

# 복합소재 적층구조 이론 (I)

-고전적 적층 이론-

## Theory of Laminated Composite Structures (I)

-Classical Laminated Theory-



김규동 (Gyu-Dong Kim) 학생회원 | 안동대학교 토목공학과 | kkd1514@hanmail.net

이상열 (Sang-Youl Lee) 이사 | 안동대학교 토목공학과 교수 | lsy@anu.ac.kr

### 1. 서론

복합소재 또는 복합재료는 두 가지 이상의 재료가 조합되어 물리적·화학적으로 서로 다른 상(phase)을 형성하면서 보다 유효한 기능을 발현하는 재료를 말한다. 복합소재 구조물을 정확하게 해석하기 위해서는 복합소재 적층 구조의 이론 정립해야 한다. 그 이유는 복합소재 구조물의 경우 구조적 성능은 화이버의 보강각도 및 적층배열에 크게 좌우되기 때문이다. 적층배열에 대한 상세 설계는 동일한 단면에 대하여 상이한 정·동적 구조거동을 나타내기 때문에 이에 대한 이론적 정립의 기반에서 이루어져야 할 것이다. 따라서 본 기사에서는 복합소재 적층구조 이론을 체계적으로 정리하여 소개하고자 한다. 복합소재 적층구조의 이론은 크게 고전적 이론 (CLT: Classical Laminated Theory), 일차전단변형 이론 (FSDT: First Shear Deformation Theory), 그리고 고차항 이론 (HST: Higher-order Shear Deformation theory)로 나눌 수 있다. 본 기사에서는 각 이론을 교과서적으로 상세 정리하고 MATLAB코드를 소개하여 적층 배열 변화가 구조성능에 미치는 영향을 상세 분석하는데 도움이 되도록 하고자 한다.

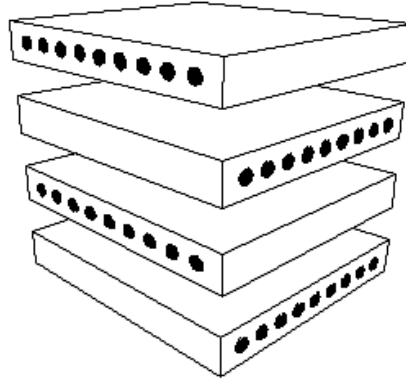
### 2. 복합 적층 기본 개념

복합소재 구조는 화이버의 각도변화에 따라 비등방성을 보이기 때문에 이론 및 해석이 등방성을 보이는 재료보다 다소 난해하다. 복합소재 적층구조는 유리섬유 또는 탄소섬유 계열의 보강재가 에폭시 등의 모재에 함침되어 보강된 구조로서 목재의 합판과 같이 여러 개의 층으로 겹쳐서 구성하게 된다. 화이버는 철근의 역할을, 모재는 시멘트(콘크리트) 역할을 한다고 할 수 있다. 화이버는 필요에 따라 서로 다른 방향으로 보강할 수 있으며, 동일한 단면이라도 화이버의 보강각도를 달리함에 따라 강성이 달라지는 효과를 가져오게 된다. Fig. 1은 화이버로 보강된 적층구조를 보여준다.

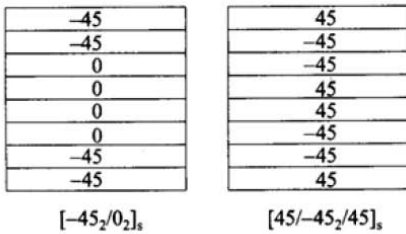
일반적으로 고전적 이론은 오차가 크게 발생하여 대부분의 경우 사용하지 않는 것이 바람직한 것으로 알려져 있다. 1차 전단변형 이론의 경우는 대부분의 상용프로그램에서 적용하고 있기 때문에 범용으로 사용하는 데 있어서는 가장 일반적인 방법이라고 할 수 있다. 다만, 5/6라는 가정된 전단보정계수를 사용함에 따라 발생하는 오차가 있을 수 있으며, 동일한 두께를 갖는 경우라 할지라도 경계조건 및 하중 조건 등에 따라서 고

차항 전단변형 이론을 적용해야 한다는 연구결과가 있으므로 정밀한 해석이 필요한 경우에는 고차항 이론을

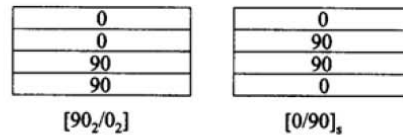
적용할 필요가 있다. Table 1은 3가지 적층 구조이론에 대한 내용을 요약한 것이다.



