韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.4.479
2014. 11. 제 53권, 제 4호, 479-492.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2014, Vol. 53, No. 4, 479-492.

독자적 연구에서 나타난 수학영재의 수학적 행동특성 분석

정진영(광주고등학교)
강순자(전남대학교)

Ⅰ. 서론

우리나라에서는 2000년 1월 영재교육진흥법, 2002년 4월 영재교육진흥법시행령의 고시에 따라 각급 학교에서 영재교육이 법적, 제도적으로 뒷받침되어 실시되고 있으며, 영재교육에 대한 사회적 관심도는 지속적으로 고조되고 있다. 이 영재교육진흥법에서는 영재교육의 목적을 '재능이 뛰어난 사람을 조기에 발굴하여 능력과 소질에 맞는 교육을 실시함으로써 개인의 타고난 잠재력을 계발하고 개인의 자아실현을 도모하며 국가와 사회의 발전에 이바지하게 함'이라고 규정하고 있다. 개인의 자아실현과 국가 사회발전에 기여라는 두 가지 큰 목표를 가진 우리나라의 영재교육은 1983년 최초의 과학고등학교 설립을 시작으로 과학고등학교, 과학영재학교, 대학에서 운영하는 과학영재교육원, 시도교육청의 영재교육원, 그리고 각 지역공동 영재교실 등의 운영으로 자리를 잡고 있으며, 많은 학생들이 영재교육의 수혜를 받고 있다. 이제 교육의 한 축으로 자리잡은 영재교육이 어떻게 이루어져야 하는가에 대한 문제는 끊임없이 논의되고 연구되어야 할 과제이다.

영재에 대한 다양한 정의가 있지만 영재교육진흥법에서 영재란 '재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육이 필요한 사람'으로 규정하고 있다. 영재들은 개인의 능동적 탐구를 허용하는 개인 혹은 집단 프로젝트를 좋아하며, 과학영재들의 창의성과 자기주도적 문제해결 학습 능력을 신장하는 데는 우수 과학자와의 사사교육 프로그램이 매우 효과적인 것으로 알려져 있다(Karnes & Bean, 2009; Krutetskii, 1976; Renzulli, 1977a). 과학자 역할 모델과의 사사를 통해 학교교육의 역량을 넘어선 전문적 지식 및 기술을 습득하고 예비 연구자로서의 연구를 경험하며 심화된 수준의 활동을 통하여 사회적 정서적 그리고 인지적 발달을 도모하는, 영재교육의 한 방법으로서의 사사교육의 확대는 대학 부설 과학영재교육원의 향후 나아갈 방향이기도 하다.

현재 대학 부설 과학영재교육원의 사사교육과정은 대체적으로 학생 3-4명과 교수가 한 팀을 이루어 운영되고 있으며, 교육형태와 운영은 심화 혹은 속진교육, 주제별 자율탐구학습 등 지도교수별로 자유롭게 결정하여 시행되고 있다. 10개월간의 사사교육결과를 발표하는 산출물대회의 성격을 볼 때, 주제별 자율탐구가 바람직하지만 주제별 자율탐구에 대한 구체적인 방법은 제시되고 있지 못한 실정이다. 본 연구에서는 영재학생을 위한 사사교육방법으로 교수방법론에서 가장 많이 추천되고 있는 독자적 연구를 선택하였다.

Krutetskii(1976)는 수학영재교육의 초점은 창의적 수학 능력의 향상이며, 이러한 능력의 향상을 위해서는 수학영재아로 하여금 수학자와 같이 연구하는 과정을 경험하게 하는 것이 필요하다고 하였다. 많은 연구자들은 자기주도적이며 전문가가 사용하는 연구 과정과 유사한 학습의 가장 높은 단계의 활동으로 독자적 연구를 제시하고 있다. 따라서 연구자는 사사교육의 한 방법으로 독자적 연구를 수행하였고, 이 과정에서 그동안 관찰하지 못했던 수학영재아의 많은 수학적 행동특성들을 발견할 수 있었다. 3년 동안 영재교육원의 여러 프로그램 운영과정에서 관찰했던 연구대상자의 행동특성은 다른 영재들에 비해 뛰어나긴 했으나 크게 다르지 않았다. 그러나 독자적 연구를 수행하는 과정에서는 연구대상자의 직관적 통찰력, 귀납적 · 연역적 추론 능력, 창의성 그리고 반성적

* 접수일(2014년 07월 10일), 수정일(2014년 08월 25일), 게재확정일(2014년 11월 12일)
* ZDM분류 : C43, C39, D43, D93
* MSC2000분류 : 97B60, 97C20, 97D50
* 주제어 : 수학영재, 수학적 행동특성, 독자적 연구, 사사교육

사고 능력 등 수학영재로서의 수학적 행동특성이 두드러지게 나타났다.

본 연구는 10개월간에 걸친 사사교육과정에서 관찰한 수학영재아의 탐구활동 수행상황, 학생과 학부모의 면담, 연구대상자가 운영하는 수학 관련 블로그 등을 토대로 수학영재아의 수학적 행동특성을 분석하였다. 사사교육은 여러 학자들이 제시한 독자적 연구모형을 바탕으로, 카플란의 독자적 연구모형을 수정 보완한 5단계 독자적 연구모형에 따라 이루어졌으며, 연구수행과정에서 얻은 자료들과 학생과 학부모의 면담, 연구대상자가 운영하는 블로그 등으로부터 수집된 자료를 토대로, 수정된 황동주(2006)의 수학영재아 수학적 행동 분석틀에 따라 수학영재아의 행동특성을 분석하였다. 모든 수학영재에게서 발견할 수 있는 수학적 행동특성이라고 할 수는 없지만, 사례연구를 통하여 수학영재에 대한 이해의 폭을 넓힘으로써 수학영재의 선발과 교육, 특히 사사교육의 효율적 운영에 대한 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 사사교육 모형으로서의 독자적 연구

현재 대학 부설 과학영재교육원에서는 중등영재교육의 마지막 단계로 사사교육과정을 운영하고 있으며, 대체적으로 사사교육은 주제별 자율탐구형태로 이루어지고 있다.

Krutetskii(1976)는 학교에서의 수학 교과를 학습하여 해당 지식과 기능을 익히는 능력인 '학교수학 능력'과 사회적 가치를 지닌 독창적인 산출물을 창조해내는 능력이자 학문으로서의 수학하는 능력인 '창의적 수학 능력'을 구분하면서 수학영재교육의 초점은 창의적 수학 능력의 향상이라고 하였다. 이와 같은 창의적 수학 능력의 향상을 위해서는 수학영재아로 하여금 수학자와 같이 연구하는 과정을 경험하게 하는 것이 필요하며, 그런 의미에서 독자적 연구는 사사교육의 한 교육모형으로서 큰 의미를 갖는다고 할 수 있다.

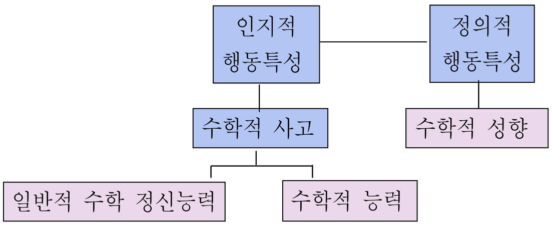
주제별 자율탐구의 한 유형이라 할 수 있는 독자적 연구는 새로운 주제를 혼자 혹은 타인과 함께 연구하는 과정, 학생이 교사와 함께 주의 깊게 계획되고 빈번히 점검된 연구 프로젝트를 자기주도적으로 수행하는 과정, 학습의 가장 높은 단계 활동 등으로 여러 학자에 의해 정의되고 있다. 결국, 독자적 연구란 계획되고 자기주도적이며 특정 학문 분야의 대가나 해당 분야의 전문가가 사용하는 연구 과정과 유사한 학습의 가장 높은 단계의 활동으로서, 도전적인 문제를 해결하는 데 높은 관심을 보이는 영재학생의 욕구를 충족시킬 수 있는 영재교육의 한 방법이다. 여러 연구자들은 학습의 가장 높은 단계의 활동으로 독자적 연구를 제시하고 있으며, 학자들마다 독자적 연구를 수행하는 단계를 차별화하고 있다 (Renzulli, 1977; Kaplan 외, 1976).

