D 동적 기하 프로그램은 정다면체의 쌍대성이나 순환성을 이해하는데 적합하지 않다. 따라서 본 연구에서는 정다면체의 쌍대성과 순환성을 탐구하고 이를 통해 학생들이 심상을 형성할 수 있는 새로운 3D 기하 프로그램을 활용하여 연구문제를 해결하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 심상

심상의 사전적 정의는 기억이나 상상에 의해서 생각할 수 있는 것이 아닌 비현실적, 비실제적인 것에 대한 마음속의 형상이다. 예를 들어 달을 봤을 때 단순히 눈에 비친 모습이 머릿속에서 형상화 된 것은 시각적 표상이고 거기에 더하여 달과 관련된 감정이나 상상, 즉 쓸쓸함이나 계수나무 등이 덧붙여진 것이 심상이다. 심상에 대한 연구는 주로 인지 심리학자에 의해서 수행되어 왔다. 강윤희(2007)는 단순한 판단에서부터 복잡한 관념을 다루는 사유에 이르기까지 심상을 바탕으로 하지 않고 이루어지는 사유를 생각할 수 없다고 하면서 심상을 표상하는 행위가 우리의 사유 활동에 있어서 필수적이라 하더라도 심상을 표상하는 것은 육안으로 볼 수도 없고 관찰 가능한 실재물이 아니기 때문에 심상에 대한 탐구는 수행하기 어렵다고 하였다.

그러나 수학교육학자들은 인지심리학자들과 다르게 심상을 그림, 도표, 텍스트, 기호 정보를 바탕으로 마음속에 생성한 형상으로 접근하였다(Gutierrez, 1996). Gutierrez는 이전 학자들의 선행 연구를 종합하여 심상을 시각적, 공간적 요소로 표현된 수학적 개념이나 성질들의 인지적 표상이라고 하였다. 도종훈(2006)은 심상을 학생들의 경험과 인지 수준에 따라 형성되는 개인 차원의 개념 형태로써 개인의 사전 경험을 기억 속에서 추상화한 것이라고 하였다. 또, Ramadas(2009)는 심상을 마음속에 있는 정적인 그림이 아닌 시각적, 공간적, 일시적, 인과적인 서로 다른 정보들을 처리하고 묘사하는 스키마라고 하였다. 이상의 정의를 통합하면 수학에서의 심상은 수학적 개념이나 성질에 대하여 우리의 정신이나 마음속에 하나의 이미지로 형성된 관념 또는 직관과 같은 인지적 표상이라고 할 수 있다.

심상의 구성을 통해 형성된 개념은 형식적인 방법으로 재정의, 재개념화 된다. 이 때 개념의 형식적 정의는 그 개념을 엄밀히 설명하기 위해 사용하는 언어적 정의로서 학생들이 가진 심상과는 다를 수 있다. 실제로 학생들은 개념의 형식적인 정의와는 다른 심상을 가지고 있는 경우가 많은데(Alcock & Simpson, 2002), 그 원인은 학생들 자신의 학습 경험 부족 또는 정신적 미성숙에 기인하기도 하지만 교사와 교과서에 의해 제시되는 내용 및 표현의 제한 때문이기도 하다(Vinner & Dreyfus, 1989). 따라서 교사는 학생들에게 수학적 개념을 지도할 때는 개념과 관련된 다양한 예와 표현을 제시할 필요가 있다.

Presmeg(1986)는 심상을 [표 1]에서와 같이 5개의 유형으로 분류하였다.

[표 1] 심상의 분류
[Table 1] Classification of the mental image

유형	정의
구체적-회화적 이미지	삼각형, 정육면체와 같은 단순하고 정적인 그림에 대한 이미지
패턴 이미지	수학 대상들 사이의 관계를 보여주는 이미지
형식적 이미지	칠판이나 책에 쓰여진 공식에 대한 상상 이미지
운동감각적 이미지	신체적 움직임의 도움으로 생성, 변형, 전달되는 이미지
역동적 이미지	마음속에서 도형의 동적인 움직임과 관련된 이미지

그는 구체적-회화적 이미지가 학생들 하여금 너무 세부적 내용에 치중하게 하여 문제 해결에 도움을 주지 못하지만 그 밖의 이미지는 문제 해결에 긍정적인 역할을

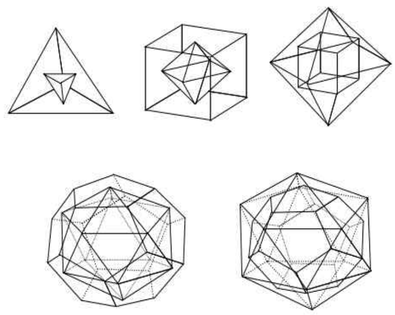
한다고 하였다. Hegarty & Kozhevnikov(1999)는 Premeg(1986)의 주장을 실험을 통하여 밝히고, 패턴 이미지는 공간 시각화 능력과 관계가 있음을 주장하였다.

Yakimanskaya(1991)는 심상이 공간 관계의 시각적 인식으로 형성되고, 외부 표상과의 상호작용을 통해 다양한 형태의 표현으로 변환되어 나타난다고 하였다. 또한, Gutierrez(1996)는 심상을 시각화의 기본 요소로 생각하고, 시각화 과정을 심상의 형성과 해석의 두 단계로 분류하였다. 그리고 문제 해결과정에서 외부 표상과 정보의 시각적 해석 및 공간 능력에 의해 심상이 형성되고, 형성된 심상은 다시 외부 표상과 심상에 대한 해석 및 공간 능력에 의해 문제가 해결된다고 하였다.

2. 정다면체

정다면체란 모든 면이 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 입체도형이며 그 종류는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 가지 뿐이다. 정다면체의 특성을 정리하면 [표 2]와 같다.

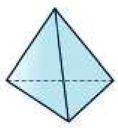
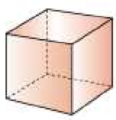
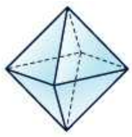
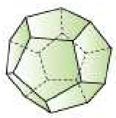
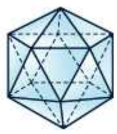
정다면체에서 각 면의 무게중심을 연결하면 새로운 정다면체를 만들 수 있다. 예를 들어 정육면체의 각 면의 무게중심을 연결하면 정팔면체가 되고, 반대로 정팔면체의 면의 무게중심을 연결하면 정육면체가 된다. 이와 같이 각 면의 무게중심을 연결하여 만든 두 다면체를 쌍대(dual)다면체라고 한다. 쌍대다면체는 면의 수와 꼭짓점의 수가 서로 대응되며 모서리의 수는 서로 같다. 정사면체는 그 자신과 쌍대이고, 정이십면체는 정십이면체와 쌍대이다.