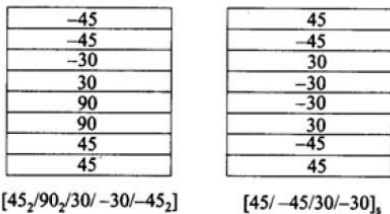
**1. Symmetrical laminate**



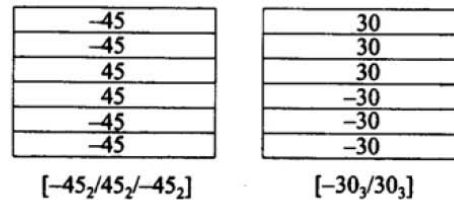
**3. Cross-ply laminate**



**2. Balanced laminate**



**4. Angle-ply laminate**

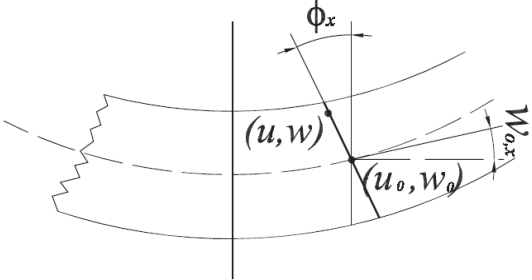
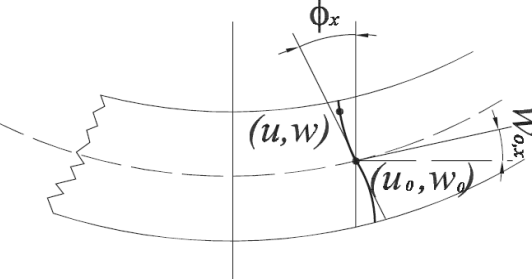


**5. π/4 laminate [0/45/90/-45]**

Fig. 1. 화이버로 보강된 복합소재 적층구조

Table 1. 은 복합 적층 이론

해석 이론	변위장
<p style="text-align: center;">〈고전적 이론(CPT)〉</p>	$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) - z \frac{\partial w_o}{\partial x}$ $v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) - z \frac{\partial w_o}{\partial x}$ $w(x, y, z, t) = w_o(x, y, t)$ <p>중립축에서의 휨 변형에 의한 추가 전단변형이 고려되지 않음. 해석은 간단해지나 오차가 큰 편임.</p>

 <p style="text-align: center;">〈1차 전단변형 이론(FSDT)〉</p>	$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t)$ $v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t)$ $w(x, y, z, t) = w_o(x, y, t)$ <p>중립축에서의 휨 변형에 의한 추가 전단변형의 선형(1차항)이 고려됨. 상용프로그램을 비롯한 대부분의 해석에 적용되고 있으나, 5/6라는 전단보정계수의 사용으로 오차가 발생하는 경우가 종종 발생함.</p>
 <p style="text-align: center;">〈고차 전단변형 판이론(HSDT)〉</p>	$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - c_1 z^3 (\phi_x + c_o w_{o,x})$ $v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - c_1 z^3 (\phi_y + c_o w_{o,y})$ $w(x, y, z, t) = w_o(x, y, z, t)$ <p>중립축에서의 휨 변형에 의한 추가 전단변형의 비선형(3차항)이 고려됨. 상용프로그램에서는 적용할 수 없는 이론이며, 정밀한 해석 결과가 필요한 경우가 사용함.</p>

### 3. Kirchhoff의 기본 이론

복합 적층 구조이론의 이해를 돕기 위하여 고전적 적층 이론을 상세히 소개하기로 한다. 전술한 바와 같이 고전적 적층이론은 다음과 같은 Kirchhoff 가정으로 출발한다.

- 변형 전 중립면에 수직인 평면은 변형 후에도 평면을 유지한다.
- 중립면은 변형 후에도 신장하지 않는다.
- 중립면에 수직인 평면은 변형 후에도 수직을 유지한다.