본 논문에서는 여러 학자의 연구를 토대로 독자적 연구의 본질이라고 할 수 있는 자기주도성과 창의성 그리고 도전성을 잘 드러낼 수 있도록 학생 중심 자율탐구인 독자적 연구의 5단계 모형을 설정하고, 이 모형에 따라 사사교육을 진행하였다. 독자적 연구의 5단계는 주제 선정, 연구문제 설정, 자료 수집 및 탐구, 산출물, 발표 및 평가 등으로 이루어져 있다.

2. 수학영재의 수학적 행동 특성

영재교육의 영역 특수성에 대한 관심이 높아지면서 수학영역에서의 영재성을 정의하고 수학영재의 행동특성을 정의하려는 많은 시도와 수학영재의 행동특성을 이해하려는 많은 연구들이 이루어지고 있다(Krutetskii, 1976; 황동주, 2006; 송상헌, 2000, 신인선 · 김시명, 2006). 수학영재의 행동특성이란 적합한 인지적 사고기능과 정의적 성향이 상호작용하여 이루어지는 것으로 보고, 황동주(2006)는 수학영재의 행동특성의 하위요소를 크게 일반적인 수학정신 능력, 수학적 능력과 정보수집과 처리능력, 수학적 성향의 네 영역으로 분류하였다. 일반적인 수학정신 능력, 수학적 능력과 정보수집과 처리능력은 수학적인 방법으로 세상을 바라보고 그에 대한 논리적 설명을 추구한 태도나 성향인 수학적 사고에 관련된 것이다. 정보 수집을 일반적인 수학정신 능력의 하위요소로, 정보의 조직화 및 처리능력을 수학적 능력의 하위요소로 수정하여 수학영재의 수학적 행동특성을 크게 일반적인 수학정신 능력, 수학적 능력, 수학적 성향의 세 영역으로 나누었다. 일반적인 수학 정신능력과 수학적 능력은 수학영재의 인지적 특성인 수학적 사고 능력이라 할 수 있으며, 수학적 성향이란 수학에 대한 태도뿐만 아니

라 적극적으로 사고하고 행동하는 경향성으로 수학영재의 정의적 특성이라고 할 수 있다. 일반적인 수학정신능력의 하위요소에는 이해와 적용, 추론능력, 속도와 능숙한 과정, 흥미와 소질, 정보수집 등이 있으며, 수학적 능력의 하위요소에는 직관적 통찰력, 추상화능력, 공간화/시각화 능력, 일반화 및 적용능력, 수학적 창의성, 정보의 조직 및 처리능력, 반성적 능력 등이 있다. 수학적 성향은 의사소통능력, 과제집착력, 독립성, 수학과 연관성, 수학에 대한 흥미와 관심 등을 하위요소로 두고 있다.



[그림 1] 수학영재의 수학적 행동특성
[Fig. 1] Mathematical behavior characteristics of a mathematically gifted student

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상자 선정

2013년 4월부터 2014년 2월까지 진행된 사사교육은 지도교수와 지도교사 그리고 학생 3명(중학교 3학년인 여학생 2명과 남학생 1명)을 한 팀으로 이루어졌다. 이 학생들은 J대학 과학영재교육원 초등과정을 거쳐 중등심화 I과정, 중등심화 II과정을 일정 수준 이상으로 수료하고, 스스로 사사교육과정에 참여할 의사를 가지고 간단한 면접을 통과한 학생들이다. 또한, 이 학생들은 처음 영재교육원 입학 시 수학적 창의력과 수학적 사고력을 평가하는 선발고사를 치룬 학생들로서 당시 선발고사의 경쟁률을 고려할 때 수학적 창의성과 사고력이 뛰어난 학생들이라고 할 수 있다. 사사교육과정 동안 세 명의 학생에 대한 연구자의 관찰이 이루어졌으나, 본 연구에서는 세 명의 학생들 중 남학생 D를 연구대상자로 선정하여 수학영재로서의 수학적 행동특성을 기술하였다. 그 이유는 초등수학반 때부터 문제해결과정에서 나타난 과제집착력과 문제해결 능력 그리고 자기 주장에 대한 완고함 때문에 특히 연구자의 눈에 띄었으며, 중학교 2학년 때 KMO 고등부에서 금상을 수상하는 등 객관적으로 높은 수학적 능력을 보여 왔기 때문이다. 특히, 세 명의 학생들이 10개월간 수행한 독자적 연구과정를 관찰하면서 주도적으로 연구를 이끌어가는 그의 모습에서 수학영재로서의 두드러진 행동특성을 발견하였기 때문에 남학생 D만을 연구대상자로 선정하고 그의 수학적 행동특성을 기술하기로 하였다.

2. 독자적 연구단계 설정

여러 학자의 연구(Renzulli, 1977; Kaplan외, 1976; Karnes & Bean, 2009)를 바탕으로 독자적 연구의 본질이라고 할 수 있는 자기주도성과 창의성 그리고 도전성을 잘 드러낼 수 있도록 학생 중심 자율탐구인 독자적 연구의 5단계 모형을 설정하였다. 독자적 연구의 5단계는 주제 선정(관심영역 선택, 관심 영역 내에서 주제 선택, 선택된 주제의 연구 주제로서의 타당성 세우기), 연구문제 설정(주제 관련 예비 연구, 연구 문제 설정, 연구문제를 형식화), 자료 수집 및 탐구(연구에 필요한 자료 수집 및 분석, 정보추출 및 탐구활동), 산출물(연구 결과 검토 및 정리하기, 발표 준비), 발표 및 평가(산출물 발표회에서 발표하기, 논문 투고, 연구 과정 및 성과에 대한 자기 또는 교사, 동료의 평가) 등으로 이루어져 있다. 이 5단계가 반드시 순서대로 이루어질 필요는 없다.

[표 1] 독자적 연구의 5단계
[Table 1] 5-Step of Independent study

실행단계	실행내용
1. 주제선정	관심영역 선택, 관심 영역 내에서 주제 선택, 선택된 주제의 연구 주제로서의 타당성 세우기
2. 연구문제 설정	주제 관련 예비 연구, 연구 문제 설정, 연구 문제를 형식화
3. 자료수집 및 탐구	연구에 필요한 자료 수집 및 분석, 정보추출 및 탐구활동
4. 산출물	연구 결과 검토 및 정리하기, 발표 준비
5. 발표 및 평가	산출물 발표회에서 발표하기, 논문 투고, 연구 과정 및 성과에 대한 자기 또는 교사, 동료의 평가

3. 자료수집

본 연구는 10개월간의 사사교육과정 동안 연구자가 직접 참여 관찰한 자료, 학생과 학부모 면담 및 설문 자료 그리고 D가 운영하는 수학 블로그에 대한 자료들을 수집하였다.

1) 면담 및 설문

면담은 D를 연구 대상자로 선정한 후 D와 부모를 상대로 면대면 혹은 전화 통화를 통해 이루어졌다. 사사교육과정을 시작하기 전에 독자적 연구란 무엇인지 어떻게 이루어지는지에 대하여 설명하는 시간을 가졌으며, 학생들의 연구참여에 대한 확신 정도와 현재의 지식수준을 확인하기 위하여 개별면담을 실시하였다. D와의 면담에서는 수학적 성향 및 수학 지식의 수준에 대하여 알아보았고, D의 부모와의 설문과 면담을 통해 D의 일반적인 행동특성과 수학적 성향 등 학생의 이해에 도움이 되는 자료들을 수집하였다.

2) 관찰자료

사사교육 동안 연구활동은 시험기간을 제외하고 거의 격주로 하루 3시간씩 이루어졌으며, 3명의 학생이 모두 빠짐없이 60시간의 수업에 참여하였다. 연구자 1은 지도교수로서 전 사사교육과정의 교육과 연구를 총괄하면서 D를 관찰하였으며, 연구자 2는 연구활동의 보조 및 학생 관찰기록 임무를 담당하며 관찰된 내용을 기록해 D의 행동특성을 분석하는데 사용하였다. 관찰자료는 칠판에 판서한 내용, 연구결과물을 정리한 내용, 관찰한 내용 기록 등을 활용하였다.

