

# 회전하는 강체허브에서 전개하는 보 끝단의 직선궤적오차 저감 Straight-line Path Error Reduction for the End of a Flexible Beam Deploying from a Rotating Rigid Hub

김 병 진\* · 김 형 래\* · 정 진 태†  
Byeongjin Kim, Hyungrae Kim and Jintai Chung

(Received October 2, 2014 ; Revised October 2, 2014 ; Accepted October 16, 2014)

**Key Words** : Flexible Robot Manipulator(유연한 로봇 매니플레이터), Deploying Beam(전개하는 보), Rotating Beam (회전하는 보), Straight-line Path(직선궤적), Residual Vibration(잔류진동), Trajectory Error(궤적오차)

## ABSTRACT

This paper presents a reduction method for a straight-line path error of a flexible beam deploying from a rotating rigid hub. Previous studies discussed about only vibration phenomena of flexible beams deploying from rotating hubs; however, this study investigates a vibration reduction of a rotating beam with variable length. The equation of motion and associated boundary conditions are derived for a flexible beam deploying from a rotating rigid hub, and then they are transformed to a variational equation. By applying the Galerkin method, the discretized equations are obtained from the variational equation. Based on the discretized equations, the dynamic responses of a rotating/deploying beam are analyzed when the beam end has a straight line motion. A reduction method for the trajectory error is proposed, using the average length of a rotating/deploying beam. It is shown that the proposed method is able to reduce the residual vibration of a rotating/deploying beam.

## 1. 서 론

회전하며 전개하는 보는 유연체 보가 각주형 조인트(prismatic joint)를 중심으로 직선운동과 회전운동을 동시에 하는 시스템이다. 실제 산업 현장에서 사용되는 로봇 매니플레이터(manipulator) 중 원통형 매니플레이터가 이에 속하며, 다른 형태의 매니플레이터 보다 로봇의 끝 단 궤적을 쉽게 그릴 수 있다는 장점이 있다<sup>(1)</sup>. 로봇 팔의 끝단에는 레이저

커팅기, 취출 장치, 드릴링 등의 다양한 기구 들이 부가될 수 있으며, 수학적 모델에서는 끝단 질량(tip mass)으로 고려된다. 과거에는 매니플레이터의 동적 안정성 및 끝단 궤적 오차를 줄이기 위해 로봇 팔을 길이에 비해 매우 두껍게 만들었다.

하지만 이는 로봇 전체의 무게를 증가시키며, 고출력 액추에이터(actuator)를 요하여 높은 에너지 소비 및 로봇의 제작 단가를 높이게 된다. 따라서 고효율 로봇을 위한 로봇 팔의 경량화는 과거에서부터 연구 되어오고 있는 효과적인 방법 중 하나이다<sup>(2)</sup>.

† Corresponding Author ; Member, Hanyang University  
E-mail: jchung@hanyang.ac.kr  
Tel:+82-31-400-5287, Fax:+82-31-406-6964  
\* Hanyang University

# A part of this paper was presented at the KSNVE 2014 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

하지만, 로봇 팔의 두께를 감소시키면, 구조물의 동적 불안정성이나 진동에 의한 궤적 오차를 발생시킨다.

이와 같은 문제를 연구하기 위해서 많은 연구자들은 회전하며 전개하는 보를 대상으로 다양한 연구를 수행해 왔다. 초창기 회전하며 전개하는 보에 대한 연구는 Kane<sup>(3)</sup> 의해서 소개되었다. 그는 인장 변형률을 사용하여 빔을 모델링 하였고, 회전에 의한 굽힘 강성 변화인 shortening 효과를 변형 에너지에 고려하였다. 이후, Krishnamurthy<sup>(4)</sup> 보의 끝단에 집중질량을 고려하여 Hamilton Principle을 통하여 운동 방정식을 유도 하였으며, 진동에 의한 보의 끝 단 위치 오차에 대한 연구를 진행하였다. Yuh와 Young<sup>(5)</sup> 유연체 보가 회전과 병진운동을 동시에 할 수 있는 실험장치를 구성하여, 운동방정식을 검증하고 다양한 복합 운동에 대한 비교를 수행하였다. Al-bedoor와 Khulief<sup>(6,7)</sup> 모드가정법과 유한요소 해석을 통하여 끝단 질량과 shortening 효과에 의한 진동 영향을 연구하였다.

면내 굽힘 변형만을 연구한 기존 연구자와는 다르게 Khadem과 Pirmohammadi<sup>(8)</sup> 3차원 유한 자유도를 갖는 회전하며 전개하는 보의 축 방향 및 굽힘, 비틀림에 대한 동적 특성을 연구 하였고, 다양한 기구에 대한 예제를 수치적으로 해석하였다. 앞의 연구들은 대부분 보의 강체 운동이 등속도 이거나 단순한 삼각함수를 사용하여 시뮬레이션을 수행 하였으나, 이와 달리 실제 현장에서는 직선궤적을 사용하는 경우가 많다. Yang과 Sadler<sup>(9)</sup> 보의 끝단이 직선 궤적을 그리는 실험을 통해 시뮬레이션 결과와 비교하였다. Kalyoncu<sup>(10)</sup> 직선궤적을 그리는 보의 순간적인 길이에 대한 고유진동수를 구하고 보의 끝 단이 지정된 위치를 직선으로 이동할 때 궤도 오차에 대해 언급하였다. 직선궤적에 대한 두 논문에서는 궤적이 그리는 오차를 해석적으로 구하는 연구를 진행하였지만 오차를 저감하는 방법은 논의 하지 않았다. 그러므로 직선궤적을 그리며 운동하는 시스템의 진동을 저감하여 궤적오차를 저감하는 연구가 진행되어야 한다.