전술한 가정 사항을 토대로 적층된 판에 대하여 Fig. 2와 같은 중립축에서의 변형에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

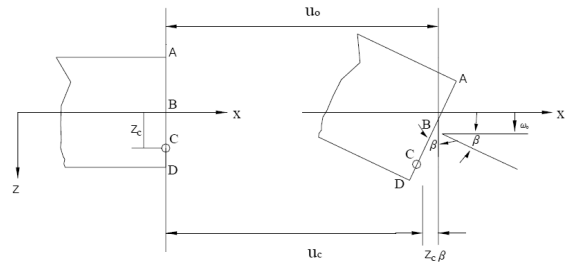


Fig. 2. 적층 판의 중립축에서의 변형

C 점의 변위

$$u_c = u_o - \beta z_c, \quad \beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \tag{1}$$

여기서,  $\beta$ 는  $x$ 방향의 적층 중립면에서의 기울기를 의미한다. 즉,

또한 Fig. 2로부터 임의점  $z$ 에서 발생하는  $x$ 방향변위  $u$ 와  $y$ 방향변위  $v$ 는 다음과 같다.

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2)$$

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y}$$

여기서, kirchhoff의 가정에 따라  $\epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} = 0$ 이다.

한편, 미소변위에 대한 탄성이론을 이용하여 변형률을 변위의 형태로 나타내면,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

이며, (2)식을 (3)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

-중립축 변형률 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_x^o = \frac{\partial u_o}{\partial x} \quad (5)$$

$$\epsilon_y^o = \frac{\partial v_o}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^o = \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y}$$

또한 적층면의 곡률은 다음과 같다.

$$k_x = - \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$k_y = - \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}$$

$$k_{xy} = - 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}$$

\* 적층내에 존재하는 임의점에서의 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (7)$$

#### 4. 고전적 적층 이론

한편, Lamina와 같이 평면응력(Plane stress) 상태인 경우 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (8)$$

(7)식을 (8)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^o + zk_x^o \\ \epsilon_y^o + zk_y^o \\ \gamma_{xy}^o + zk_{xy}^o \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{pmatrix}_k \\ &+ z \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{pmatrix}_k \end{aligned} \quad (10)$$

임의의 적층면(Lamina)의 단면력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

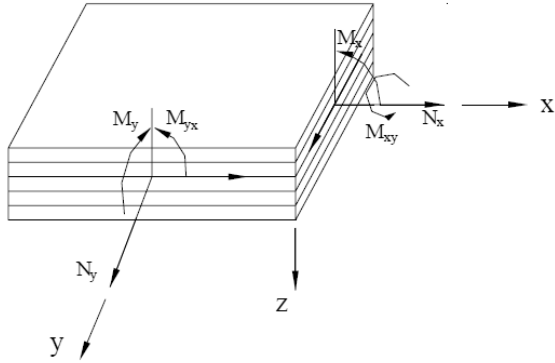


Fig. 3. Lamina에 작용하는 단면력

임의의 적층면에 작용하는 면 방향력과 모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz, \quad \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (11)$$

여기서, h는 적층판 전체의 두께를 의미한다.

식(9)로부터,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 + zk_x^0 \\ \epsilon_y^0 + zk_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^0 \end{pmatrix} \text{ 이고,}$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \text{ 이므로, 적분을 하여 전개하면 다음}$$

과 같다.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q}_{11}(\epsilon_x^0 + zk_x^0) + \overline{Q}_{12}(\epsilon_y^0 + zk_y^0) \right. \\ &\quad \left. + \overline{Q}_{16}(\gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^0) \right\} dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q}_{11}\epsilon_x^0 + \overline{Q}_{11}zk_x^0 + \overline{Q}_{12}\epsilon_y^0 + \overline{Q}_{12}zk_y^0 \right. \\ &\quad \left. + \overline{Q}_{16}\gamma_{xy}^0 + \overline{Q}_{16}zk_{xy}^0 \right\} dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11}\epsilon_x^0 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11}zk_x^0 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{12}\epsilon_y^0 dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{16}zk_{xy}^0 dz \\ &= \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} dz \right\} \epsilon_x^0 + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} z dz \right\} k_x^0 + \dots \\ &\quad + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{16} z dz \right\} k_{xy}^0 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)의 각 항은 다음과 같은 기호로 정의한다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} dz &= A_{11} = \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{11k} h_k \quad (\because h_k = z_k - z_{k-1}) \\ \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{12} dz &= A_{12} = \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{12k} h_k \\ \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{16} dz &= A_{16} = \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{16k} h_k \\ \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} z dz &= B_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{11k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{12} z dz &= B_{12} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{12k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ \therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{16} z dz &= B_{16} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{16k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 사용하면 식 (12)는 다음과 같이 간결한 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\epsilon_x^0 + A_{12}\epsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + \\ &\quad B_{11}k_x^0 + B_{12}k_y^0 + B_{16}k_{xy}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