3) D가 운영하는 수학 블로그

D는 초등과정부터 수학과 관련한 의사소통의 장으로 블러그를 운영해 오고 있었다. 블러그에는 자신이 공부한 내용을 정리한 것, 자신이 만든 문제와 해답, 자신이 궁금하게 생각하고 다른 사람들과 의견을 나누고 싶어하는 내용, 수학 관련 자료 등이 올라와있었다. 블러그의 내용들로부터 D의 수학적 능력과 수학적 성향을 파악할 수 있는 자료를 수집하고 이를 분석하였다.

4. 자료의 분석

자료의 분석은 수학영재의 수학적 행동특성의 하위요소인 세 영역 - 일반적인 수학정신능력, 수학적 능력과 수학적 성향 - 에 초점을 둔 분석틀에 따라 이루어졌다.

[표 2] 수학영재의 수학적 행동특성 분석 틀
[Table 2] Analysis frame on mathematical behavior characteristics of a mathematically gifted student

영역	하위요소
일반적인 수학 정신능력	이해와 적용, 추론능력, 속도와 능숙한 과정, 흥미와 소질, 정보수집
수학적 능력	직관적 통찰력, 추상화능력, 공간화/시각화 능력, 일반화 및 적용능력, 수학적 창의성, 정보의 조직화 및 처리능력, 반성적 능력
수학적 성향	의사소통능력, 과제집착력과 동기, 독립성, 수학과 연관성

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 수학영재아의 일반 행동특성

연구대상자 D의 수학적 행동특성에 대한 의미 있는 분석을 위하여 성장과정에서 관찰된 일반 행동특성을 분석해 보았다. D의 일반 행동특성을 조사하기 위하여 부모를 대상으로 설문조사를 실시하였다. 질문에 대한 답은 5단계 척도(1. 전혀 그렇지 않다 2. 그렇지 않다 3. 보통이다 4. 그렇다 5. 매우 그렇다)로 이루어졌다. 연구대상자의 성장과정에서 관찰된 일반 행동특성을 기술하면 다음과 같다.

독서를 좋아하지만 독서가 수학 분야에 편중되어 있으며, 정치, 경제, 사회, 문화 등 시사적인 문제와 같은 다양한 분야에 대한 관심은 매우 적었다. 자기주장이 강하고 개인주의적 성향이 강했으며, 친구들과 잘 어울리지 못했다. 학교생활에서도 가장 어려운 점으로 교우관계를 꼽고 있다. 특히 자신의 의사를 글로 표현하는 데는 문제가 없었으나 말로 표현하는 데는 약간의 두려움과 불안감을 가지고 있었다. 이는 흔히 영재들에게서 볼 수 있는 완벽주의 성향으로 인하여 나타나는 현상이라고 생각한다. 그러나 자신의 결과물을 발표하는 것을 주저하지 않는 등 이를 극복하려는 노력이 보였으며, 호기심

이 많고 자신이 관심을 갖는 문제에는 끈기 있게 도전함을 알 수 있었다.

2. 수학영재의 수학적 행동특성 분석

독자적 연구를 진행하면서 나타난 D의 수학적 능력은 마치 많은 연구를 경험한 것처럼 수학자들의 연구과정과 매우 흡사함을 알 수 있었다. 학생과 학부모의 면담 결과와 D가 운영하는 수학 관련 블로그 그리고 10개월간의 독립연구 수행 과정에서 관찰하여 얻은 자료의 분석을 토대로 D의 수학적 행동특성의 하위요소인 일반적인 수학 정신능력, 수학적 능력과 수학적 성향을 기술하면 다음과 같다.

1) 일반적 수학 정신능력

(1) 고등수학적 개념에 대한 이해와 적용

고 난이도의 수학 전공서적을 혼자서 공부하고 있으며, 이해의 수준은 피상적 이해가 아닌 상당한 수준의 깊이 있는 이해를 하고 있었다. D는 처음에는 학원의 도움을 받기도 했지만 나중에는 중학교 1학년 때까지 혼자서 고등학교 전 과정을 공부하였다. 특히 초등 6학년 때 KMO(한국 수학올림피아드) 대비를 하다 선생님으로부터 읽어보면 좋을 만한 책으로 추천받은 '소수의 음악', '리만가설' 등 교양서를 읽고 흥미를 느껴 수학전공서적인 Analytic Number theory를 보기 시작한 것을 계기로 인터넷 검색을 통해 알게 된 다른 수학 전공서적들을 혼자 공부해 왔다. 이는 수학에 대한 대단한 호기심을 가지고 있을 뿐만 아니라, 수학적 개념에 대한 이해력이 매우 뛰어남을 짐작할 수 있다. 현재까지 관심 있게 보았거나 보고 있는 책은 대학이나 대학원 수준의 전공서적[1]으로 읽는 데 어려운 부분도 있지만 대체적으로 이해할 수 있다고 했다. D와의 면담과 사사교육과정에서 보여준 많은 고등수학적 개념에 대한 이해 정도는 내면화된 수준 높은 이해임을 알 수 있었다.

D의 고등수학적 개념에 대한 이해 수준은 자신이 운영하는 블로그의 분석과 독자적 연구를 수행하는 과정의 관찰에서도 찾아볼 수 있었다. 블로그에 올려진 '자작문제'는 수학적 개념의 깊은 이해를 바탕으로 만들어진 문제들이다. 스스로 수학 전공서적을 공부하여 얻은 수학적 개념을 재생해 내는 능력과 적절한 곳에 적절하게 활용하는 적용능력을 통해 볼 때 개념의 이해 수준은 깊은 사고로부터 내면화된 관계적 이해임을 알 수 있었다(류희찬 · 조완영 · 김인수, 2003). 고등수학적 개념인 상극한과 하극한의 개념을 어디에 어떻게 써야 하는지에 대하여 정확히 알고 있었으며, 또한 문제해결 시 필요한 수학적 지식을 적절하게 재생시켜 적절한 곳에 의미 있게 그 지식을 활용하는 뛰어난 능력을 지니고 있었다. 예를 들어, 세미나 중에 [그림 2]에서의 두 보조정리와 같은 잘 알려진 사실, 뫼비우스 함수의 성질이나 Fekete의 보조정리 등을 기억 속에서 재생하여 정리 내용을 정확하게 서술하였으며, 문제해결 과정에 적절하게 활용하는 능력을 보여 주었다. 고등수학적 개념에 대한 이해는 단순히 피상적 이해가 아닌 주제탐구에 의미 있게 기여할 지식과 도구로서 독자적 연구 수행과정 내내 보여준 수학적 사고력과 수학적 창의성의 기반이 되고 있었다. 아래 [그림 2]는 보고서 작성의 일부[2]이다.

Lemma 3.3. [3] *Let $f_k(n)$ be the number of all primitive sequences in $\mathcal{A}^n$ when $|\mathcal{A}| = k$. We obtain*

$$f_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) k^{\frac{n}{d}} \tag{3.2}$$

where μ is Möbius function defined by

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & for\ n = 1 \\ 0, & n = cp^2,\ p\ is\ some\ prime\ number \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 p_3 \dots p_r,\ p_i\text{'s are prime numbers} \end{cases}$$

Lemma 3.6. *(Fekete's Lemma) If for sequence $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, $a_{n+m} \le a_n + a_m$ for all $n, m \in \mathbb{N}$, then the following holds*

$$lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$$

[그림 2] 문제해결에 활용한 이미 알려진 사실
[Fig. 2] Known facts utilizing problem solving

(2) 추론능력

D의 추론 능력은 연구문제설정과 자료수집 및 탐구하는 단계에서 두드러지게 드러났다. 수열의 복잡도를

[1] D는 면담에서 관심을 가지고 읽고 있거나 읽었던 전공서적은 Analytic Number Theory, Linear Algebra, Abstract Algebra, Topology, Principles of Mathematical Analysis, Galois theory, Real and Complex Analysis, Algebra, Homological Algebra, Topological Manifold라고 답했다.

[2] 처음 얻어진 결과들을 한글로 정리해 갔으나 사사교육 후반부에는 수학전문 저널에 투고할 것을 목표로 영문으로 작성하였다.