[그림 1] 쌍대다면체
[Fig. 1] Dual polyhedron

정다면체는 그 안에 새로운 정다면체를 계속 만들 수 있는데 이것을 정다면체의 순환이라고 한다. 정다면체의 순환 경로는 정육면체 → 정사면체 → 정팔면체 → 정십이면체 → 정육면체이고, 순환 방법은 [표 3]과 같다(동아사이언스, 2012).

[표 2] 정다면체의 특성
[Table 2] Characteristics of the regular polyhedron

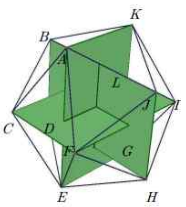
정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
입체의 모양					
면의 모양	정삼각형	정사각형	정삼각형	정오각형	정삼각형
면의 수	4	6	8	12	20
꼭짓점의 수	4	8	6	20	12
모서리의 수	6	12	12	30	30

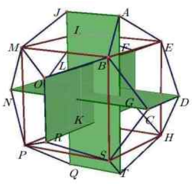
[표 3] 정다면체의 순환
[Table 3] Circulation of the regular polyhedron

순환 경로
정육면체 → 4개의 꼭짓점을 연결 → 정사면체
정사면체 → 각 모서리의 중점을 연결 → 정팔면체
정팔면체 → 각 모서리의 황금비 내분점을 연결 → 정이십면체
정이십면체 → 면의 무게중심을 연결→ 정십이면체
정십이면체 → 황금비 사각형을 이용 → 정육면체

정다면체의 쌍대성과 순환성은 정다면체의 꼭짓점의 좌표를 이용하여 증명될 수 있다. 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 꼭짓점의 좌표를 $(\pm1,\pm1,\pm1)$이라 하면 한 모서리의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사면체 꼭짓점의 좌표는 순환성에 의해 $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$이 된다. 또 정육면체의 각 면의 무게중심의 좌표 $(\pm1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm1,\ 0)$, $(0,0,\pm1)$은 쌍대성에 의해 정팔면체의 꼭짓점의 좌표가 된다(임연자, 1994).

한편, 정이십면체의 꼭짓점은 [그림 2]의 왼쪽 그림과 같이 서로 수직이고 합동인 3개의 직사각형의 꼭짓점 12개로 구성되어 있다. 또 정십이면체의 꼭짓점은 [그림 2]의 오른쪽 그림과 같이 정육면체의 꼭짓점 8개와 서로 수직이고 합동인 3개의 직사각형의 꼭짓점 12개로 구성되어 있다.





[그림 2] 정이십면체와 정십이면체의 내부 구조
[Figure 2] Internal structure of the icosahedron and the dodecahedron

이 때, 서로 수직이고 합동인 3개의 직사각형의 교점을 공간좌표의 원점으로 잡고, 황금비를 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이라 하면 한 모서리의 길이가 2인 정이십면체의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\pm1,\pm\phi)$, $(\pm1,\pm\phi,0)$, $(\pm\phi,0,\pm1)$가 되고, 정이십면체와 쌍대인 정십이면체의 꼭짓점의 좌표는 $(\pm\phi,\pm\phi,\pm\phi)$, $(0,\pm1,\pm\phi^2)$, $(\pm\phi^2,0,\pm1)$, $(\pm1,\pm\phi^2,0)$가 된다(홍갑룡, 2013).

3. 선행연구의 고찰

지금까지 정다면체에 관한 연구는 국내외에서 많이 수행되었다. 본 연구에서는 이 중에서 정다면체의 심상과 관련된 주요 선행연구를 고찰해 보기로 한다.

Gutierrez(1996)는 학생들이 정다면체를 스스로 조작할 수 있는 3D 동적기하 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램에서 개발한 정다면체는 주사위와 같이 각 면에 그림이 있는 정육면체와 불투명한 정육면체, 투명한 정팔면체이다. 그는 중고등 학생들을 대상으로 정다면체 과제를 이 프로그램을 이용하여 해결하도록 하고, 그 과정에서 학생들이 형성한 심상의 유형과 시각화 능력에 주목하면서 학생들의 문제 해결 방법을 분석하였다. 그 결과, 간단한 과제 해결과정에서도 학생들이 형성한 심상의 유형과 시각화 능력 수준은 학년에 따라 많은 차이가 있음을 밝혔다.

Constantinos, Keith, Nicholas, and Marios(2006)는 기하 학습이 관찰, 작도, 탐구 순서로 이루어질 때 시각화 능력에 효과가 크다고 생각하고, 이 순서대로 탐구할 수 있는 3D 동적 기하 프로그램인 3DMath를 개발하였다. 이 프로그램은 외부 표상과 심상의 적절한 상호 작용을 통해 변형된 심상을 형성할 수 있게 하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다고 하였다.

Ryu, Chong, & Song(2007)은 수학 영재아 7명을 대상으로 정이십면체에 대한 과제를 해결하는 과정에서 공간 시각화 능력이 얼마나 향상되는지를 분석하였다. 그 결과 2명은 모든 과제를 수행함으로써 공간시각화 능력이 향상되었지만 5명은 평면 위에 그려진 정이십면체의 꼭짓점, 모서리 등을 머릿속으로 회전, 변형, 조작할 수 있는 심상을 형성하는데 어려움이 있음을 밝혔다.

이지윤, 조한혁, 송민호(2013)는 공간 능력 향상을 위해서는 심상의 형성이 중요함을 강조하고, 학생들에게 ‘거북 표현’과 ‘거북 은유’와 같이 3차원 입체도형을 관찰할 수 있는 새로운 형태의 ‘거북 스킴’을 제시하였다. 그

는 이 스킴을 중학교 영재학생과 수학 교사를 대상으로 공간 시각화 과제에 적용하여 공간시각화 능력이 부족한 학생들에게 거북 스킴은 공간시각화 문제 해결력을 높일 수 있는 대안적 방법임을 제안하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 학생들에게 입체도형에 대한 심상을 형성해주기 위해서는 공학 도구를 보조 도구로 활용하는 교수·학습 방법이 효과적임을 알 수 있다. 학생들은 공학 도구를 활용하여 공간도형을 관찰할 때, 보다 다양한 형태의 심상을 형성할 수 있고, 이를 바탕으로 시각화 능력 및 문제해결력을 신장시킬 수 있다. 이에 본 연구에서는 Gutierrez(1996)의 연구를 확장하여 5가지 정다면체를 모두 관찰할 수 있는 새로운 3D 동적 기하 프로그램을 활용하여 학생들의 심상을 분석해 보고자 한다. 이 프로그램은 학생들이 정다면체의 꼭짓점을 탐구하면서 정다면체에 대한 심상을 형성하고, 공간 능력을 향상시키기 위한 목적으로 본 연구자가 개발한 것이다(홍갑룡, 2013).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 설계

본 연구에서는 학생들이 정다면체에 대한 심상을 형성할 수 있도록 정다면체 꼭짓점 찾기 과제를 제시하고, 이 과제 수행을 위해 연구자가 개발한 3D 기하 프로그램을 활용하여 주어진 과제를 탐구한다. 연구자는 이 과정에서 학생들이 어떤 심상을 형성하였는지, 또 형성된 심상을 어떻게 해석하여 문제를 해결하는지를 분석하고자 한다. 이를 위해 본 연구에서는 [표 4]와 같은 연구 설계를 하였다.