유사한 방법으로  $N_y$ 에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q}_{12}\epsilon_x^0 + \overline{Q}_{12}zk_x^0 + \overline{Q}_{22}\epsilon_y^0 + \overline{Q}_{22}zk_y^0 \right. \\ &\quad \left. + \overline{Q}_{26}\gamma_{xy}^0 + \overline{Q}_{26}zk_{xy}^0 \right\} dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{12}\epsilon_x^0 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{12}zk_x^0 dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{22}\epsilon_y^0 dz + \\ &\quad \dots + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{26}zk_{xy}^0 dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} dz \right\} \epsilon_x^o + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} z dz \right\} k_x^o + \\
&\quad \dots + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} z dz \right\} k_{xy}^o \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} dz \\
&= \int_{z_0}^{z_1} \overline{Q_{12_1}} dz + \int_{z_1}^{z_2} \overline{Q_{12_2}} dz + \dots + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \overline{Q_{12_k}} dz + \\
&\quad \dots + \int_{z_{N-1}}^{z_N} \overline{Q_{12_N}} dz \quad (15)
\end{aligned}$$

유사한 방법으로 다음과 같은 식으로 요약된다.

$$N_y = A_{12}\epsilon_x^o + A_{22}\epsilon_y^o + A_{26}\gamma_{xy}^o + B_{12}k_x^o + B_{22}k_y^o + B_{26}k_{xy}^o \quad (16)$$

$$N_{xy} = A_{16}\epsilon_x^o + A_{26}\epsilon_y^o + A_{66}\gamma_{xy}^o + B_{16}k_x^o + B_{26}k_y^o + B_{66}k_{xy}^o$$

이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (17)$$

모멘트에 대하여 유사한 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q_{11}}\epsilon_x^o + \overline{Q_{11}}zk_x^o + \overline{Q_{12}}\epsilon_y^o + \overline{Q_{12}}zk_x^o + \right. \\
&\quad \left. \overline{Q_{11}}\gamma_{xy}^o + \overline{Q_{16}}k_{xy}^o \right\} z dz \\
&= \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} z dz \right\} \epsilon_x^o + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} z^2 dz \right\} k_x^o + \dots \\
&\quad + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{16}} z^2 dz \right\} k_{xy}^o \\
\therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} dz &= A_{12} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{12_k}} h_k \quad (18)
\end{aligned}$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q_{11}}\epsilon_x^o + \overline{Q_{11}}zk_x^o + \overline{Q_{12}}\epsilon_y^o + \overline{Q_{12}}zk_x^o \right. \\
\left. + \overline{Q_{16}}\gamma_{xy}^o + \overline{Q_{16}}k_{xy}^o \right\} z dz$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} z dz \right\} \epsilon_x^o + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} z^2 dz \right\} k_x^o + \\
&\quad \dots + \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{16}} z^2 dz \right\} k_{xy}^o \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{11}} z^2 dz = D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{11_k}} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (20)$$

$$\therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{12}} z^2 dz = D_{12} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{12_k}} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$\therefore \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q_{16}} z^2 dz = D_{16} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{16_k}} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$\therefore M_x = B_{11}\epsilon_x^o + B_{12}\epsilon_y^o + B_{16}\gamma_{xy}^o + D_{11}k_x^o + D_{12}k_y^o + D_{16}k_{xy}^o \quad (21)$$