이 논문에서는 회전하는 허브에서 전개하는 보가 직선궤적을 그리며 운동할 때 발생하는 궤적오차를 저감하기 위한 방법을 제안하였다. 유연한 보에 Euler-Bernoulli 보 이론과 선형 변형률 이론을 이용

하여 모델링한 후 운동방정식을 유도하였다. 유도된 방정식은 Galerkin법을 이용하여 이산화 되었으며 수치해석을 통해 시간응답을 산출하였다. 시스템이 직선궤적운동을 할 때 발생하는 진동을 저감하기 위한 조건은 허브의 회전운동 시 보의 가변길이를 고려하여 개발되었으며 시간응답 분석과 직선궤적의 오차를 비교함으로써 궤적오차를 효과적으로 저감할 수 있음을 보였다.

## 2. 지배방정식 유도

직선궤적을 갖는 로봇은 허브의 회전운동과 보의 전개운동을 고려하여 유연한 보로 모델링 되었다. Fig. 1에서 보는것과 같이 반지름이  $a$ 인 강체 허브는 축  $o$ 를 중심으로 회전속도  $\Omega$ 로 회전하며, 동시에 강체 허브로부터 이동 속도  $V$ 로 전개하는 직선운동을 한다. 보의 전체 길이가  $L$ 이고 허브로부터 전개된 길이  $l(t)$ , 단면적  $A$ , 면적 관성 모멘트  $I$ , 영률  $E$ , 밀도  $\rho$ 를 가지며, 보의 오른쪽 끝 단에는 집중 질량  $m_l$ 가 부가되어 있다. 보의 횡방향 변형을  $v(x,t)$ 라 할때 변형된 임의의 점  $P^*$ 에 대한 속도 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$v_b = (V - \Omega v) \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} + \Omega(a+x) \right] \mathbf{j} \quad (1)$$

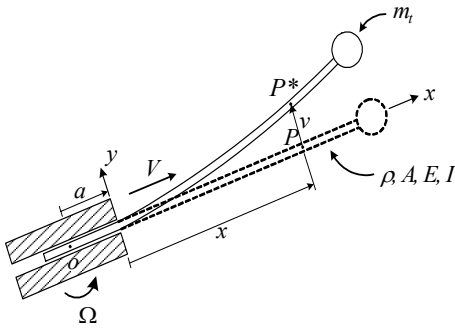
이와 함께 끝단 질량의 속도 벡터는 식 (2)와 같다.

$$v_l = (V + -\Omega v|_{x=l}) \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=l} + V \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=l} + \Omega(a+l) \right] \mathbf{j} \quad (2)$$

보의 변위-변형률 관계는 보의 두께가 길이에 비해서 충분히 얇다는 전제 하에 전단 변형과 회전 관성을 무시한 Euler-Bernoulli 보 이론을 사용하였고, 일반적인 선형 변형률 이론을 적용 하였다.

축방향으로 이동하는 보의 질량 이송효과를 고려한 운동방정식을 유도하기 위하여 확장된 Hamilton principle을 이용하였다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W - \delta M) dt = 0 \quad (3)$$



**Fig. 1** Dynamic model for a flexible beam deploying from rotating rigid hub

여기서,  $t_1$ 과  $t_2$ 는 임의의 순간에서의 시간이며,  $\delta$ 은 변분연산자이다. 그리고  $T$ 는 운동에너지,  $U$ 는 위치에너지,  $W$ 는 시스템이 한일,  $M$ 은 질량 이송에 따른 모멘텀이다. 먼저 운동에너지는 식 (1)과 식 (2)와 같이 주어지는 속도 벡터를 이용하여 얻어지며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{v}_b dt + \frac{1}{2} m_t \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t \quad (4)$$

보가 회전을 하게 되면 축 방향 힘이 발생하게 되어 굽힘 강성에 영향을 미치게 된다. 따라서, 기존 연구들에서<sup>(3-10)</sup> 밝힌 바와 같이 탄성 에너지에 회전운동에 의한 shortening 효과를 고려하면 위치에너지는 식 (5)와 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + F_s \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

여기서 식 (5)의 첫 번째 항은 탄성에너지, 두 번째 항은 보의 shortening 효과, 마지막 항은 끝단 질량에 의한 shortening 효과이며  $F_s$ 는 다음과 같다.