2. 정다면체 꼭짓점 찾기 과제 및 3D 동적 기하 프로그램

정다면체 꼭짓점 찾기 과제는 간단한 구조의 정다면체에서 면의 무게중심, 꼭짓점을 연결하여 복잡한 구조의 정다면체의 꼭짓점을 찾는 문제이다. 예를 들어, 정팔면체는 그 자체만으로는 구조를 파악하기가 어렵지만 정육면체의 쌍대성을 이용하면 정팔면체의 구조를 보다 쉽게 파악할 수 있다.

[표 4] 연구 설계
[Table 4] Research design

1. 예비 검사	정다면체에 대한 기본 지식 검사
2. 실험 수업	3D 기하 프로그램을 활용하여 정다면체 꼭짓점 찾기 과제 수행
3. 심상 해석 과정	예비 검사에서 미해결한 문항에 대하여 재해결 과정에서의 심상의 해석
4. 면담	실험 수업 및 심상 해석 과정에서 느낀 점

본 연구에서는 정다면체의 쌍대성과 순환성을 이용하여 그 내부 구조를 파악할 수 있는 정다면체 꼭짓점 찾기 과제를 개발하였다. 과제는 5개의 문항으로 구성되었으며 그 내용은 [표 5]와 같다.

[표 5] 정다면체 꼭짓점 찾기 과제
[Table 5] Task of finding the regular polyhedron’s vertex

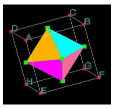
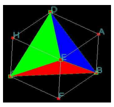
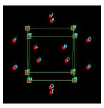
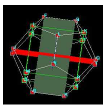
문항	정다면체 꼭짓점 찾기 과제	예상 심상
A	정육면체의 각 면의 무게중심은 어떤 정다면체의 꼭짓점이 되는가?	정팔면체의 이미지
B	정육면체의 꼭짓점 8개 중 4개의 꼭짓점은 어떤 정다면체의 꼭짓점이 되는가?	정사면체의 이미지
C	정이십면체의 꼭짓점 12개 중 5개의 꼭짓점으로 이루어진 도형을 찾아라.	정이십면체의 내부 구조 이미지
D	정이십면체의 꼭짓점 12개 중 서로 직교하고 합동인 직사각형 3개의 꼭짓점을 찾아라.	정이십면체의 내부 구조 이미지
E	정십이면체의 꼭짓점 20개 중 정육면체를 이루는 꼭짓점을 찾아라. 또, 서로 수직이고 합동인 직사각형 3개의 꼭짓점을 찾아라.	정십이면체의 내부 구조 이미지

위의 과제를 수행하면서 학생들의 심상을 형성시키기 위해서는 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점 등을 회전시키면서 관찰할 수 있는 공학 도구가 필요하다. 그러나 기존의 공학 도구는 위의 과제를 수행하는데 필요한 기능

이 내장되어 있지 않다. 예를 들어 Cabri-3D, Poly 프로그램은 마우스 드래깅을 통한 회전 이외에는 변형을 위한 조작 기능이 거의 없고, Polyhedron, Wingeom 프로그램은 쌍대다면체 만들기, 정다면체에서 준정다면체로의 변형 등이 가능하여 [표 5]의 문항 A, B는 해결이 가능하나 나머지 정다면체의 내부 구조 이미지에 대한 조작 기능은 없다. 또 Cabri-3D나 Poly 프로그램은 한 정다면체에서 새로운 정다면체를 만드는 기능이 없다.

본 연구에서 활용할 3D 동적 기하 프로그램은 [표 5]의 과제에 대하여 학생들이 정다면체의 꼭짓점을 택하여 앞-뒤, 좌-우, 상-하로 회전하면서 정다면체의 내부 구조를 관찰하고 조작할 수 있는 프로그램이다. [표 6]은 정다면체 탐구용 3D 동적 기하 프로그램의 내용이다.

[표 6] 정다면체 탐구용 3D 동적 기하 프로그램
[Table 6] Dynamic 3D geometry program for exploring the regular polyhedron

내용	프로그램 화면
1. 정육면체의 각 면의 무게중심을 이용하여 정팔면체 만들기	
2. 정육면체의 8개의 꼭짓점 중 4개를 선택하여 정사면체 만들기	
3. 정이십면체에서 정오각형을 이루는 꼭짓점 찾기	
4. 정이십면체를 구성하는 3개의 직사각형 찾기	
5. 정십이면체를 구성하는 정육면체와 3개의 직사각형 찾기	 

2. 연구 대상

공간 도형에 대한 수학적 개념은 중학교 1학년에서 처음으로 배운 후 고등학교 3학년의 기하와 벡터 과목에서 배우게 되므로 본 연구의 대상은 고등학교 3학년 학생이 적절하다. 그러나 고 3 학생들은 학교 수업의 부담감으로 연구에 자발적으로 참여하기를 꺼려하기 때문에 많은 학생들을 연구 대상으로 선정할 수 없는 실정이다. 본 연구에서는 대구시 D 고등학교 자연계열 3학년 학생 중에서 연구에 자발적으로 참여하기를 희망한 2명을 연구 대상으로 선정하였다. D 고등학교는 자율형 공립 고등학교로서 학생들의 학업 성적은 전국 연합학력평가에서 상위권, 중위권, 하위권에 골고루 분포되어 있고, 전체 고등학교 평균보다 약간 높은 정도이다. 연구 대상 학생들의 수학에 대한 정의적 특성과 인지적 특성은 [표 7]과 같다.