같은 방법으로 전개하면,

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q_{12}}\epsilon_x^o + \overline{Q_{12}}zk_x^o + \overline{Q_{22}}\epsilon_y^o + \overline{Q_{22}}zk_x^o \right. \\ \left. + \overline{Q_{26}}\gamma_{xy}^o + \overline{Q_{26}}zk_{xy}^o \right\} z dz \quad (22)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \overline{Q_{16}}\epsilon_x^o + \overline{Q_{16}}zk_x^o + \overline{Q_{26}}\epsilon_y^o + \overline{Q_{26}}zk_x^o \right. \\ \left. + \overline{Q_{66}}\gamma_{xy}^o + \overline{Q_{66}}zk_{xy}^o \right\} z dz$$

정리하면,

$$M_y = B_{12}\epsilon_x^o + B_{22}\epsilon_y^o + B_{26}\gamma_{xy}^o + D_{12}zk_x^o + D_{22}zk_y^o + D_{26}zk_{xy}^o$$

$$M_{xy} = B_{16}\epsilon_x^o + B_{26}\epsilon_y^o + B_{66}\gamma_{xy}^o + D_{16}zk_x^o + D_{26}zk_y^o + D_{66}zk_{xy}^o \quad (23)$$

식 (17), (21), 그리고 (23)을 행렬로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (24)$$

여기서,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

### 5. [A], [B], [D] 매트릭스의 역학적 의미

4절에서 유도한 [A], [B], [D]의 각 요소가 역학적 거동에 미치는 영향을 정리하면 다음과 같다. [A]는 면내

의 작용 강성, [B]는 면내와 면외의 연계 강성, 그리고 [D]는 면외 휨강성을 의미한다.

Fig 4는 [A], [B], [D] 행렬의 각각 성분들이 판구조에 인장력이 작용했을 때 미치는 영향들을 나타낸 것이다. [A], [B], [D] 행렬이 계산이 되면 Fig.4에 나타나 있는 A16, D16, B16, B11, B12, B66 성분들이 복합재료의 거동에 어떠한 영향을 미치는지 알 수 있다. 이 성분들이 0이 아니면 Fig.4의 왼쪽그림과 같이 거동을 하고 0이면 오른쪽과 같이 거동을 하게 된다.