$$F_s = \rho A \Omega^2 \left[ a(l-x) + \frac{1}{2}(l^2 - x^2) \right] + m_t \Omega^2 (a+l) \quad (6)$$

시스템에 가해진 일은 축방향 변위가 고려되지 않았으므로 무시할 수 있다. 그리고 보가 허브 외부로 전개 하면 질량 이송효과가 발생하기 때문에 이에 따른 모멘텀 변화(virtual momentum transport)

를 고려해야 한다. 시스템이 한일과 모멘텀 변화를 변분을 취하여 나타내면 다음과 같다.

$$\delta W = 0, \quad \delta M = \rho A (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) (V \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) \Big|_{x=0}^l \quad (7)$$

식 (4), 식 (5) 그리고 식 (7)을 식 (3)에 대입하여 정리하면 회전하는 허브에서 전개하는 보의 운동방정식을 식 (8)과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} - \Omega^2 v \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( F_s \frac{\partial v}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\rho A \left[ \dot{\Omega}(a+x) + 2\Omega V \right] \quad (8)$$

이에 따른 경계조건은 다음과 같다.

$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (9)$$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x=l \quad (10)$$

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = m_t \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( \dot{V} + \frac{F_s}{m_t} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \Omega^2 v + \dot{\Omega}(a+l) + 2\Omega V \right]_{x=l} \quad (11)$$

식 (11)에서 보는 것과 같이 끝단 질량의 관성력은 보끝단의 경계조건으로 나타난다. 그리고 shortening 효과에 의한 영향은 식 (11)의 경계조건에서 확인 할 수 있다. 식 (8)~(11)과 같이 주어지는 방정식에서 허브의 회전속도를 무시하면 Park 등<sup>(11)</sup>이 제안하는 전개하는 보 모델과 일치하며 전개속도를 무시할 경우 Lim과 Yoo가<sup>(12)</sup> 보인 회전하는 외팔보 모델과 일치하게 된다.

편미분 형태의 지배방정식 (8)은 수치해석을 수행하기 위하여 Galerkin 방법을 이용하여 이산화된 행렬-벡터 방정식을 유도하였다. 이 연구에서는 고정된 외팔보에 대한 굽힘 방향의 고유함수를 사용하였다. 시도함수와 가중함수는 식 (12)와 같다.

$$v = \sum_{n=1}^N T_n(t) V_n(x, t), \quad \bar{v} = \sum_{m=1}^N \bar{T}_m(t) V_m(x, t) \tag{12}$$

여기서,  $N$ 은 기저 함수의 총 개수이고  $T_n$ 과  $\bar{T}_m$ 는 결정되어야 할 시간에 대한 미지함수이며,  $V_n$ 과  $V_m$ 은 시간과 위치의 함수로써 다음과 같다.

$$V_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \left[ \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \right] \tag{13}$$

여기서,  $\beta_n$ 은 주파수 방정식의  $n$ 번째 해이다. 이를 이용하여 유도된 이산화된 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^N [m_{mn} \ddot{T}_n + g_{mn} \dot{T}_n + k_{mn} T_n] = f_m \tag{14}$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{mn} &= \rho A \int_0^l V_m V_n dx + m_t V_m(l, t) V_n(l, t), \\ g_{mn} &= 2\rho A \int_0^l V_m \dot{V}_n dx + 2m_t V_m(l, t) \dot{V}_n(l, t) \\ &\quad + 2\rho A V \int_0^l V_m V_n' dx + 2m_t V V_m(l, t) V_n'(l, t), \\ k_{mn} &= \rho A \int_0^l V_m \ddot{V}_n dx + m_t V_m(l, t) \ddot{V}_n(l, t) \\ &\quad + 2\rho A V \int_0^l V_m \dot{V}_n' dx + 2m_t V V_m(l, t) \dot{V}_n'(l, t) \\ &\quad + \rho A V^2 \int_0^l V_m V_n'' dx + m_t V^2 V_m(l, t) V_n''(l, t) \\ &\quad + \rho A \dot{V} \int_0^l V_m V_n' dx + m_t \dot{V} V_m(l, t) V_n'(l, t) \\ &\quad - \rho A \Omega^2 \int_0^l V_m V_n dx - m_t \Omega^2 V_m(l, t) V_n(l, t) \\ &\quad - \int_0^l F_s' V_m V_n' dx - \int_0^l F_s V_m V_n'' dx + F_s V_m(l, t) V_n'(l, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ EI \int_0^l V_m'' V_n'' dx, \\ f_m &= -\rho A \dot{\Omega} \int_0^l (a+x) V_m dx - m_t \dot{\Omega} (a+l) V_m(l, t) \\ &\quad - 2\rho A \Omega V \int_0^l V_m dx - 2m_t \Omega V V_m(l, t) \end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)의 ( )은  $x$ 에 대한 미분연산자 이다. 식 (15) 같이 주어지는 이산화된 방정식을 행렬-벡터 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$M\ddot{T} + G\dot{T} + KT = F \tag{16}$$

여기서,  $M$ 은 질량 행렬 이며,  $G$ 는 gyroscopic 행렬,  $K$ 는 강성 행렬이고  $F$ 는 회전과 전개에 의해서 발생하는 하중이며, 마지막으로  $T$ 는 미지수벡터로 다음과 같다.

$$T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}^T \tag{17}$$

식 (16)은 Newmark 시간적분법을 이용하여 시간 응답을 산출하는데 사용되었다.