정의하고 이로부터 정리들을 만들어 가는 과정에서, D는 구체적인 상황으로부터 귀납적으로 새로운 문제를 만들기도 했지만, 진행과정이 생략된 채 결론을 추측하기도 하였다. 복잡도를 정의하는 방식은 다음과 같이 귀납적 방식에 의해 이루어졌으며, 이러한 귀납적 정의를 잘 이해하고 있었고 이를 정당화하는 과정이 매우 유연하였다.

정의1 A^*에서 자연수 집합으로 가는 함수 C를 다음과 같이 귀납적으로 정의하자

1) $l(S)=1$이면 $C(S)=1$

2) $l(S)<n$인 $S \in A^*$들에 대해 정의됐다 하고 $l(S)=n$인 것들에 대해 다음과 같이 한다

case1)S가 반복일 때, 즉 2 이상의 자연수 k에 대해 $S' \in A^*$가 존재해서 $S=S'^k$일 때

$C(S)=C(S')$ (n이 최대가 아니면 다음 단계에서 다시 case1이 되므로 잘 정의됨)

case2)case1이 아닐 때

S의 복잡도 $C(S)=\min\{C(S(1,k))+C(S(k+1,n))|k=1,2,\cdots,n-1\}$

[그림 3] 유한수열의 복잡도의 귀납적 정의
[Fig. 3] Inductive definition of finite sequence complexity

D의 귀납적 추론능력은 고등수학적 지식에 기반한 논리의 결과이기도 하였으며, 문제의 해에 대한 정당화 과정에서 볼 때 연역적 사고에도 익숙해 있음을 알 수 있었다.

(3) 수에 대한 감각과 계산속도

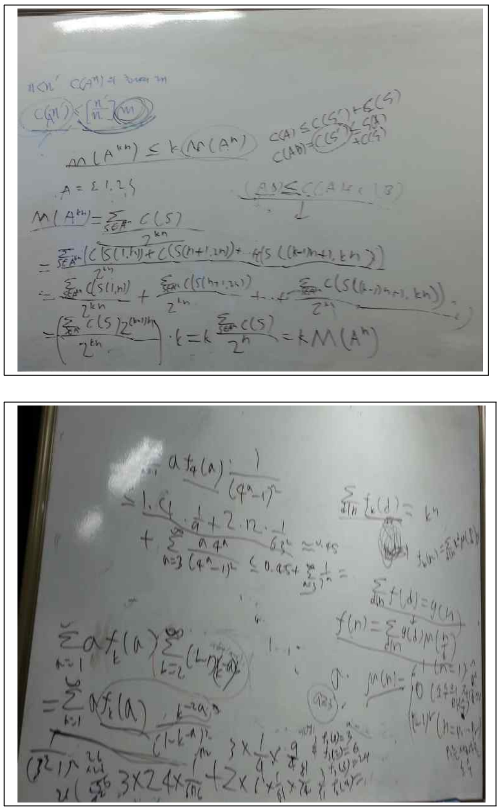
대부분의 수학영재들처럼 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 정보를 신속하게 처리할 수 있는 능력을 가지고 있었으며, 특히, 수에 대한 관심과 뛰어난 감각 및 계산 능력을 가지고 있었다. 이는 나름대로 수와 수의 연산에 대한 구조를 파악하고 있는 결과라고 생각할 수 있다. 아래 [그림 4]에서 보듯이, 탐구단계에서 계속되는 정수의 합에 대한 계산은 머릿속에서 자유자재로 이루어졌으며, 그 결과는 매우 빠르고 정확하였다.

(4) 수식, 기호를 사용한 표현

[그림 4]에서 보듯이, D는 수학적 개념을 수식화하고 기호화하는 능력이 매우 높은 수준이었으며, 특히 탐구과정에서 지속적으로 수식이나 기호의 표현을 간결화하고 표현을 세련되게 수정해 가는 정교함을 보였다.

(5) 수학에 대한 흥미와 관심도

선정된 연구 주제는 수학영재아 자신의 흥미와 관심도를 반영하고 있기 때문에 특히 주제 선정 단계에서 수학영재아의 흥미와 관심도를 엿볼 수 있다. D는 대수학 혹은 정수론 조합론에 관심을 보였으며, 조합론이나 해석학, 대수학 관련 지식은 혼자서 호기심과 흥미를 가지고 공부해 얻은 결과였다.



[그림 4] 자신이 탐구한 내용을 화이트보드에 판서한 내용(정수의 합에 관한 연산과정)
[Fig 4] Exploring content that Student D wrote on a white board

영재교육원 중등수학반 때 “등주문제”를 원격교육과제로 제시한 적이 있었는데, 보고서는 6문제 중 두 문제만 단답식으로 답을 적고 나머지는 빈칸으로 놔둔 채 제출하였다. 그러나 출석수업에서 발표지명을 받자 칠판에 등주문제를 해결하는 과정을 막힘이 없이 논리적으로 제시했으나 직접 설명하는 것은 싫어했다. 피아제는 문제해결과 내적 동기에 관련하여 어린이의 행동을 기술하는

과정에서 “사람들은 관심 없는 문제를 결코 해결하지 않을 것이다.”라고 추론하였듯이(Bringuier, 1980), 도전적이지 못한 문제, 자신의 흥미를 끌지 못하는 지루한 문제에 대해서는 반응하지 않고 변화를 즐기는 영재아의 고집스러움을 볼 수 있었다.

중학생으로서 고등부 KMO에서 금상을 수상하는 등 경시대회 준비과정에서 공부한 정수론은 상당한 수준이었다. 그러나 면담 결과 올림피아드나 경시대회에서의 수상에도 불구하고 그러한 대회 출전에 별로 흥미를 갖지 않았으며 자신이 관심 있는 문제들을 만들고 이를 해결해 가는 데 더 큰 관심과 흥미를 가지고 있음을 알 수 있었다.

2) 수학적 능력

(1) 직관적 통찰력

D의 직관적 통찰력은 특히 주제 선정, 연구문제의 설정, 자료수집 및 탐구단계에서 관찰되었다. 일반적으로 주어진 문제를 해결하는 능력이 뛰어나다고 해도 학생 스스로 탐구할 주제를 선정하고 문제를 만드는 일은 영재학생일지라도 쉽지 않은 것이 사실이다. 주제 선정 단계에서는 D의 의견에 따라 탐구 주제를 ‘유한수열의 복잡도’로 정했다. 주제가 정해지면 팀원들의 다양한 의견들로부터 새로운 연구문제를 발견해 나가야 하지만, D가 제시한 수열의 복잡도 개념을 팀원인 다른 두 학생이 완전히 이해해서 문제를 만들기에는 무리였다. 따라서 문제발견 또한 D에 의해 주도적으로 이루어졌다. D는 다음과 같이 연구문제를 설정하고, 이를 기호화해서 다음과 같이 표현하였다. 연구문제설정단계에서 탐구하고자 하는 문제를 기호를 사용하여 표현했으며, 지도교수의 의견을 들어 약간 수정하기도 하였다.

- 유한집합 위에서 정의된 유한수열의 복잡도를 어떻게 정의할 것인가?
- 유한수열의 길이가 증가함에 따라 복잡도의 평균은 어떻게 될까?
- 유한수열의 길이가 증가함에 따라 복잡도의 최댓값은 어떻게 될까?