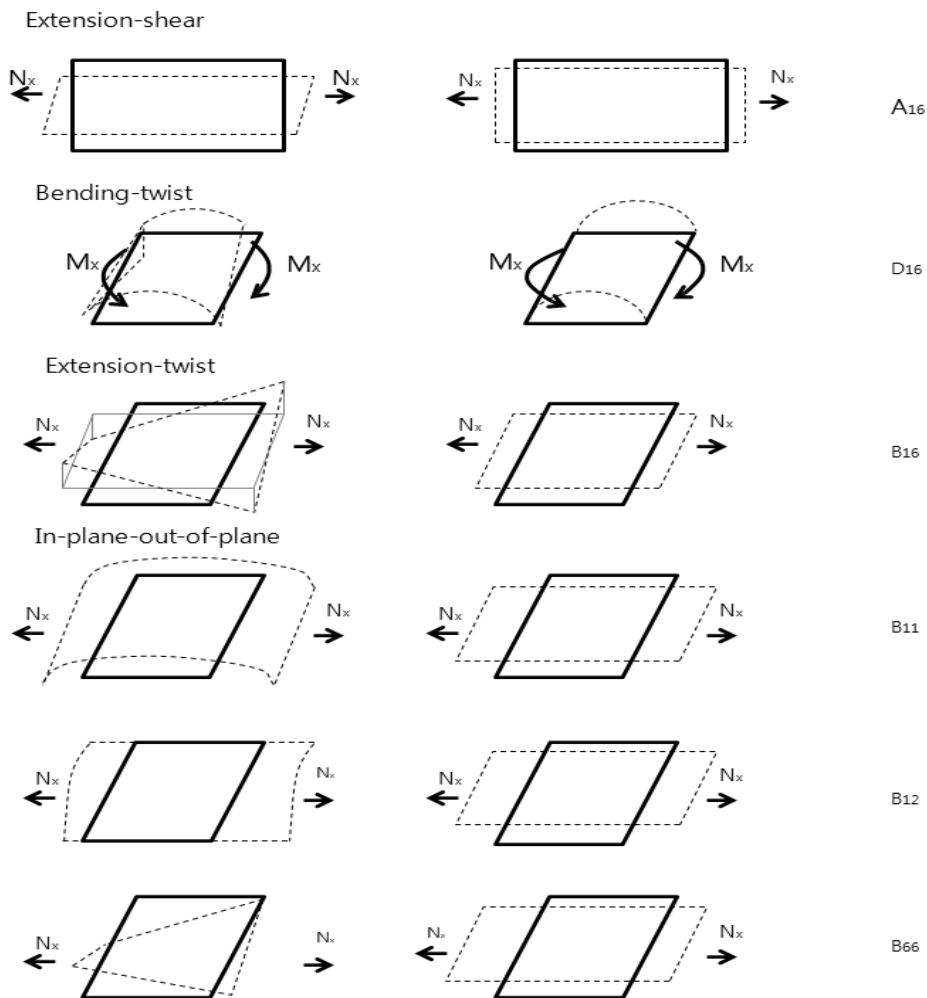


Fig. 4. [A], [B], [D] 강성 매트릭스의 역학적 특성

## 6. Matlab 코드에 의한 적층 구조의 강성 매트릭스 계산

전술한 고전적 적층이론을 기반으로 Matlab 프로그램을 사용하여 국부 강성 매트릭스를 계산하여 비교 검

토하였다. 적용한 물성은  $E_1=148\text{GPa}$ ,  $E_2=9.65\text{GPa}$ ,  $G_{12}=4.55\text{GPa}$ , 그리고  $\nu_{12}=0.3$ 이다. Matlab 코드는 기본적으로 층 두께 값과 적층각도를 입력하면 A, B, D 행렬 생성되도록 구성되었다. 코드를 소개하면 다음과 같다.

```

clc
clear all
% -----
% Input data_1 - Laminate Definition
% -----

Tt=0.002; % Total thickness(m)
angle_Bottom = [-30 -30 -30 -30 15 15 15 15 0 0 0 0 15 15 15 15 -30 -30 -30 -30]*pi/180;

t(1:length(angle_Bottom)) = Tt/length(angle_Bottom);% Thickness of plies(m)
%-----
% Input data_2 - Material Property (Pa(N/m^2))9.65e+9;
%-----
E1 = 148e+9;
E2 = 9.65e+9;
nu12 = 0.3;
G12 = 4.55e+9;
%-----
% Q Matrix - Material coordinates, Global coordinate system
%-----
D= 1- ((E2 / E ) * nu12^2);
Q11= E1/D;
Q12= nu12*E2/D;
Q22= E2/D;
Q66 = G12;
Q= [Q11 Q12 0;
    Q12 Q22 0;
    0 0 Q66];
%-----
% Transformation matrix
%-----
for i=1:length(angle_Bottom)
c = cos(angle_Bottom(1,i));
s = sin(angle_Bottom(1,i));

Tq(:,i) = [ c^2 s^2 2*c*s ;
           s^2 c^2 -2*c*s ;
           -c*s c*s c^2-s^2];
Te(:,i) = [ c^2 s^2 c*s ;
           s^2 c^2 -c*s ;
           -2*c*s 2*c*s c^2-s^2];

%-----
% Qbar matrix - Laminate coordinates
%-----
Q_bar(:,i)= inv(Tq(:,i))*Q*Te(:,i);
end
%-----

```



```

% Definition of Laminate thickness
%-----
for k = 2 : length(angle_Bottom)
    z0 = -sum(t)/2; % Sets z values from bottom
    z(1) = z0 + t(1);
    z(k) = z(k-1) + t(k);
end
%-----
% Assembling A, B, and D matrix
%-----
for i = 1 : 3
    for j = 1 : 3
        A(i,j) = Q_bar(i,j,1) * (z(1)-z0);
        B(i,j) = Q_bar(i,j,1) * (z(1)^2-z0^2)/2;
        D(i,j) = Q_bar(i,j,1) * (z(1)^3-z0^3)/3;
        for k = 2 : length(angle_Bottom)
            A(i,j) = A(i,j) + Q_bar(i,j,k) * (z(k)-z(k-1));
            B(i,j) = B(i,j) + Q_bar(i,j,k) * (z(k)^2-z(k-1)^2)/2;
            D(i,j) = D(i,j) + Q_bar(i,j,k) * (z(k)^3-z(k-1)^3)/3;
        end
    end
end
end
    
```

각 강성 매트릭스는 다음과 같이 계산된다.