### 3. 궤적오차 저감을 위한 각가속도 함수

이 논문에서는 회전하면서 전개하는 보가 직선궤적을 그리며 운동할 때 발생하는 궤적오차를 저감하기 위한 방법을 제안하였다. 논의를 간단하게 하기 위하여 Fig. 2에서 보는 것과 같이 보가 0 rad 으로부터  $\pi/2$  rad까지 선회할 때 보의 끝 단이 시작 지점과 끝 지점을 직선으로 연결하는 동작을 대상으로 하였다.

직선궤적을 구현하기 위해서는 허브의 회전 운동이 필요하다. 이 연구에서는 비교 대상으로서 산업 현장에서 가장 많이 사용되는 bang-bang 형식의 각가속도 함수를 사용하였다. 이때 가속구간의 가속도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\ddot{\theta} = \Omega t / \Delta t_c \tag{18}$$

다음으로 궤적오차를 저감하기 위하여 사다리꼴 각가속도 함수를 사용하였다. 여기서 가속구간의 각

가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{2\Omega t}{(2\Delta t_c - \Delta t_a - \Delta t_b)\Delta t_a} & \text{for } 0 \leq t \leq \Delta t_a \\ \frac{2\Omega}{2\Delta t_c - \Delta t_a - \Delta t_b} & \text{for } \Delta t_a \leq t \leq \Delta t_c - \Delta t_b \\ \frac{2\Omega(\Delta t_c - t)}{(2\Delta t_c - \Delta t_a - \Delta t_b)\Delta t_b} & \text{for } \Delta t_c - \Delta t_b \leq t \leq \Delta t_c \end{cases} \quad (19)$$

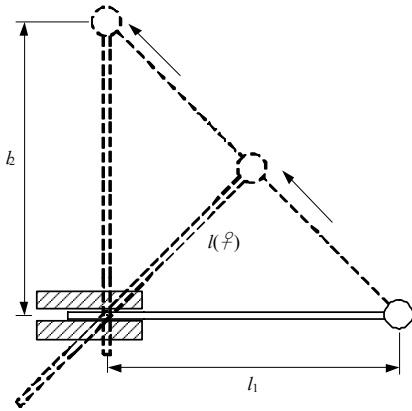


Fig. 2 Straight trajectory of a rigid beam deploying from a rotating rigid hub

사다리꼴 각가속도 함수를 적분하면 S곡선형 속도함수가 구현된다.

허브가 일정구간을 회전하기 위해서는 전체 이동 시간이 설정되어야 한다. 허브가 정해진 회전 각도를 이동 후 정지하기 위해서는 초기 단계에서 가속과 최종단계에서 감속이 필요하다. 이 논문에서는 논의의 편의를 위해서 가속구간과 감속구간을 동일한 모양의 각가속도를 사용하였다. 따라서 이동시간을  $T$ 라 하면 최고 회전속도가  $\Omega$ 로 주어질 때 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\Omega = \psi / (T - \Delta t_c) \quad (20)$$

여기서  $\psi$ 는 회전각도 이다. 이러한 관계를 고려하면 bang-bang 형식의 각가속도 함수와 사다리꼴 각가속도 함수는 각각 Fig. 3(a)와 Fig. 3(b)로 표현된다.

직선궤적 구현을 위해 보는 허브의 이동각도에 따라 전개하는 길이가 가변 된다. 보의 길이가 허브의 각도에 따라 완전히 제어될 수 있다고 가정할 때 허브의 각도에 따라 변화되는 보의 전개 길이는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\theta) = \frac{l_1 l_2}{l_1 \sin \theta + l_2 \cos \theta} \quad (21)$$

여기서  $l_1$ 는 시작지점에서 보의 길이이며  $l_2$ 는 이동 후 정지 지점에서 보의 길이이다. 보의 속도와 가속도는 식 (21)의 시간미분을 통해 주어진다.

직선궤적을 갖는 전개하는 보의 진동을 저감하기 위하여 사다리꼴 각가속도 함수를 설계하기 위한 기준이 필요하다. 이를 위하여 Ha 등<sup>(13)</sup>이 제안한 사다리꼴 가속도 함수 설계기준을 도입하였다.

$$\Delta t_a = \Delta t_b = p\tau_1 \text{ and } \Delta t_c = s\tau_1 \quad (22)$$

여기서  $\tau_1$ 는 시스템의 1차 고유주기이다. 그리고  $p$ 와  $s$ 는 임의의 정수이다. 이와 같은 기준으로 설계된 사다리꼴 가속도 함수는 시스템의 등속도구간 및 정지구간의 진동을 효과적으로 저감시켜준다. 하지만 가변하는 고유주기를 가지고 있는 시스템에는 바로 적용할 수 없다. 이를 보완하기 위하여 이 연구에서는 위 방법을 다음과 같이 보완 하였다.