D는 이미 자신이 정의한 ‘유한수열의 복잡성’에서 관심 있는 문제의 결론을 예측하고 있었으며, 이러한 결론의 예측은 단순한 일차적 직관이 아닌 수학적 추론능력에 바탕을 둔 이차적 직관임을 알 수 있었다. 영재교육에서 수학영재들이 ‘골드바흐의 추측’ 혹은 ‘페르마의 마지막 정리’ 등과 같은 수에 관련된 문제들에 많은 관심을 갖고 이를 해결해 보려는 시도를 하는 것을 수시로 경험한다. D의 블로그와 사사교육과정 동안 관찰한 결과로 볼 때, 기하에 대한 관심보다는 수 또는 대수 분야에 대한 관심이 훨씬 더 높았으며, 특히 수에 대한 뛰어난 감각과 직관적 통찰력을 관찰할 수 있었다.

$$\lim_{n->\infty}\frac{M(C(\mathcal{A}^n))}{n}=\inf_{n\in\mathrm{N}}\frac{M(C(\mathcal{A}^n))}{n}=?\text{、}\lim_{n->\infty}\frac{\max(C(\mathcal{A}^n))}{n}=\inf_{n\in\mathrm{N}}\frac{\max(C(\mathcal{A}^n))}{n}=?$$

[그림 5] 연구문제를 기호로 표현

[Fig. 5] Expression of research question by sign

논리적 사고에 몰두하는 인간의 마음은 나름대로의 논리적인 면을 가지고 직관을 발달시킨다고 한다(류희찬 · 조완영 · 김인수, 2003). D의 수에 대한 직관적 통찰력은 내면화된 수학적 구조와 수학적 논리에 기반하고 있었으며, 정수 합에 관한 연산들을 순간적으로 떠올리며 계산하고 기호화해서 표현하는 등 많은 수학적 경험에 노출된 세련되고 논리적 반응에 순응하는 형식적 직관임을 알 수 있었다. 또한 문제를 해결해 가는 과정에서 보여준 독창성 또한 D가 지닌 특성중의 하나였다. [그림 4]에서 보여준 연산과정들은 수에 대한 뛰어난 직관력을 바탕으로 이루어졌다.

(2) 추상화 능력

주제의 선정은 진행될 연구의 방향과 질을 결정한다는 점에서 매우 중요하다. 관심 있는 문제가 주제로 선정될 경우 영재학생들 또한 문제해결에 대한 적극성과 도전성은 더욱 빛을 발할 수 있다. 그러나 일반적으로 영재학생들조차도 주제를 정하고 문제를 만드는 것을 어려워한다.

처음 학생들에게 자신이 가장 관심 있는 주제 혹은 이 기회를 통해 연구해 보고 싶은 주제들을 얘기해 보라고 했을 때, 학생들은 주제를 잡지 못했고 D는 침묵하고 있었다. 주제선정에서 멘토의 도움을 필요로 하는 단계라고 생각하고 기하 관련 주제를 제시하고 이 주제가 학생들이 연구하기에 적합한 주제임을 구체적으로 설명하였다. 두 여학생은 연구주제로 받아들였으나 D는 그 문

제에 별 흥미를 보이지 않았고 기하학 문제가 아닌 다른 문제, 즉, “수의 배열을 심리적으로 복잡하게 느끼는 정도(우리는 나중에 이를 ‘복잡도’라고 이름을 붙였다)를 수치화해 보고 싶다.”는 의견을 표명했다. 사실 복잡도(complexity)라는 개념은 다양한 분야에서 다루어지고 있지만, D는 이러한 개념에 대한 어떤 문헌이나 논문도 접해 본 적이 없음을 대화를 통해 알 수 있었다. 연구자는 D가 유한수열의 복잡도에 대한 자신의 정의를 소개하는 것을 듣고 그 정의의 타당성에 수긍하였으며, 수학적 능력에 대한 신뢰를 바탕으로 계속 지켜보기로 했다. 다른 두 학생도 D의 주제 선정에 동의함에 따라 주제를 “복잡도에 관한 연구”로 정했다.

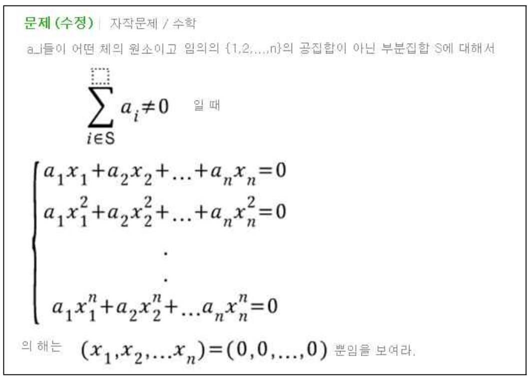
인간의 심리를 수학적으로 개념화하려는 D의 시도는 수학 외적인 대상을 수학과 연결하여 설명하고자 하는 높은 수준의 수학적 추상화 능력으로 볼 수 있으며, 이러한 추상화 능력은 수학적 지식과 논리에 기반한 뛰어난 직관이 근간을 이루고 있음을 알 수 있었다.

(3) 일반화 및 적용능력

Krutetskii(1976)에 의하면 수학영재학생들은 다양하고 특정한 문제들 사이에 숨어 있는 일반성을 쉽게 찾아내고, 외견상 감추어진 현상의 내재된 본질을 보고, 외견상 다르고 구별되는 것 중에서 무엇이 주된 것이고, 기본적이고, 일반적인가를 파악하는 능력이 뛰어나며, 심지어는 문제를 풀기도 전에 일반화하려고 하는 경향이 있다고 하였다. D는 자신이 이미 학습한 내용의 본질을 파악하여 새로운 내용으로 전이시키고, 친숙하지 않은 상황을 수학적 개념으로 전이하는 뛰어난 능력을 가지고 있었다. D는 수학적 개념을 이해한 후에는 그 개념을 확장하거나 그와 관련된 문제들을 스스로 만들고 해결해나가는 것을 일상화하고 있었다. 부모와의 면담에 의하면, 초등학교 때 처음 피타고라스 정리를 접한 후 이를 신기해하며 자기 스스로 이와 관련된 새로운 공식과 증명법을 만들려고 밤을 새우기도 했다. 탐구활동의 관찰에서 혹은 블로그의 내용에서 볼 수 있듯이, 항상 자신이 학습한 내용에 만족하지 않고 알고 있는 사실을 더 넓은 범위로 확장하거나 일반화하는 등 자기만의 정리나 공식을 만들고 이를 해결해 보려는 끊임없는 노력을 보였으며, 이 과정에서 자연스럽게 연구하는 자세가 형성되었다고 볼 수 있다.

(4) 수학적 창의성

D는 수학에 관심을 갖기 시작한 초등학교 4학년 때부터 수학 관련 의견을 올리는 블로그를 운영하였는데, 중학교 3학년 초에 학교공부를 위하여 폐쇄하였다가 현재는 다시 블로그를 운영하고 있다. D의 블로그를 방문한 사람들이 남긴 댓글에서도 이 학생의 수학적 능력에 대한 평가를 엿볼 수 있었다. 주목할 것은 이 학생의 뛰어난 수학 지식 수준보다 이 수학 지식을 기반으로 새로운 문제를 만들어 내는 능력이다. D는 블로그에 자신이 공부한 내용을 정리해 올리고, 다른 학생들과의 소통을 원하고 있었으며, 자신이 만든 새로운 문제들과 그 문제에 대한 답을 올리는 등 자신의 수학적 의견을 피력하고, 이에 대한 의견을 공유하는 장으로 블로그를 활용하고 있었다. 이 블로그의 올려진 [그림 6]의 ‘자작문제와 해답’에서는 자신의 수학적 지식을 토대로 새로운 문제를 만들어내는 독창성, 그리고 이를 논리적으로 모순이 없이 다듬어내고 표현하는 정교성 등 수학적 창의성뿐만 아니라, 직관적 통찰력, 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용능력 그리고 반성적 사고능력 등의 수학적 사고력이 뛰어남을 엿볼 수 있었다. 또한 자신의 의견을 연역적으로 정당화하는 능력, 즉, 연역적 증명에 익숙한 모습도 볼 수 있었다.

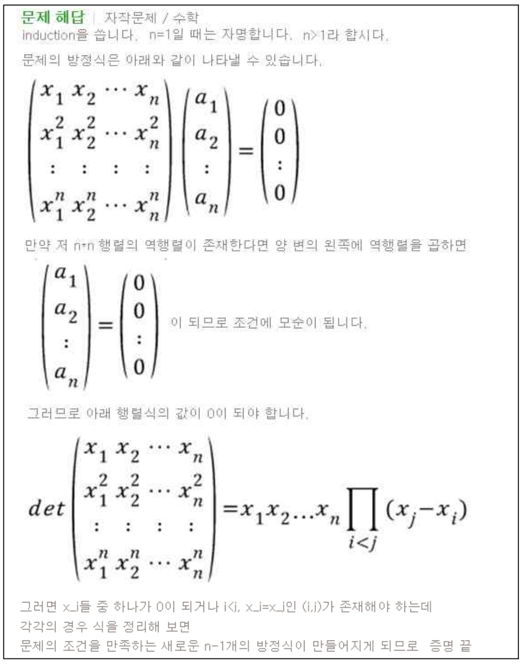

문제 (수정) | 자작문제 / 수학

a_i들이 어떤 체의 원소이고 임의의 {1,2,...,n}의 공집합이 아닌 부분집합 S에 대해서

$$\sum_{i \in S} a_i \neq 0 \quad \text{일 때}$$

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx_n^2=0 \\ \quad\vdots \\ a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots a_nx_n^n=0 \end{cases}$$

의 해는 $(x_1,x_2,\ldots x_n)=(0,0,\ldots,0)$ 뿐임을 보여라.