4)  $[45_6/0_4]_s$  (symmetrical)

1)  $[0_{20}]$  (orthotropic, symmetrical)

$$A_{Matlab} = \begin{bmatrix} 173.88 & 46.19 & 41.75 \\ 46.19 & 62.55 & 41.75 \\ 41.75 & 41.75 & 49.47 \end{bmatrix}$$

$$A_{Matlab} = \begin{bmatrix} 297.75 & 5.82 & 0 \\ 5.82 & 19.41 & 0 \\ 0 & 0 & 9.10 \end{bmatrix}, D_{Matlab} = \begin{bmatrix} 99.24 & 1.94 & 0 \\ 1.94 & 6.47 & 0 \\ 0 & 0 & 3.03 \end{bmatrix}$$

$$D_{Matlab} = \begin{bmatrix} 34.84 & 22.93 & 21.71 \\ 22.93 & 29.90 & 21.71 \\ 21.71 & 21.71 & 24.02 \end{bmatrix}$$

2)  $[45_2/-45_2/0_{12}/-45_2/45_2]$  (balanced, symmetrical)

5)  $[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$

$$A_{Matlab} = \begin{bmatrix} 215.2 & 32.74 & 0 \\ 32.74 & 48.17 & 0 \\ 0 & 0 & 36.01 \end{bmatrix}, D_{Matlab} = \begin{bmatrix} 45.29 & 19.52 & 4.45 \\ 19.52 & 25.26 & 4.45 \\ 4.45 & 4.45 & 20.62 \end{bmatrix}$$

$$A_{Matlab} = \begin{bmatrix} 173.88 & 46.19 & 41.75 \\ 46.19 & 62.55 & 41.75 \\ 41.75 & 41.75 & 49.47 \end{bmatrix},$$

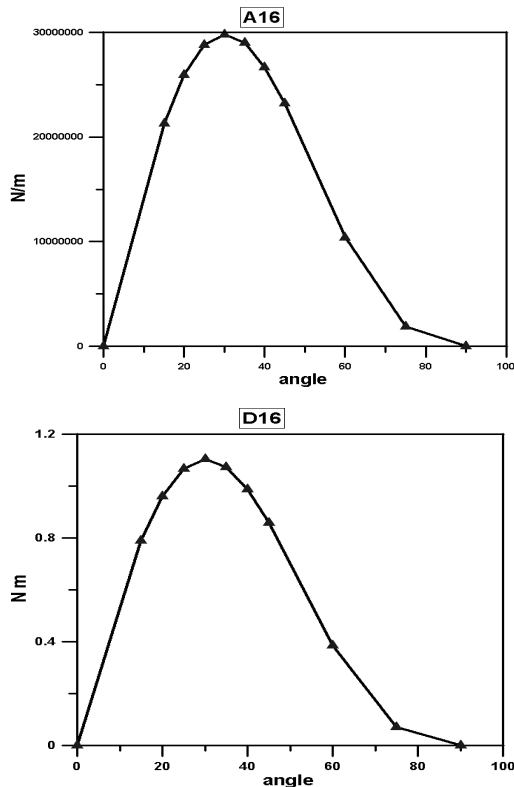
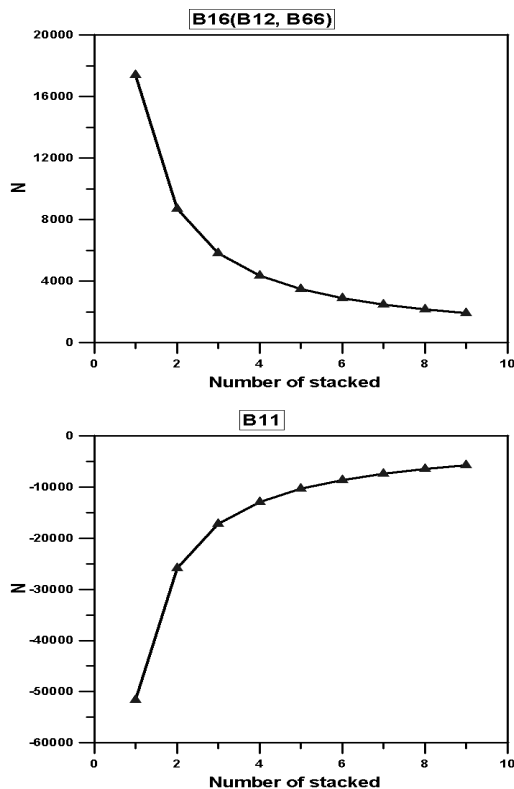
3)  $[-30_4/15_4/0_2]_s$  (symmetrical)