$$\Delta t_r = s\tau_r \text{ for } r=a,b,c \quad (23)$$

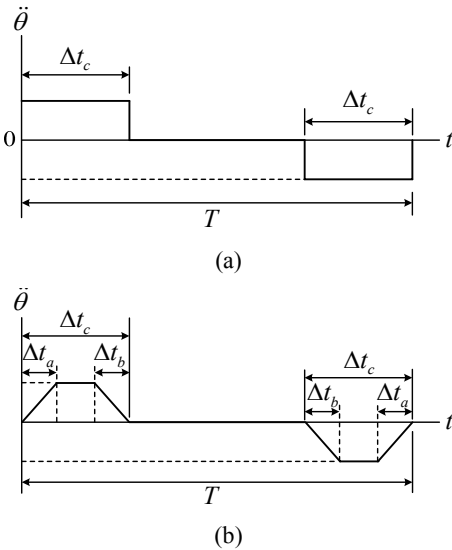


Fig. 3 Angular acceleration profiles of a rotating hub: (a) the original bang-bang angular acceleration and (b) the proposed trapezoidal angular acceleration

여기서  $s$ 는 임의의 정수이며  $\tau_r$ 은  $0 \leq t \leq \Delta t_a$ ,  $\Delta t_c - \Delta t_b \leq t \leq \Delta t_c$ ,  $0 \leq t \leq \Delta t_c$  구간에서의 1차 고유 주기의 평균값이다. 각 고유 주기는 다음과 같다.

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\lambda_r^2} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad \text{for } r=a,b,c \quad (24)$$

여기서  $\lambda_r$ 은 끝단 질량이 있는 보의 특성함수의 첫 번째 해로서 특성함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1 + \cos \lambda_r l_r \cosh \lambda_r l_r}{\lambda_r l_r (\sin \lambda_r l_r \cosh \lambda_r l_r - \cos \lambda_r l_r \sinh \lambda_r l_r)} = \frac{m_r}{\rho A l_r} \quad \text{for } r=a,b,c \quad (25)$$

이때 사용되는  $l_r$ 은 각 구간의 보 전개길이의 평균 값이다.

$$l_r = \frac{1}{\Delta t_r} \int_R l dR \quad \text{for } r=a,b,c \quad (26)$$

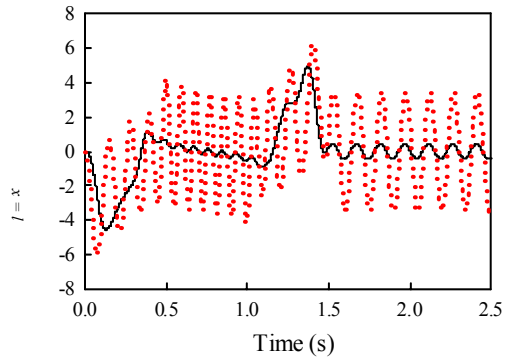
여기서  $R$ 은 각 구간의 시간범위를 의미한다. 식 (25)와 식 (26)은 비선형 방정식으로 수치해석을 이용하여 해를 산출하여야 한다. 이에 대한 방법은 Kim과 Chung이<sup>(14)</sup> 제안한 병진운동하며 전개하는 보의 잔류진동 저감방법 에서 사용된 기법을 이용하였다. 이 방법은 각 구간의 시간  $\Delta t_r$ 과 특성함수의 해  $l_r$  그리고 평균길이  $l_r$ 을 미지수로 설정하였을 때 다음 비선형 함수를 만족 하여야 한다.

$$H_{r1} = 0, H_{r2} = 0, H_{r3} = 0 \quad \text{for } r=a,b,c \quad (27)$$

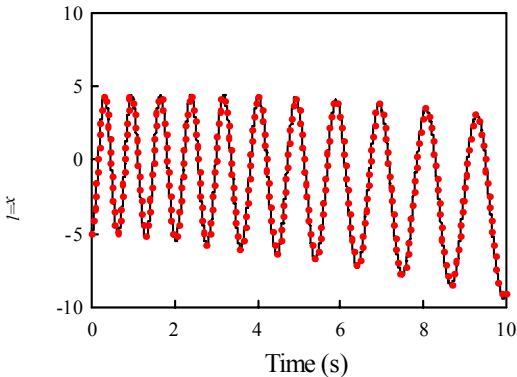
여기서

$$H_{r1} = \Delta t_r \lambda_r^2 - 2s\pi \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad \text{for } r=a,b,c \quad (28)$$