문제 해답 | 자작문제 / 수학

induction을 씁니다. n=1일 때는 자명합니다. n>1라 합시다.

문제의 방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

만약 저 n*n 행렬의 역행렬이 존재한다면 양 변의 왼쪽에 역행렬을 곱하면

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 이 되므로 조건에 모순이 됩니다.

그러므로 아래 행렬식의 값이 0이 되야 합니다.

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = x_1 x_2 \ldots x_n \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

그러면 x_i들 중 하나가 0이 되거나 i<j, x_i=x_j인 (i,j)가 존재해야 하는데

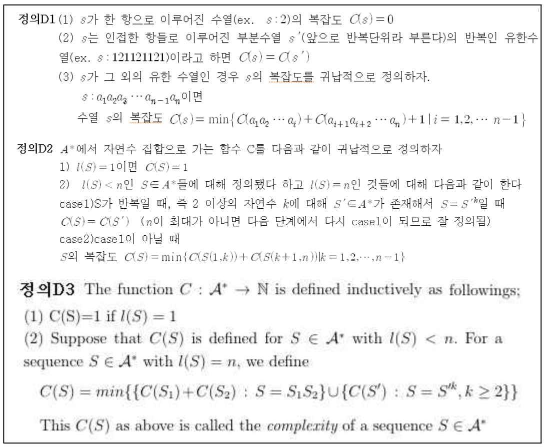
각각의 경우 식을 정리해 보면

문제의 조건을 만족하는 새로운 n-1개의 방정식이 만들어지게 되므로 증명 끝

[그림 6] 블로그의 ‘자작문제란’의 내용일부

[Fig. 6] Some problem on Student D’s blog

복잡성을 정의하는 과정에서 기호나 수식의 표현, 귀납적 정의 등에 매우 익숙한 모습을 보였으며, 연구의 진행과정에서 발견되는 모순의 제거 혹은 간결한 수식 표현을 위해 수열의 복잡도 정의를 세 단계에 걸쳐 수정하는 등 수학적 창의성의 정교성과 뛰어난 반성적 사고능력을 보이는 등 수학자의 연구과정에서 볼 수 있는 장면들을 보여주었다. [그림 7]에서처럼 처음 정의 D1에 편의상 +1을 했던 부분이 이론전개 상 매끄럽지 못한 부분이 나타나자 D는 즉각 정의를 수정하여 다시 정의 D2를 제시했으며, 이를 다시 보완하여 정의 D3를 완성하였다. 이는 정의의 명확성과 단순성 및 합리성을 추구해가는 결과로서 뛰어난 반성적 사고능력을 보여준 예라고 할 수 있다. 연구 결과는 저널에 싣는 것을 목표로 했기 때문에 지도교수의 조언을 받아 연구결과를 영문으로 정리하였다[3]. 그는 이 정의와 또 다른 복잡도의 정의를 제시하고 두 정의의 동치성을 조사하였는데, 이는 수학적 창의성의 하위요소 중 하나인 유창성이 두드러진 예이다.



정의D1 (1) s가 한 항으로 이루어진 수열(ex. $s:2$)의 복잡도 $C(s)=0$

(2) s는 인접한 항들로 이루어진 부분수열 s'(앞으로 반복단위라 부른다)의 반복인 유한수열(ex. $s:121121121$)이라고 하면 $C(s)=C(s')$

(3) s가 그 외의 유한 수열인 경우 s의 복잡도를 귀납적으로 정의하자.

$s: a_1a_2a_3 \cdots a_{n-1}a_n$이면

수열 s의 복잡도 $C(s)=\min\{C(a_1a_2\cdots a_i)+C(a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n)+1 \mid i=1,2,\cdots n-1\}$

정의D2 A^*에서 자연수 집합으로 가는 함수 C를 다음과 같이 귀납적으로 정의하자

1) $l(S)=1$이면 $C(S)=1$

2) $l(S)<n$인 $S\in A^*$들에 대해 정의됐다 하고 $l(S)=n$인 것들에 대해 다음과 같이 한다

case1)S가 반복일 때, 즉 2 이상의 자연수 k에 대해 $S'\in A^*$가 존재해서 $S=S'^k$일 때

$C(S)=C(S')$ (n이 최대가 아니면 다음 단계에서 다시 case1이 되므로 잘 정의됨)

case2)case1이 아닐 때

S의 복잡도 $C(S)=\min\{C(S(1,k))+C(S(k+1,n)) \mid k=1,2,\cdots,n-1\}$

정의D3 The function $C: \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$ is defined inductively as followings;

(1) C(S)=1 if $l(S)=1$

(2) Suppose that $C(S)$ is defined for $S\in\mathcal{A}^*$ with $l(S)<n$. For a sequence $S\in\mathcal{A}^*$ with $l(S)=n$, we define

$$C(S)=min\{\{C(S_1)+C(S_2) : S=S_1S_2\}\cup\{C(S') : S=S'^k, k\geq 2\}\}$$

This $C(S)$ as above is called the *complexity* of a sequence $S\in\mathcal{A}^*$

[그림 7] 세 단계에 걸친 complexity에 대한 귀납적 정의의 완성

[Fig. 7] Inductive definition’s completion of complexity by 3-step

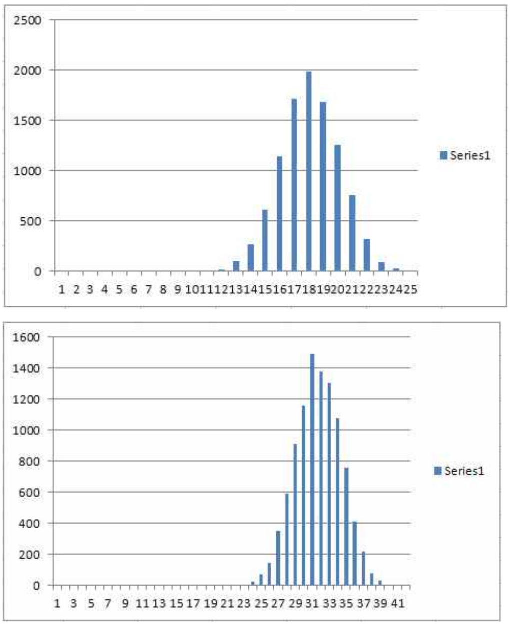
(5) 정보의 조직화 및 처리능력

수학영재들은 주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 이를 분류하고 조직하는 능력이 매우 뛰어나다. 이를테면, D는 수와 수의 연산 구조가 잘 조직화되어 있어 복잡한 계산도 암산에 의해 결과를 얻어내고, 계산과정도 핵심적인 부분만 간결하게 표현하였다. 블로그에는 자신이 공부한 내용을 정리해 올려놓고 다른 블로거들과의 대화를 시도하고 있었다. D는 일단 습득한 지식을 잘 정리하고 분류해서 기억하고 있었으며, 필요할 경우 자신의 지식 창고로부터 문제해결에서 관련된 개념정보를 이끌어내는 능력 또한 뛰어났다.

컴퓨터를 이용해 정보를 조직화하고 처리하는 능력은 이 연구를 진행하는 데 큰 도움을 주었다. 연구문제를 설정하고 복잡도를 정의한 후 수열의 길이 n이 늘어남에 따라 복잡도의 평균이 어떻게 변해가는지에 대한 구체적 정보를 위해, 컴퓨터에서 얻은 프로그램과 엑셀을 이용하여 길이가 n인 10000개의 무작위 수열의 복잡도 분포상황을 시뮬레이션을 해 오는 등 컴퓨터 조작에도

[3] 10개월간의 독자적 연구를 통해 완성된 논문은 FJMS(Far East Journal of Mathematics Science, Vol. 87, No. 2, 2014)에 있음.