[표 7] 연구 대상의 특성
[Table 7] Characteristics of research subjects

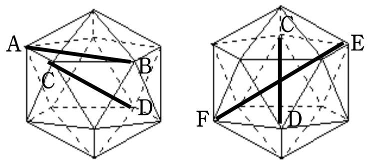
가명	정의적 특성	인지적 특성
진주	수업에 성실하고 학습 의욕이 높다. 수학에 대한 불안감은 거의 없고, 자신의 의견을 논리적으로 말하는 편이다. 모르는 문제가 있으면 주저 없이 교사에게 질문을 한다.	내신 3등급 전국연합학력평가 4등급 (백분위 63%)
도은	3학년에 올라와서 수학에 관심을 갖고 열심히 수업에 임한다. 그러나 1, 2학년 때 수학 학업에 소홀이 하여 기초능력이 부족하다.	내신 6등급 전국연합학력평가 6등급 (백분위 27%)

3. 자료 수집 및 분석

1) 예비 검사

본 연구에서는 먼저 정다면체에 대한 학생들의 기본지식을 살펴보기 위해 실험 수업 이전에 1시간 동안 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사는 6개의 서술형 문항으로 구성되었고, 그 내용은 [표 8]과 같다.

[표 8] 정다면체에 대한 예비 검사
[Table 8] Preliminary test for the regular polyhedron

문항	예비 검사 내용
1	정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 각각에 대하여 면의 모양, 면의 수, 모서리의 수, 꼭짓점의 수를 말하여라.
2	정다면체의 면의 수, 모서리의 수, 꼭짓점의 수 사이의 관계식을 구하여라.
3	정팔면체에서 꼬인 위치에 있는 두 모서리를 찾고, 두 모서리가 이루는 각의 크기를 구하여라.
4	정사면체에서 꼬인 위치에 있는 두 모서리를 찾고, 두 모서리가 이루는 각의 크기를 구하여라.
5	아래 그림의 정이십면체에 대하여 (1) $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 대소 관계를 비교하여라. (2) $\overline{CD}$와 $\overline{EF}$의 대소 관계를 비교하여라. 
6	정십이면체의 한 모서리에 대하여 수직이고, 꼬인 위치에 있는 모서리의 수를 구하여라.

2) 실험 수업

본 연구에서는 학생들이 3D 기하 프로그램을 활용하여 정다면체의 꼭짓점 과제를 수행하면서 정다면체에 대한 심상을 형성할 수 있도록 2차시의 실험 수업을 실시하였다. 실험 수업에서는 먼저 주어진 과제를 3D 기하 프로그램을 활용하여 스스로 해결하도록 하였고, 그 후 연구자는 학생들이 형성한 심상을 파악하기 위하여 약 2시간 동안의 질의·응답 과정을 거쳤다. 수업 중의 대화 자료는 비디오로 녹취되었고, 학생들이 형성한 심상은 Presmeg(1986)의 분류 기준에 따라 분류되었다.

3) 심상 해석 과정

실험 수업이 끝난 후에 연구자는 학생들이 형성한 심상을 어떻게 해석하여 문제를 해결하는지를 분석하였다. 심상 해석은 학생들이 예비 검사에서 해결하지 못했던 3~6번 문항을 재해결하는 과정에서 연구자와 약 2시간 동안의 질의·응답을 통해 이루어졌다. 모든 과정은 비디오로 녹취되었고, 학생들의 문제 해결 활동 자료 및 연구자와의 대화 자료가 수집되었다.

4) 면담

심상 해석 과정이 끝난 후에 연구자는 실험 수업 및 심상 해석 과정에서 학생들이 느낀 점을 비구조화 방식으로 약 30분 동안 면담하여 질적 자료를 수집하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 예비 검사 결과

정다면체에 대하여 연구 대상 학생들이 알고 있는 기본 지식을 파악하기 위해 예비 검사를 실시한 결과 [표 9]와 같이 나타났다.

[표 9] 예비 검사 결과
[Table 9] Result of the preliminary test

문항	1	2	3	4	5	6
진주	O	X	O	X	X	X
도은	부분 O	X	X	X	X	X

(O는 해결, X는 미해결을 나타냄.)

정다면체의 면의 모양, 모서리의 수, 꼭짓점의 수에 대하여 진주는 모든 정다면체에 대하여 알고 있었지만 도은이는 정사면체, 정육면체, 정팔면체에 대해서만 알고 있는 것으로 나타났다. 그러나 두 학생 모두 오일러의 정리, 정십이면체와 정이십면체의 내부 구조에 대해서는 모르고 있는 것으로 나타났다. 따라서 진주는 정다면체의 기본 모양에 대하여는 나름대로의 심상을 갖고 있지만 내부 구조에 대한 심상은 형성되어 있지 않다고 할 수 있다. 도은이는 정사면체, 정육면체, 정팔면체의 기본 모양에 대한 심상을 갖고 있을 뿐, 정다면체의 내부구조에 대한 심상은 형성되어 있지 않다고 할 수 있다.

2. 학생들이 형성한 심상

1) 정팔면체에 대한 심상

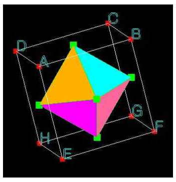
실험 수업에서 연구대상 학생들이 정다면체 꼭짓점 과제를 수행한 결과, 두 학생 모두 과제 A를 성공적으로 해결하였다. 연구자는 과제 수행 직후에 학생들이 정팔면체에 대하여 어떤 심상을 가졌는지를 살펴보기 위해 정팔면체의 단면의 모양에 대하여 [발췌문 1]과 같이 질문하였다.

[발췌문 1] 정팔면체에 대한 학생들의 심상
[Episode 1] Mental image for the octahedron

연구자 : 정팔면체를 자른 단면은 어떤 모양이 되지?

도은 : 정팔면체의 위쪽을 자르면 정사각형이 되요. …(1)

진주 : 정팔면체를 앞에서 보면 정사각형이 되고, 대칭이니까 회전하면 똑같으므로 위에서 봐도 정사각형, 옆에서 봐도 정사각형이예요. …(2)



도은이는 (1)에서 정팔면체의 한 꼭짓점에서 자른 단면만을 생각하고 대답을 하였는데 이것은 정팔면체의 정적인 모양만 생각한 것이라고 할 수 있으므로 구체적-회화적 이미지를 형성하였다고 할 수 있다. 반면에, 진주는 (2)로부터 회전 불변의 성질을 파악하여 대답한 것이므로 역동적 이미지를 형성하였다고 할 수 있다.

2) 정사면체에 대한 심상

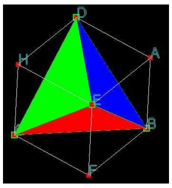
실험 수업에서 연구 대상인 두 학생 모두 과제 B를 성공적으로 수행하였다. 연구자는 학생들이 정사면체에 대하여 어떤 심상을 형성했는지를 살펴보기 위해 정사면체와 정육면체 사이의 관계에 대하여 [발췌문 2]와 같이 질문하였다.

[발췌문 2] 정사면체에 대한 학생들의 심상
[Episode 2] Mental image for the tetrahedron

연구자 : 정사면체의 모서리는 정육면체의 어디에 해당하지?