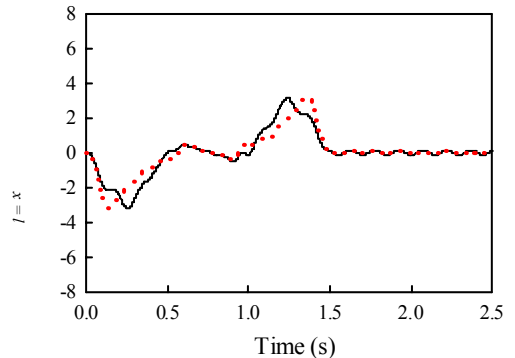
$$H_{r2} = \rho A l_r (1 + \cos \lambda_r l_r \cosh \lambda_r l_r) - m_r \lambda_r l_r (\sin \lambda_r l_r \cosh \lambda_r l_r - \cos \lambda_r l_r \sinh \lambda_r l_r) \quad \text{for } r=a,b,c \quad (29)$$



**Fig. 5** Tip displacements of the flexible beam deploying from the rotating hub: the proposed trapezoidal angular acceleration (solid line) and the original bang-bang angular acceleration (dotted line)



**Fig. 4** Tip displacements of the flexible beam deploying from the rotating hub when  $V=0.1\text{m/s}$  and  $\Omega=0.785\text{ rad/s}$ . Present study(solid line) and Ref. [6] (dotted line)



**Fig. 6** Tip displacements of the flexible beam deploying from the rotating hub when using the proposed acceleration profile:  $\Delta t_c = 5 \tau_a$ ;  $\Delta t_a = \tau_c$ ,  $\Delta t_b = \tau_b$  (dotted line) and  $\Delta t_a = 2 \tau_a$ ,  $\Delta t_b = 2 t_b$  (solid line)

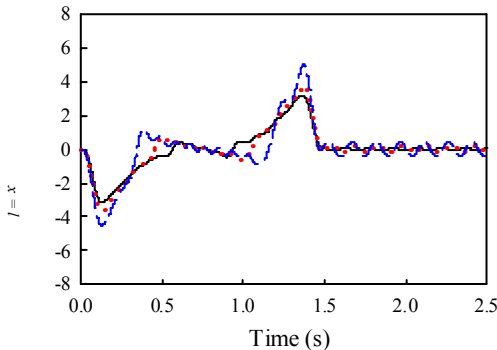
$$H_{r,3} = \Delta t_r l_r - \int_R l dR \text{ for } r=a,b,c \quad (30)$$

위 비선형 함수들의 해는 Newton-Raphson 방법을 이용하여 산출되었다.

### 4. 동적거동해석

먼저 회전하는 허브에서 전개하는 보의 동역학 모델의 시간응답에 대한 신뢰성을 확보하기 이 논문에서 제안된 모델과 기존연구를<sup>(6)</sup> 비교하였다. 비교에 사용된 물성치는  $\rho = 2738.6 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 1.4661 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $E = 6.8335 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $I = 1.1073 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $m_r = 2 \text{ kg}$ 이며 보의 전체 길이는  $L = 3.657 \text{ m}$ , 보의 초기 길이는  $l_0 = 1.8 \text{ m}$ 이다. Fig. 4에 이 논문에서 제안한 동역학 모델과 기존연구의 횡방향 끝단 변위를 비교하여 나타내었다. 여기서 실선으로 나타낸 이 연구와 점선으로 나타낸 기존연구가 잘 일치함을 볼 수 있다.

사다리꼴 각가속도 함수의 직선궤적에 대한 진동저감 효과를 분석하기 위하여 시간응답을 산출하였다. 해석에 사용된 물성치는  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 6.6884 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $I = 2.9773 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ ,  $m_r = 20 \text{ kg}$ 이다. 그리고 직선궤적을 나타내기 위한 보의 초기길이 및 이동 후 정지상태의 길이는  $l_1 = l_2 = 1.65 \text{ m}$ 이다. 허브의 회전에 대한 각가속도는 식 (18)과 식 (19)에 의하여 bang-bang 각가속도와



**Fig. 7** Tip displacements of the flexible beam deploying from the rotating hub when using the proposed acceleration profile with  $\Delta t_a = \tau_a$  and  $\Delta t_b = \tau_b$ ;  $\Delta t_c = 3 \tau_c$  (dashed line),  $\Delta t_c = 4 \tau_c$  (dotted line) and  $\Delta t_c = 5 \tau_c$  (solid line)

사다리꼴 각가속도가 생성된다. Bang-bang 각가속도 함수 생성에 있어서 가속시간은  $\Delta t_c = 0.45 \text{ s}$ 를 사용하였으며 사다리꼴 각가속도 함수의  $\Delta t_a$ ,  $\Delta t_b$ ,  $\Delta t_c$ 는  $p=1, q=1, s=3$ 일 때 식 (27)로 주어지는 비선형 방정식의 해를 구하여 대입된다. 그리고 전체 이동시간은 두 각가속도 함수 모두  $T = 1.5 \text{ s}$ 를 사용하였다. 직선궤적을 생성하기 위한 보의 전개 함수는 식(21)에 의해 산출된다. 각 각가속도와 보의 전개 함수를 이용하여 구한 동적거동을 Fig. 5에 나타내었다. 실선은 사다리꼴 각가속도 함수를 이용한 결과이며 점선은 bang-bang 각가속도 함수를 이용한 결과이다.