능숙함을 보였다.



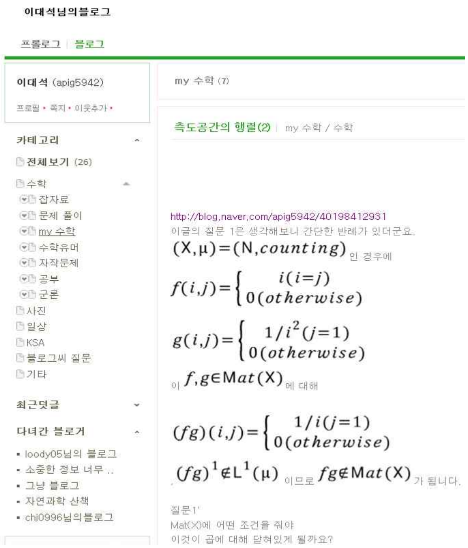
[그림 8] 길이가 50, 90인 수열(각각 10,000개씩)의 복잡도의 평균
[Fig. 8] Average of complexity in sequences(scale are 10,000) of length 50, 90

3) 수학적 성향

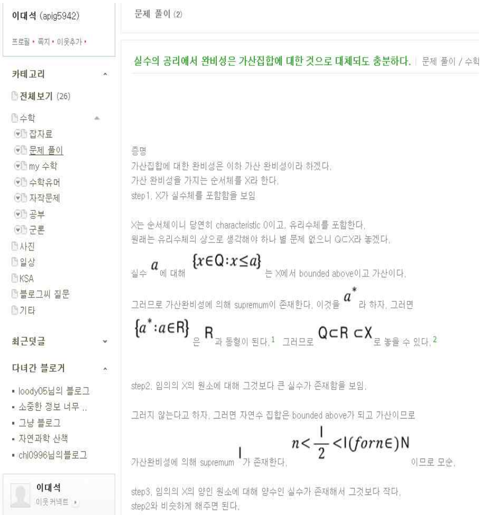
(1) 의사소통능력

수학영재들은 보다 좋은 수학적 언어사용 능력과 올바른 수학적 언어사용이 가능하며 엄밀한 의사소통을 좋아한다. D는 복잡성을 정의하는 과정에서 자신의 생각을 기호나 수식으로 잘 표현하였으나, 이를 말로 다른 학생들에게 설명하는 데는 어려움이 있었다. 이는 어휘력의 부족이 아니라 완벽성을 추구하는 성격에서 오는 발표에 대한 불안감이었으며, 이로 인하여 스스로도 많은 어려움을 느끼고 있음을 알 수 있었다. 그러나 자신의 결과물을 발표하는 것을 주저하지 않는 등 이를 극복하려는 노력이 보였으며, 글로써 수식이나 기호를 써서 수학적 대상에 대한 자신의 생각을 남에게 전달하는 데는 매우 적극적이고 익숙해 있었다.

D는 수학 관련 블로그를 운영하여 수학에 관심 있는 다른 사람들과 소통하고 있었다. 수학에 관심을 가지고 과학영재교육원 초등수학반에 입학하면서 수학 관련 블로그를 운영하기 시작하였으나 중학교 2학년 때 폐쇄했다가 현재 다시 운영하고 있다. 블로그는 자신이 공부한 내용을 올리는 '나의 수학', 자신이 만든 문제와 답을 올린 '자작문제', '수학자료'란 등을 운영하면서 자신의 수학적 지식을 정리하고 다른 네티즌과의 수학에 관한 의견을 나누는 공간으로 활용하고 있었다. 이를 통해 볼 때 D는 자신의 수학적 지식과 자작문제 및 그 문제의 해결에 대하여 공적으로 인정받기를 원하였고, 블로그를 통하여 서로의 의견을 나누는 의사소통에 매우 적극적이고 뛰어남을 알 수 있었다. 연구의 결과를 정리하는 단계에서 능숙한 기호사용과 영어사용 능력을 발휘하여 보고서를 작성하였다[4].



4) 수학저널에 발표하기 위해서 보고서를 영어로 작성하였다. D 스스로 영어보고서 작성이 가능했지만 논문작성 경험이 없기 때문에 지도교수의 도움을 받아 저널의 형식에 맞게 영어로 결과를 정리하였다.



[그림 9] D가 운영하는 블로그 내용의 일부
[Fig. 9] Some contents of D's blog

(2) 과제집착력과 동기

D는 자신이 관심 있는 과제에 대해서는 끝까지 몰두해서 해결하고 마는 과제집착력을 가지고 있으며, 그러한 관심과 집착은 외재적 자극이 아닌 내재적 동기에 의해 형성되었음을 알 수 있었다. 자신이 흥미를 느끼는 부분에 대해서는 주로 인터넷 검색과 전공서적 탐독을 통해 욕구를 해소해 가고 있었다. 탐구과정에서는 해결해야 할 문제를 학교에서 해결하지 못하는 경우 집에서 반드시 해결해 오곤 했는데 때론 밤을 새우기도 했다. D는 주말에 만나는 사사교육시간을 매우 즐기고 있었다. 자신이 해결해온 문제를 지도교수에게 설명하고 정당화 과정을 인정받는 것으로 인하여 더욱 탐구에 열중하였으며, 특히 블로그에서 다른 블로거들과 수학문제에 대하여 토론하는 것은 D에게 더욱 어려운 수학문제에 관심을 가지고 도전하도록 동기를 부여하고 있었다.

(3) 독립성

부모의 설문결과에 의하면, 자기 주장에 대한 완고함과 강한 개인적 성향 등으로 다른 사람들과의 타협이나 협조가 원활한 편은 아니었다. 독자적 연구를 수행하는 과정에서도 자신의 방법과 자신이 얻은 결과에 대하여 상당한 자신감과 동시에 고집스러움을 보였으며, 될 수 있으면 지도교수의 도움을 받지 않고 끝까지 스스로 해결해 보려는 생각이 매우 강했다. 하물며 자료수집단계에서 인터넷을 통해 찾은 복잡도 관련 논문들은 기호 사용의 일관성을 위해 보고서 정리 단계에서 약간 참고하는 정도였다.

(4) 수학과 연관성

수학영재는 하나의 구조에서 다른 구조로, 하나의 전략으로부터 다른 전략으로 쉽게 연결하고, 수학적으로 학습한 내용을 사회적 상황, 다른 교과내용들에 적용하는 능력을 가지고 있다. D는 수학이라는 렌즈를 통하여 복잡하다는 심리적 상태를 들여다봤으며, 이를 수학적으로 설명하려는 시도를 하였다는 점에서 볼 때, 다른 일상적인 문제들도 수학적으로 해결해 보려는 성향을 가지고 있으리라 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

10개월 동안 운영된 사사교육은 독자적 연구 모형에 따라 수행되었으며, 사사교육을 통해 수학영재학생들은 수학자처럼 연구하는 경험을 하였다. 독자적 연구를 진행하면서 나타난 연구대상자의 수학적 능력은 마치 많은 연구를 경험한 것처럼 수학자들의 연구과정과 매우 흡사함을 알 수 있었다. 이 과정에서 과학영재교육원 출석수업이나 집중교육 동안 관찰하지 못했던 연구대상자의 여러 가지 수학적 행동특성들을 관찰할 수 있었다. 이는 독자적 연구에서 주제 및 연구 문제가 높은 수준의 사고를 요구하는 개방형 문제 – 즉, 구조화되지 않은 문제-를 다루었고, 또한 장기간에 걸친 프로젝트수행과정에서 학생과의 지속적인 상호작용의 결과라고 생각한다.

독자적 연구 수행과정에서 얻은 자료와 학생과 학부모의 면담, 학생이 운영하는 블로그 등으로부터 수집한 자료들을 중심으로 연구대상자의 행동특성을 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 수학영재아의 일반행동 특성은 자기주장이 강하고 개인주의적 성향이 강했으며, 친구들과 잘 어울리지 못했다. 자신의 의사를 글로 표현하는 데는 문제가 없었으나 말로 표현하는 데는 약간의 두려움과 불안감을 가지고 있었으며, 이는 흔히 영재들에게서 볼 수 있는

완벽주의 성향으로 인하여 나타나는 현상이라고 생각한다. 그러나 이를 극복하려는 노력이 보였으며 호기심이 많고 자신이 관심을 갖는 문제에는 끈기 있게 도전함을 알 수 있었다.