도은 : ……(대답 없음) ……(1)

진주 : 각 면의 대각선이요. 각 면의 대각선을 모두 이으면 정사면체가 되요.……(2)



연구자 : 정사면체의 모서리의 개수와 정육면체의 면의 개수 사이에는 어떤 관계가 있을까?

도은 : 정사면체의 모서리의 수는 6개, 면의 수도 6개니까 똑 같아요. …(3)

진주 : 정육면체의 면이 6개이니까 대각선도 6개, 대각선을 이으면 정사면체가 되니까 모서리도 6개가 되요. … (4)

연구자: 정육면제의 꼭짓점 중 4개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 정사면체는 몇 가지야?

진주 : 2가지요. 꼭짓점을 연결하여 각 면의 대각선을 그을 수 있는 방법이 2가지니까요. … (5)

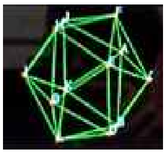
도은 : ……(처음에는 대답을 못하였지만 진주의 설명을 들은 후 이해함) … (6)

도은이는 과제 수행 결과와 (3)으로부터 정사면체에 대한 구체적-회화적 이미지를 형성하였다고 할 수 있다. 반면에 진주는 (2)로부터 구체적-회화적 이미지를 형성하였고, 정육면체와 정사면체의 구성 요소의 관계를 설명한 (4), (5)로부터 패턴 이미지를 형성하였다고 할 수 있다.

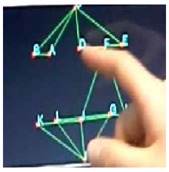
3) 정이십면체에 대한 심상

실험 수업에서 연구 대상인 두 학생 모두 과제 C를 성공적으로 수행하였다. 정이십면체에서 관찰할 수 있는 정오각형의 꼭짓점들은 한 평면 위에 있는데, 공간에서는 이 사실을 놓치기가 쉽다. 연구자는 학생들이 이와 같은 심상을 형성하였는지를 [발췌문 3]에서와 같이 살펴보았다.

[발췌문 3] 정이십면체에 대한 학생들의 심상
[Episode 3] Mental image for the icosahedron



연구자 : 오른쪽 그림에서 점 A, B, D, E, F는 한 평면 위에 있을까?
도은 : ……(설명하지 못함)
진주 : 한 점이 뚜껑처럼 위에 있고, 그 밑에 정오각형이 있어요.
연구자 : 꼭짓점 C의 반대편 꼭짓점 J에서 다섯 개의 점도 한 평면 위에 있을까?



진주 : 마주보는 두 꼭짓점을 잡기만 하면 정오각형 2개가 나오고.. 거꾸로 돌리면 처음과 똑 같으니까 한 평면 위에 있어요. (오른쪽 그림과 같이 회전하여 설명함). ……(2)
도은 : ……(설명하지 못함)

진주는 (1)의 '뚜껑'이라는 표현을 통해 자기 나름의 심상을 가지고 있었고, (2)로부터 패턴 이미지를 형성하였다고 할 수 있다. 도은이는 연구자의 질문에 아무 대답도 못하였지만 과제 C를 해결하였으므로 구체적-회화적 이미지는 형성하였다고 할 수 있다.

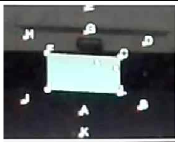
4) 정이십면체를 구성하는 직사각형에 대한 심상

진주는 과제 D를 성공하였고, 도은이는 실패하였다. 학생들이 정이십면체의 꼭짓점을 연결하여 서로 수직이고 합동인 3개의 직사각형을 찾을 수 있다면 정이십면체의 내부 구조에 심상이 제대로 형성되었다고 볼 수 있다. 연구자는 학생들이 형성한 심상이 무엇인지 살펴보기 위해 [발췌문 4]와 같이 질문하였다.

[발췌문 4] 정이십면체에 대한 학생들의 심상
[Episode 4] Mental image for the icosahedron

연구자 : 첫 번째 직사각형을 어떻게 찾았지?

진주 : (화면에서 정이십면체를 여러 방향으로 회전을 하면서... 오른쪽 그림과 같이 회전하여 찾아냄)



이것을 다시 회전하면 직사각형이 나와요.(오른쪽 그림과 같이 회전하여 찾아냄) …… (1)
도은 : …(찾지 못하고 진주가 한 것을 보고 있음)
연구자 : 그럼 그 직사각형과 수직이고 합동인 두 번째, 세 번째 직사각형의 꼭짓점은 어떻게 찾았어?

진주 : (첫 번째 찾은 직사각형을 회전하면서..) 먼저 위-아래로 직사각형을 만들 수 있고, 그리고는 똑같이 앞-뒤, 좌-우로 직사각형을 만들 수 있어요. …… (2)
도은 : ……(설명하지 못함)

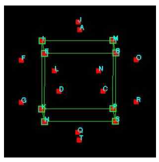
위의 발췌문에서 진주는 정이십면체 속의 직사각형에 대하여 (1)로부터 역동적 이미지를, (2)로부터 패턴 이미지를 형성했다고 할 수 있다. 그러나 도은이는 진주의 활동을 보면서도 아무런 반응이 없어 정이십면체 속의 직사각형에 대한 심상을 형성하지 못했다고 할 수 있다.

5) 정십이면체에 대한 심상

연구 대상인 두 학생 모두 과제 E를 실패하였다. 연구자는 학생들에게 과제 E를 단계적으로 수행시키기 위해 먼저 정십이면체의 각 면인 정오각형에 대각선을 긋고, 정육면체를 찾도록 하였다. [발췌문 5]는 연구자와 학생들 간의 대화 내용이다.

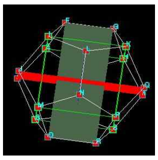
[발췌문 5] 정십이면체에 대한 학생들의 심상
[Episode 5] Mental image for the dodecahedron

연구자 : 정십이면체의 각 면인 정오각형 한 개마다 한 개씩의 대각선을 긋고 정육면체를 찾아보자.



진주 : 정오각형의 대각선을 연결하면 정사각형이 보여요. 앞-뒤, 위-아래, 좌-우로 정사각형이 있으니까 정육면체가 만들어져요. …… (1)
도은 : (진주의 탐구 활동을 보며) 네.. 정사각형이 보여요.