Fig. 5에서 bang-bang 각가속도 함수를 이용하여 구한 동적거동은 모든 구간에서 진동이 크게 발생하는 것을 관찰 할 수 있다. 그에 반해 본 논문에서 제안한 방법으로 설계된 사다리꼴 각가속도 함수를 사용한 경우에는 가속구간과 감속구간에 해당하는 과도구간을 제외하고 정속구간과 정지구간의 진동이 대폭 감소하는 것을 볼 수 있다.

다음으로 사다리꼴 가속도함수의 시간변수 설계에 따른 진동경향을 분석하였다. 해석에 사용되는 변수는 해석에 따른 시간변수 설계값 변경을 제외하고 앞서 사용된 값과 동일하게 사용되었다. 먼저  $\Delta t_a$ 와  $\Delta t_b$ 의 변화에 대한 시간응답을 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6을 살펴보면  $\Delta t_a$ 와  $\Delta t_b$ 의 변화에 따라 과도상태의 진폭의 경향이 변화하는 것을 확인할 수 있다. 하지만 정지 이후의 잔류진동은 거의 변화가 없다. 다음으로 Fig. 7에 나타낸  $\Delta t_c$ 의 변화에 대한 시간응답을 분석하였다. 여기서  $\Delta t_c$ 가 증가 함에 따라 등속도구간의 진동과 정지 후 잔류진동이 감소하는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 가속시간 증가로 최대 각가속도가 감소하면서 과도상태의 진폭도 감소한 것을 확인할 수 있다.

마지막으로 사다리꼴 가속도함수 사용으로 인한 궤적오차 저감을 분석하였다. 보의 변형이 없을 때 궤적은 다음과 같은 수식으로 나타내어진다.

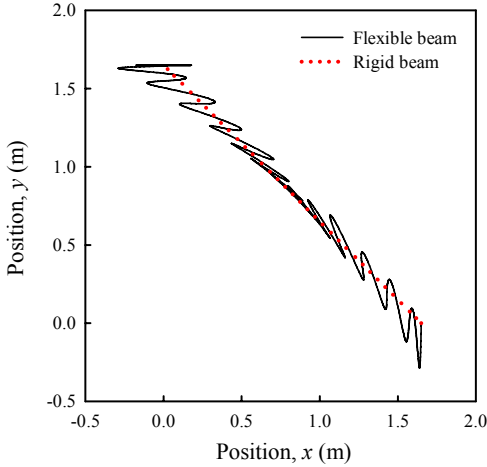
$$X = l \cos \theta - v \sin \theta, Y = l \sin \theta \quad (31)$$

그리고 보의 변형을 포함하는 궤적은 다음과 같다.

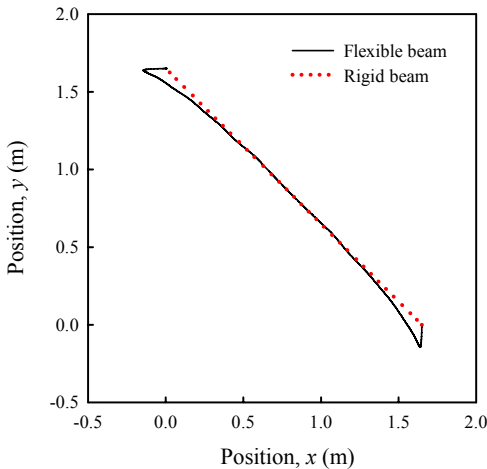
$$X_t = l \cos \theta - v \sin \theta, Y_t = l \sin \theta + v \cos \theta \quad (32)$$

Fig. 8에 Fig. 5에서 나타내어진 bang-bang 각가속도 함수를 이용하여 산출한 보의 끝단 변위를 반영하여 나타낸 궤적을 보의 변형이 없을 때의 궤적과 비교하여 나타내었다. 이때 끝단 변위는 보의 길이에 비해 매우 작기 때문에 본래 변위에 50배를 반영하였다. 여기서 보의 궤적오차는 전구간에 걸쳐 매우 크게 나오는 것을 확인 할 수 있다. 다음으로 Fig. 7에서 산출한  $\Delta t_a = \tau_a$ ,  $\Delta t_b = \tau_b$ ,  $\Delta t_c = 5\tau_c$  일 때 산

출한 보의 끝단 변위를 반영하여 구한 궤적을 Fig. 9에 표시하였다. 여기서 보의 끝단 변위는 앞 해석결과와 같은 이유로 변위의 50배를 적용하였다. 이 경우 궤적오차는 과도구간에서 발생하는 오차를 제외하고 등속도 구간에서 발생하는 궤적오차는 매우 작음을 알 수 있다. 또한 과도구간에서 발생하는 궤적오차 또한 bang-bang 각가속도 함수를 사용했을 때 보다 작게 나타난다. 그러므로 이 연구에서 제안한 사다리꼴 가속도함수와 진동제거 방법을 사용하면 직선궤적을 운동하는 외팔보 구조물의 궤적오차 및 진동을 대폭 감소시킬 수 있음을 보였다.