둘째, 수학영재아는 편향된 독서와 관심을 가지고 있었으며, 인문과학이나 수학외의 다른 자연과학에는 큰 관심을 보이지 않았다. 융합을 강조하는 시대적 요구에 맞추어 타 분야에도 관심을 갖고 일반지식기반을 넓혀가도록 지도할 필요가 있음을 알 수 있다.

셋째, 수학영재아는 정수의 합 연산을 빠른 속도로 시행하는 수에 대한 뛰어난 직관력을 가지고 있었다. 문제풀이에 길들여진 형태가 아닌 깊이 있는 사고와 시간을 요하는 탐구활동과 같은 많은 수학적 경험에 노출된 세련되고 논리적 반응에 순응하는 형식적 직관을 가지고 있음을 알 수 있었다.

넷째, 수학영재아는 고등수학적 개념을 이해하고 습득하는 데 그치지 않고 새로운 문제로 발전시켜 가는 독창성과 복잡도의 여러 가지 정의방법 제시 등에서 보여주는 유창성, 그리고 수학 개념의 정의와 문제해결과정에서 끊임없이 수정하고 보완해 가는 높은 반성적 사고능력, 얻어진 결과들을 정리하는 과정에서 간결성과 합리성을 추구하는 정교성이 두드러게 관찰되었다.

다섯째, 수학영재아는 고등수학적 개념에 대한 빠른 이해력과 정보조직화 능력을 지니고 있었으며, 문제해결 시 풍부한 지식저장고에서 관련 지식을 빠르게 재생시켜 적절한 곳에 의미 있게 그 지식을 활용하는 능력을 지니고 있었다.

여섯째, 수학영재아는 인간의 심리를 수학적으로 설명하려는 시도에서 수학적 추상화 능력을 드러냈으며, 복잡도를 정의하고 관련된 문제를 해결해 나가는 과정에서는 귀납적 추론 능력뿐 아니라 고차적 수학능력이라고 할 수 있는 연역적 증명에도 익숙해 있었다.

연구 대상자는 뛰어난 수학적 사고의 특성, 특히 수학적 창의성을 바탕으로 마치 전문가의 연구과정과 흡사하게 독자적 연구를 수행하였다. 이 사례연구에서 연구대상자가 보여준 수학적 행동특성이 모든 영재아에게서 나타나는 특성이라고 할 수는 없다. 그러나 사례연구를 통하여 수학영재에 대한 이해의 폭을 넓힘으로써, 수학영재아를 위한 차별화된 프로그램의 제공의 필요성과 끊임없이 도전적 과제에 노출될 수 있는 환경조성의 필요성을 인식하고, 수학영재의 선발과 교육, 특히 사사교육의 효율적 운영에 대한 시사점을 얻을 수 있었다. 그 시사점은 다음과 같다.

첫째, 수학영재들에게 협동 프로그램뿐 아니라 차별화된 개별프로그램의 제공 또한 필요하다. 연구대상자와 같은 경우 영재교육원 시절 팀별교육에서는 자신의 능력을 전혀 드러내 보이지 못했으나, 이번에 운영된 독자적 연구에서는 자신의 숨은 수학적 재능을 마음껏 드러냈다.

둘째, 영재선발에 있어서 특정분야의 영재성을 고려해야 하며, 영재성이 발견될 경우 수시로 선발하여 교육할 수 있는 선발제도의 유연성이 필요하다. 최근 과학영재교육에서도 융합형 교육이 강조되고 있다. 이와 함께 융합형 과학영재의 선발을 위해 과학과 수학의 모든 분야에 뛰어난 영재를 선발하고 있다. 그러나 이러한 이와 같은 선발체제 하에서는 연구대상자와 같이 특정분야에서만 두드러진 영재성을 보이는 영재는 선발에서 소외될 위험이 있다.

셋째, 독자적 연구는 사사교육의 한 방법으로서 권장되어야 할 학습방법이다. 일반 과학영재교육에서는 드러나지 않았던 수학영재로서의 수학적 행동특성도 독자적 연구의 수행과정에서 두드러지게 나타났다. 이는 창의적 산출물을 목표로 수행되는 독자적 연구에서는 수학영재의 수학적 사고와 수학적 창의성이 기반이 될 때 원하는 성과를 얻을 수 있다는 것을 의미하며, 이러한 경험에의 노출은 수학적 사고력과 수학적 창의성의 향상에 도움이 된다는 것을 의미한다.

넷째, 주제설정과 연구문제의 발견은 전략적인 접근을 필요로 하고, 이는 영재학생들이 습득해야 할 중요한 기능 중의 하나이다. 독자적 연구에서 가장 어려우면서 훈련이 필요한 부분은 주제설정과 연구문제의 발견이다. 영재라고 해도 자기주도적인 탐구기능을 알고 있는 것은 아니기 때문에 연구기능 습득을 위한 경험이 필요하다.

참 고 문 헌

김지원, 송상헌 (2004). 한 수학영재아아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구, 수학교육학연구 4(1), 89-110.

Kim, J.W., & Song, S.H. (2004). A case study on mathematical thinking characteristic of a gifted child, *The Journal of Educational Research in Mathematics 14*(1), 89-110.

송상헌 (2000). 수학영재아들을 위한 행동특성 검사지의 개발과 활용에 관한연구, 학교수학 2(2), 427-457.

Song, S.H. (2000). A study on the development of an instrument to measure the behavior characteristics of the mathematical gifted children, *School mathematics 2*(2), 427-457.

신인선, 김시명 (2006). 개방형 문제 해결과정에서 수학영재아와 수학 우수아의 행동특성 분석, 수학교육논문집 20(1), 33-59.

Shin, I.S., & Kim, S.M. (2006). An analysis on behavior characteristics between gifted students and talented students in open-end mathematical problem solving, *Communications of mathematical education 20*(1), 33-59.

황동주 (2006). 수학영재를 위한 행동 특성 검사도구 개발, 한국학교수학회논문집 9(3). 405-424.

Hwang, D.J. (2006). The development of behavior characteristics scale in the mathematically giftedness of the middle school, *Journal of the Korean School Mathematics 9*(3), 405-424.

류희찬, 조완영, 김인수 (2003). 고등수학적 사고, 서울: 경문사.

Lew, H.C., Cho, W.Y., & Kim, I.S. (2003). *Advanced mathematical thinking*, Seoul: Kyoungmoon.

Kaplan, S., Madsen, S., & Gould, B.(1976). *The big book of independent study,* Santa Monica, CA: Goodyear

Karnes, F. A. & Bean, S. M.(2009). *Methods and Materials for Teaching the Gifted,* Prufrock Press, Inc.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children,* The Univ. of Chicago Press.

Renzulli, J. S.(1977). *The enrichment triad model: A guide for developing defensible programs for the gifted and talented,* Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Analysis on mathematical behavior characteristics of a mathematically gifted student in independent study

Jeong, Jin-yeong
Gwangju high-school, 302, Jungang-ro, Dong-gu, Gwangju, Korea.
E-mail : jin6791@hanmail.net

Kang, Soon-ja
Chonnam national university, 77, Yongbong-ro, Buk-gu, Gwangju, Korea
E-mail : Kangsj@chonnam.ac.kr

According to Krutetskii, the education of mathematically gifted students must be focused on the improvement of creative mathematical ability and the mathematically gifted students need to experience the research process like mathematician. Independent study is highly encouraged as the self-directed activity of highest level in the learning process which is similar to research process used by experts.

We conducted independent study as a viable differentiation technique for gifted middle school students in the 3rd grade, which participated in mentorship program for 10 months. Based on the data through the research process, interview with a study participant and his parents, and his blog, we analyzed mathematical behavior characteristics of a study participant.

This behavior characteristics are not found in all mathematically gifted students. But through this case study, we understand mathematically gifted students better and furthermore obtain the message for the selection and education of the mathematically gifted students and for the effective method of running mentorship program particularly.

* ZDM Classification : C43, C39, D43, D93
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B60, 97C20, 97D50
* Key words : Mathematically Gifted Student, Mathematical Behavior Characteristics, Independent Study, Mentorship Program