연구자 : 이번에는 정육면체를 관통하고 서로 수직이고, 합동인 직사각형을 찾아보자.
진주 : (정십이면체 회전을 하면서) 정육면체 위에 있는 한 변과 반대쪽에 있는 한 변을 연결하면 직사각형이 되요. 정이십면체처럼 이런 직사각형이 3개 있어요. ……(2)



도은 : ……(설명하지 못함)

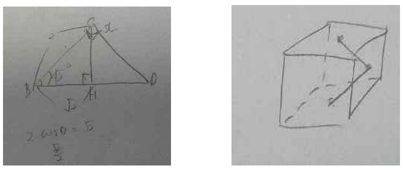
진주는 연구자의 발문에 의해 정십이면체 내부에 있는 정육면체를 찾고, 또 서로 수직이고, 합동인 직사각형 3개를 찾았다. 진주는 (1)로부터 정십이면체에 대한 역동적 이미지를, (2)로부터 패턴 이미지를 형성하였다고 할 수 있다. 그러나 도은이는 진주의 탐구 활동을 보았지만 아무런 반응이 없어 유의미한 심상을 형성하지 못하였다고 할 수 있다.

3. 심상 해석 과정

실험 수업 이후에 연구자는 학생들이 형성한 심상을 어떻게 해석하여 문제 해결하였는지를 분석하기 위해서 예비 검사에서 해결하지 못했던 3~6번 문항을 재해결하도록 하였다. 이 과정에서 수집한 자료를 분석하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

1) 정팔면체에 대한 심상 해석

예비 검사 문항 3에서 진주는 [그림 3]의 왼쪽 그림과 같이 기존의 방법으로 해결하였고 도은이는 해결하지 못하였다. 그러나 실험 수업 이후에 진주는 형성된 심상을 이용하여 [그림 3]의 오른쪽 그림을 그리고 “각 면의 무게중심을 연결하면 정사각형이 되므로 90도가 당연하다” 라고 설명하였다.



[그림 3] 진주의 풀이
[Fig. 3] Jinju’s solution

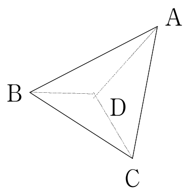
위의 풀이는 진주가 형성한 정팔면체에 대한 역동적 이미지를 문제 해결에 필요한 정보로 변환하여 해결한 것이라고 할 수 있다. 반면에 도은이는 자신이 형성한 정팔면체에 대한 구체적-회화적 이미지를 더 이상 다른 정보로 해석하지 못하고, 결과적으로 이 문제를 해결하지 못하였다. 이것은 도은이가 평면에 그려진 정팔면체의 꼭짓점을 무게중심으로 하는 정육면체를 떠올리지 못한 것이기 때문이라고 할 수 있다. 그 후 도은이는 진주의 풀이를 이해하였고 기존의 방법보다 심상을 이용한 방법이 더 쉽다고 하였다.

2) 정사면체에 대한 심상 해석

예비 검사 문항 4에서 두 학생은 모두 문제 해결에 실패하였다. 그러나 실험 수업 이후에 진주는 자신이 형성한 정사면체에 대한 패턴 이미지를 다음과 같이 해석하여 문제 재해결에 성공하였다.

[발췌문 6] 진주의 정사면체에 대한 심상 해석
[Episode 6] Interpretation of Jinju’s mental image for the tetrahedron

진주 : $\overline{AB}$를 모서리로 잡으면 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{CD}$가 되요. …… (1)



이렇게 잡으면 $\overline{AB}$는 정육면체 윗면의 대각선이고, $\overline{CD}$는 밑면의 대각선이 되고, 두 대각선은 수직이니까, 꼬인 위치에 있는 두 모서리는 직각이지요. …… (2)

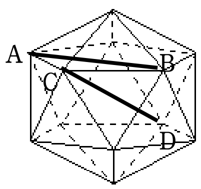
진주는 정사면체에 대한 패턴 이미지를 문제 해결에 필요한 정보(정사면체의 모서리는 정육면체의 면의 대각선)로 해석하여 꼬인 위치에 있는 두 모서리를 찾고 문제를 해결하였다. 반면에 도은이는 평면에 그려진 정사면체의 모서리가 정육면체의 대각선이라는 심상을 형성하지 못해서 꼬인 위치에 있는 두 모서리를 찾을 수 없었다. 그러나 도은이는 진주의 설명을 들은 후에 문제를 해결할 수 있었다.

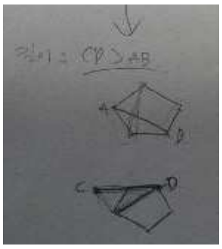
3) 정이십면체에 대한 심상 해석

(1) 예비 검사 문항 5-1에서 두 학생 모두 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 위치 관계를 몰라서 문제 해결에 실패하였다. 실험 수업 이후에 두 학생 모두 선분 $\overline{AB}$가 정오각형의 대각선임을 알았고, 진주는 [발췌문 7]과 같이 문제를 재해결할 수 있었다.

[발췌문 7] 진주의 정이십면체에 대한 심상 해석
[Episode 7] Interpretation of Jinju's mental image for the icosahedron

진주 : (아래 왼쪽 그림의 꼭짓점 A, B, C를 연결하는 정오각형과 이 정오각형과 평행하고 점 D를 지나는 정오각형이 있는 오른쪽 그림을 그려 설명함) $\overline{AB}$는 정오각형의 대각선이고, $\overline{CD}$는 두 개의 정오각형 꼭짓점을 엇갈려 연결한 선분이니까 $\overline{CD}$가 더 길어요"



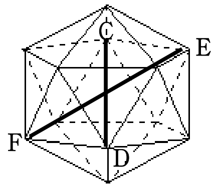


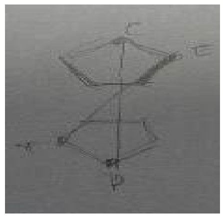
진주는 자신이 형성한 패턴 이미지로부터 선분 $\overline{CD}$가 정이십면체 내부를 엇갈려 지난다는 정보를 알아내고 문제를 해결할 수 있었다. 반면에 도은이는 정이십면체에 대하여 어떤 심상도 형성하지 못했기 때문에 $\overline{CD}$의 위치 관계를 알 수 없었고, 결과적으로 문제를 해결할 수 없었다.

(2) 예비 검사 문항 5-2에서 두 학생 모두 선분 $\overline{CD}$와 $\overline{EF}$의 위치 관계를 파악하지 못해서 문제 해결에 실패하였다. 그러나 실험 수업 이후에 진주는 꼭짓점의 앞-뒤 위치 관계를 확인하면서 탐구하고 [발췌문 8]과 같이 문제를 재해결할 수 있었다.

[발췌문 8] 진주의 정이십면체에 대한 심상 해석
[Episode 8] Interpretation of Jinju's mental image for the icosahedron

진주 : (왼쪽 그림을 보고 앞-뒤 위치 관계를 확인하면서 오른쪽 그림과 같이 그림) 오른쪽 그림에서 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$는 같아요. 평행인 두 정오각형에서 두 선분이 엇갈려 있으니까요.