**Fig. 8** Trajectories of the flexible and rigid beams deploying from the rotating hub when using the original bang-bang angular acceleration



**Fig. 9** Trajectories of the flexible and rigid beams deploying from the rotating hub when using the proposed trapezoidal angular acceleration

### 5. 결 론

이 연구에서 회전하는 허브에서 전개하는 보의 직선궤적운동 시 발생하는 진동으로 인해 발생하는 궤적오차를 저감하는 방법을 제안하였다. 회전하는 허브에서 전개하는 보의 동적거동을 분석하기 위하여 먼저 운동방정식을 확장된 Hamilton principle을 이용하여 유도하였다. 유도된 방정식은 Galerkin 방법을 이용하여 이산화하였다. 이산화된 운동방정식은 시간적분법을 이용하여 직선궤적운동 시 전개하는 보의 동적거동을 분석하는데 사용되었다.

직선궤적운동 시 궤적오차를 저감하기 위하여 가변하는 보에 대한 평균길이를 이용한 진동저감 방법을 제안하였다. Bang-bang 각가속도 함수를 이용하여 산출된 전개하는 보의 직선궤적에 비해 이 연구에서 제안된 방법을 사용하면 등속도구간뿐만 아니라 이동 후 정지상태에서의 진동이 제거되기 때문에 직선궤적운동에 대한 오차를 대폭 감소시킬 수 있다.

### 후 기

이 논문은 정부의 재원으로 한국연구재단(NRF)의 지원을 받아 수행된 연구입니다(No. 2011-0017408).

### References

- (1) Craig, J. J., 2005, Introduction to Robotics: Mechanics and control, Pearson Education, Inc.
- (2) Wang, P. K. C. and Wei, J. D., 1987, Vibration in a Moving Flexible Robot Arm, Journal of Sound and



Vibration, Vol. 116, No. 1, pp. 149~160.

(3) Banerjee, A. K. and Kane, T. R., 1989, Extrusion of a Beam from a Rotating Base, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 2, pp. 140~146.

(4) Krishnamurthy, K., 1989, Dynamic Modeling of a Flexible Cylindrical Manipulator, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 132, No. 1, pp. 143~154.

(5) Yuh, J. and Young, T., 1991, Dynamic Modeling of an Axially Moving Beam in Rotation: Simulation and Experiment, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, Vol. 113, No. 1, pp. 34~40.

(6) Al-Bedoor, B. O. and Khulief, Y. A., 1996, Vibrational Motion of an Elastic Beam with Prismatic and Revolute Joints, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 2, pp. 195~206.

(7) Al-Bedoor, B. O. and Khulief, Y. A., 1996, Finite Element Dynamic Modeling of a Translating and Rotating Flexible Link, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, No. 2, pp. 173~189.

(8) Khadem, S. E. and Pirmohammadi, A. A., 2003, Analytical Development of Dynamic Equations of Motion for a Three-dimensional Flexible Link Manipulator with Revolute and Prismatic Joints, *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 237~249.

(9) Yang, Z. J. and Sadler, J. P., 1997, Prediction of The Dynamic Response of Flexible Manipulators from a Modal Database, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 32, No. 6, pp.679~689.

(10) Kalyoncu, M., 2008, Mathematical Modelling and Dynamic Response of a Multi-straight-line Path Tracing Flexible Robot Manipulator with Rotating-prismatic Joint, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 6, pp. 1087~1098.

(11) Park, S., Yoo, H. H. and Chung, J., 2013, Vibrations of an Axially Moving Beam with Deployment or Retraction, *AIAA Journal*, Vol. 51, No. 3, pp. 686~696.

(12) Lim, H. S. and Yoo, H. H., 2006, Dynamic Analysis of an Impulsively Forced Rotating Cantilever Beam, *Transactions of the Korean Society for Noise and*

*Vibration Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 226~232.

(13) Ha, S. W., Rew, K. H. and Kim, K. S., 2013, Robust Zero Placement for Motion Control of Lightly Damped Systems, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 60, No. 9, pp. 3857~3864.

(14) Kim, B. and Chung, J., 2014, Residual Vibration Reduction of a Flexible Beam Deploying from a Translating Hub, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 16, pp. 3759~3775.



**Byeongjin Kim** received his B.S. degree in mechanical engineering from Hanyang University, Korea in 2009. Currently he is a Ph.D. candidate in the Department of Mechanical Engineering, Hanyang University, Korea. His research interests are structural dynamics and residual vibration reductions in flexible structures.



**Hyungrae Kim** received his B.S. degree in mechanical engineering from Hanyang University, Korea in 2010. Currently he is a Ph.D. candidate in the Department of Mechanical Engineering, Hanyang University, Korea. His research interests are structural dynamics and residual vibration reductions in flexible structures.



**Jintai Chung** received his BS and MS degrees in mechanical engineering from Seoul National University, Seoul, Korea in 1984 and 1986, respectively, and a Ph.D. degree in mechanical engineering from the University of Michigan, Ann Arbor, USA in 1992. He is now a professor in the Department of Mechanical Engineering, Hanyang University, Korea. His research fields are structural dynamics, vibration and noise.