$$D_{Matlab} = \begin{bmatrix} 34.84 & 22.93 & 21.71 \\ 22.93 & 29.90 & 21.71 \\ 21.71 & 21.71 & 24.02 \end{bmatrix}$$

$$A_{Matlab} = \begin{bmatrix} 235.54 & 32.74 & -10.19 \\ 0.327 & 0.482 & -10.19 \\ -10.19 & -10.19 & 36.01 \end{bmatrix},$$

적층배열변화에 따른 A, B, D 행렬의 성분의 변화를 요약하면 다음과 같다.

$$D_{Matlab} = \begin{bmatrix} 65.42 & 16.30 & -18.93 \\ 16.30 & 11.60 & -7.74 \\ -18.93 & -7.74 & 17.39 \end{bmatrix}$$

Fig. 5. 화이버 보강각도 변화에 따른 강성 변화 ( $A_{16}$ ,  $D_{16}$ )Fig. 6. 화이버 보강각도 변화에 따른 강성 변화 ( $B_{16}$ ,  $B_{11}$ )

## 7. 요약 및 결론

본 기사에서는 복합소재 적층구조 이론 중에서 고전적 적층이론을 중심으로 상세하게 소개하였다. 복합소재 적층이론은 적층배열에 따라 비등방성을 보이기 때문에 화이버의 보강각도 및 적층 배열에 따라 수식이 다소 복잡하고 구조적 거동을 예측하기가 난해하다. 따라서, 복합소재의 구조적 특성을 이해하기 위하여 기본 이론부터 정립하는 것이 필요할 것으로 판단된다. 본 기사에서는 이러한 적층이론의 상세한 내용을 소개하고, 적층배열에 따른 강성값의 변화를 분석하였다.

[0/N/0] 상태에서 적층각도  $N$ 을 변화시키면서  $A_{16}$ ,  $D_{16}$  값을 비교하였다. 계산한 결과,

섬유보강각도가 20도에서 50도 사이에서 최대값이 발생했으며 0도와 90도일 때만 0이 되었다. 그 이유는 행렬이 생성되면서 연계강성에 영향을 미치는 [B]행렬이 0이 되기 때문이다.  $A_{16}$ 는 인장력이 발생했을 때 전단에 영향을 미치고  $D_{16}$ 은 힘이 작용했을 때 비틀림에 영향을 주는 성분이기 때문이다.  $[0/45]_N$  상태에서 총 두께는 고정시켜놓고 적층 갯수만 늘려가면서 각각 성분들의 변화를 분석하였다. 그 결과 [B]행렬만 값의 변화가 일어났고 강성의 값의 변화율이 점점 줄어드는 것을 알 수 있다. 이 결과로부터 적층을 많이 하면 할수록 강성값은 향상되지만 변화율이 적층갯수를 늘리면 늘릴수록 적어져 효율이 떨어질 수도 있다. 그러므로 적정 두께에 적절한 적층 개수를 고려해야한다.

이와 같이, 적층 구조이론은 적층배열에 따라 상이한 거동을 보이므로 적층 배열 설계는 매우 중요한 인자임을 알 수 있다. 고전적 적층이론은 적층 배열에 관한 기본 이론의 이해를 돕는데 있어서 유용하지만, 실제적으로는 오차의 차이가 있어 적용하는 데는 고려할 사항이 많다. 다음호에는 일차전단변형 이론(FSDT)을 중심으로 고전적 이론과 비교하여 특징을 기술하고자 한다.

### 참고문헌

1. Jones, R. M. (1998) Mechanics of composite materials. *Taylor & Francis*, PA.
2. Timoshenko SP, Krieger SW. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill; 1984.
3. Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. New York: CRC Press; 2004.