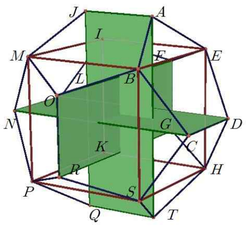
진주는 자신이 형성한 역동적 이미지와 패턴 이미지를 3차원 공간에 그림으로 나타내어 성공적으로 문제를 해결할 수 있었다. 반면에 심상 형성이 안 되어 있는 도은이는 "$\overline{EF}$가 더 길어요." 라고 답하였는데 이것은 3차원 공간을 고려하지 않고 눈에 보이는 선분의 길이를 비교하여 대답한 것으로 볼 수 있다. 이로부터 정이십면체의 내부 구조에 대한 심상이 형성되지 않으면 성공적으로 문제 해결을 할 수 없다고 말할 수 있다.

4) 정십이면체에 대한 심상 해석

예비 검사 문항 6에서 두 학생 모두 꼬인 위치 관계에 있는 모서리를 차지 못하여 문제 해결에 실패하였다. 그러나 진주는 실험 수업에서 서로 수직이고 합동인 3개의 직사각형을 찾은 다음에 직사각형의 한 변에 대하여 꼬인 위치에 있는 선분을 찾아 [발췌문 9]에서와 같이 문제를 재해결할 수 있었다.

[발췌문 9] 진주의 정십이면체에 대한 심상 해석
[Episode 9] Interpretation of Jinju's mental image for the dodecahedron

진주 : 오른쪽 그림에서 모서리 $\overline{CD}$는 직사각형의 한 변이예요. 이 직사각형에 수직인 직사각형에서 꼬인 위치에 있는 선분이 2개 있고. 또 다른 수직인 직사각형에 2개 있어요. 그러니까 모두 4개 있어요.



진주는 자신이 형성한 역동적 이미지와 패턴 이미지를 통해 꼬인 위치에 있는 모서리를 정확히 찾아내었다. 반면에 도은이는 정십이면체에 대한 심상이 형성되어 있지 않아서 문제 해결에 실패했다고 할 수 있다.

이상의 연구 결과를 정리하면 진주는 정다면체를 여러 방향으로 회전하고, 꼭짓점의 앞-뒤, 좌-우, 상-하의 위치 관계를 탐구하면서 정다면체에 대한 역동적 이미지와 패턴 이미지를 형성할 수 있었다. 그리고 형성된 이미지를 다른 정보나 이미지로 변형함으로써 정다면체의 내부 구조에 대한 문제 해결에 성공할 수 있었다. 한편 도은이는 정사면체와 정팔면체에 대하여는 구체적-회화적 이미지를, 정이십면체와 정십이면체에 대하여는 어떤 심상도 형성하지 못하였고, 결과적으로 정다면체의 내부 구조 문제 해결에 필요한 정보나 심상으로 해석하지 못하였다. 이것은 Presmeg(1986)가 역동적 이미지나 패턴 이미지는 문제 해결에 긍정적인 역할을 하지만 구체적-회화적 이미지는 문제 해결에 도움이 되지 않는다는 주장에 비추어 볼 때, 구체적-회화적 이미지 이외의 여러 심상 형성이 문제 해결에 필요한 것으로 생각된다.

3. 면담 결과

본 연구에서는 2차시의 실험 수업과 2차시의 심상 해석 과정에서 컴퓨터 활용의 장점, 학생들이 느낀 점 등에 대하여 면담을 하였다. 다음 [표 10]은 연구자와 학생들과의 면담 내용이다.

[표 10] 면담 내용
[Table 10] Interview contents

연구자 : 정다면체 수업이 도움이 되었니? 되었다면 어떤 점에서 도움이 되었니?
진주 : 정다면체의 구조와 성질을 파악할 수 있어서 도움이 되었어요.
도은 : 잘 몰랐던 정십이면체, 정이십면체를 알게 되어 좋았어요.
연구자 : 컴퓨터 활용의 장단점이 무엇이라고 생각하니?
도은 : 그림으로 보는 것보다 컴퓨터 화면으로 보는 것이 훨씬 더 쉽게 이해가 잘 되요.
진주 : 맞아요. 공간 도형을 배울 때는 컴퓨터를 이용하는 것이 좋을 것 같아요. 컴퓨터 화면을 본 후 정다면체의 성질을 알고 이것을 직접 종이에 한 번 더 그려 보는 것이 기억에 더 잘 남는 것 같아요. 그리고 학교에서도 이렇게 배웠으면 좋겠어요.
연구자 : 정다면체 수업에서 느낀 점을 말해보자.
진주 : 이 수업에서 내가 직접 하는 것이 힘은 들었지만, 그래도 하는 과정이 재미있었고, 하고 나니 공간 지각력이 올라가는 느낌도 들었어요.
도은 : 학교에서는 주로 선생님이 칠판에 그림을 그리든지, 아니면 책의 그림을 보고 이해를 해야 하는데 솔직히 설명을 들어도 잘 이해가 되지 않았어요. 그런데 이 수업에서는 친구나 선생님 설명이 이해가 되는 것이 너무 좋았어요. 물론 내가 스스로 이해한 것은 별로 없었지만, 그래도 조금은 자신감이 생긴 것 같아요. 그 전에는 공간도형은 정말 자신이 없었거든요.

위의 면담 결과로부터 본 연구의 실험 수업은 정다면체에 대한 학생들의 이해도, 흥미 유발 측면에서 긍정적인 효과가 있는 것으로 나타났다. 학생들이 학교 수업에서 그 동안 탐구하기 힘들었던 정다면체의 여러 가지 성질들을 쉽게 탐구할 수 있도록 하기 위해서는 먼저 정다면체에 대한 역동적 이미지나 패턴 이미지 같은 심상을 형성해 주는 것이 필요하다. 이와 같은 심상은 정다면체 꼭짓점 찾기 과제와 이를 해결하여 줄 수 있는 투명 구조의 3D 동적 기하 프로그램을 활용하여 형성될 수 있

다. 특히, 정다면체 꼭짓점 찾기 과제는 정다면체 사이의 구조적 관계를 이해하여 5개 정다면체의 전체적 구조를 파악할 수 있도록 도와줄 수 있으므로, 학생들의 공간 시각화 능력을 향상시키는데도 좋은 학습 소재가 될 수 있을 것으로 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

공간도형 문제 해결을 위해서는 평면에서 구현할 수 없는 조작 가능한 심상을 형성하고, 형성한 심상을 해석하여 문제 해결에 적절한 정보나 이미지로 변형하여야 한다. 학생들에게 어떤 수학적 개념을 가르치기 위해서는 그 개념 자체보다는 먼저 개념에 대한 심상을 형성할 수 있도록 해주어야 하는데 공간에서의 심상은 지필 환경에서보다 컴퓨터 환경에서 보다 풍부하게 형성될 수 있다.

본 연구에서는 정다면체 꼭짓점 찾기 과제를 수행하는 과정에서 학생들이 형성한 심상은 어떤 것이며, 형성한 심상을 어떻게 해석하여 문제를 해결하는지를 분석하였다. 이를 위해 일반계 고등학교 3학년 학생 2명을 대상으로 자체 개발한 3D 동적 기하 프로그램을 활용하여 2차시의 실험 수업과 2차시의 심상 해석 과정을 통해 수집된 자료를 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 전국연합학력평가에서 중상위권 수준인 학생은 3D 동적 기하 프로그램을 활용한 정다면체 찾기 과제 수행을 통해 역동적 이미지 또는 패턴 이미지를 형성할 수 있었으나 하위권 수준인 학생은 구체적-회화적 이미지를 형성할 수 있었다.

둘째, 정다면체에 대한 역동적 이미지 또는 패턴 이미지 형태의 심상은 다른 정보나 이미지로 적절하게 변형되어 문제 해결에 긍정적 역할을 할 수 있으나 구체적-회화적 이미지 형태의 심상은 더 이상 문제 해결에 필요한 정보나 이미지로 해석되지 못하기 때문에 문제 해결에 도움이 되지 않는다고 할 수 있다.

학생들의 공간 능력을 향상시키고자 할 때, 공학 도구는 시각적 측면에서 많은 도움이 된다. 그러나 단순히 공학 도구를 관찰하는 것만으로 역동적인 이미지나 패턴 이미지가 형성되는 것은 아니다. 교사는 학생들로 하여금 다양한 형태의 심상을 떠올릴 수 있도록 정다면체의 쌍대성 및 순환성을 고려한 적절한 과제 개발과 정다면체 사이의 구조적 관계에 대한 단계적 발문 및 적절한 권고를 해주어야 학생들은 떠올린 심상을 적절한 정보나 이미지로 변형함으로서 문제를 해결할 수 있다.

본 연구는 일반계 고등학교 3학년 학생 2명을 대상으로 사례연구를 하였기 때문에 교수 실험에 따라 연구의 결과가 다르게 나타날 수 있는 개연성이 있다. 따라서 보다 많은 연구 대상과 실험 수업을 통해 본 연구의 결과가 확대 재생산되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강윤희 (2007). 심적 이미지에 대한 철학적 고찰, 이화여자대학교 석사학위논문.

Kang, Y.H. (2007). *Philosophical Investigation on Mental Images*, Unpublished Master's thesis, Ewha Woman's University.

도종훈 (2006). 학생이 지닌 기하적 심상과 문제 해결과정에서의 오류, 한국학교수학회논문집 9(2), 195-208.

Do, J.H. (2006). Error analysis related to a learner's geometrical concept image in mathematical problem solving, *Journal of the Korean School Mathematics, 9*(2), 195-208.

동아사이언스(2012). 월간 수학동아 2012년 6월호, 서울 : 동아사이언스.

Donga Science (2012). *The monthly mathematics Donga 2012*(6), Seoul : Donga Science.

이지윤, 조한혁, 송민호 (2013). 공간시각화 과제에 체화된 거북 스킴 적용에 관한 연구, 수학교육 52(2), 191-201.

Lee, J.Y., Cho, H.H,, & Song, M. (2013). The application of embodied turtle schemes for the task of the spatial visualization, *The Mathematical Education 52*(2), 191-201.

임연자 (1994), 정다면체에 관한 여러 가지 접근 방법의 고찰, 성균관대학교 석사학위논문.

Yim. Y.J. (1994). *The study of various approach method about regular polyhedron*, Unpublished Master's thesis, Sungkyunkwan University.

홍갑룡 (2013). 컴퓨터 그래픽스를 활용한 정다면체 교수·학습 도구 개발, 경북대학교 석사학위논문.

Hong, G.Y. (2013). *The development of polyhedron teaching and learning tool utilizing computer graphics*, Unpublished Master's thesis, Kyungbuk National University.

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions : Dealing with categories mathematically, *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 28-34.

Constantinos C., Keith J., Nicholas M., & Marios P. (2006). Developing the 3D Math dynamic geometry software theoretical perspectives on design, *International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(4), 168-174.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task,* Dordrech : Reidel Publishing Company.

Gathercole, S.E. & Pickering, S.J. (2000). Assessment of working memory in six and seven-year-old children, *Journal of Educational Psychology, 92*, 377-390.

Gutierrez. A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry : In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* 3-19, Valencia : Universidad de Valencia.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving, *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.

Linn, M. & Peterson, A. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability : A meta-analysis, *Child Development 56*(6), 1479-1498.

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge, In R. J. Sternberg (Ed), *Advances in the Psychology of Human Intelligence, 4,* 181-248, Hillsdale, NJ : Erlbaum.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston : VA.

Newcombe, N.S. (2010). Picture This : Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator, 8*, 29-43.

Presmeg, N.C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics 17*, 297-311.

Ramadas, J. (2009). Visual and spatial modes in science learning, *International Journal of Science Education, 31*(3), 301-318.

Ryu, H.A., Chong, Y.O., & Song, S.H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures, *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 137-144. Seoul : PME.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains : Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance, *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 817 - 835

Yakimanskaya, I.S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren,* Soviet Studies in Mathematics Education, 3, Reston : VA. NCTM.

A case study on high school students' mental image in the process of solving regular polyhedron problems

Gap Lyung Hong
Daegu Science High School, Daegu, Korea
hgldragon@hanmail.net

Won Kyung Kim†
Korea National University of Education, Chongju, Chungbuk, 363-791, Korea
wonkim@knue.ac.kr

The purpose of this study is to analyze how high school students form and interpret the mental image in the process of solving regular polyhedron problems. For this purpose, a set of problems about the regular polyhedron's vertex is developed on the base of the regular polyhedron's duality and circulation. and applied to 2 students of the 12th graders in D high school. After 2 hours of teaching and learning and another 2 hours of mental image-analysis process, the following research findings are obtained.

Fisrt, a student who recorded medium high-level grade in the national scholastic test can build the dynamic image or the patten image in the process of solving regular polyhedron's vertex problems by utilizing the 3D geometry program. However, the other student who recorded low-level grade can build the concrete-pictorial image.

Second, pattern image or dynamic image can help students solve the regular polyhedron's vertex problems by proper transformation of informations and the mental images while the concrete-pictorial image does not help.

Hence, it is recommended that the mathematics teachers should develop teaching and learning materials about the regular polyhedron's duality and circulation and also give students suitable questions to build the various mental images.

* ZDM Classification : U64
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70
* Key words : Regular polyhedron, Mental image, 3D dynamic geometric program
† Corresponding author