

직교이방성 구형 판의 좌굴 해석 (III)

-큰 변장비를 갖는 경우-

Buckling Analysis of a Orthotropic Rectangular Plates

-For the Large Aspect Ratio-



이상열 (Sang-Youl Lee) 이사 | 안동대학교 토목공학과 교수
| lsy@anu.ac.kr

정우영 (Woo-Young Jung) 이사 | 강릉원주대학교 토목공학과 교수
| woojung@gwnu.ac.kr

장석운 (Chang Suk-Yoon) 명예회장 | 서울시립대학교 명예교수
| changsy@uos.ac.kr

1. 서론

복합소재 구조의 거동에 대한 이해를 돕기 위하여 좌굴해석을 중심으로 해석해로 구하는 방법을 중심으로 전 호에 이어서 소개하고자 한다. 이번 호에서는 매우 큰 변장비를 갖는 경우에 대하여 다양한 경계조건을 갖는 직교 이방성 대칭 적층배열을 갖는 판의 좌굴에 대하여 다루기로 한다.

향 면내 수직 하중을 받는 판의 좌굴하중에 관한 문제로써 좌굴형상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

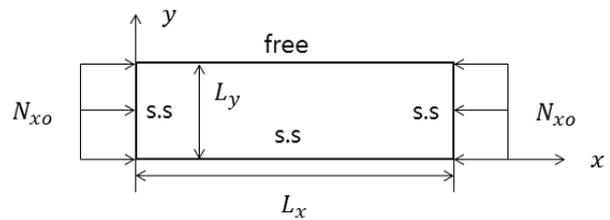


Fig. 1. 큰 변장비를 갖는 면내하중을 받는 직교 이방성 대칭 적층 판

2. 큰 변장비를 갖는 직교 이방성 대칭 적층 판의 좌굴

Fig.1과 같은 변장비가 매우 큰 긴 형상을 갖는 직교 이방성 대칭 적층판에서 긴변의 일단이 자유이고 다른 한변이 단순지지이고 짧은 변을 단순지지인 경우 일방

$$w^o = A_y \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (1)$$

여기서 A는 상수이고, w^o 는 처짐을 나타낸다.

한편, 짧은 변에 작용하는 면내 압축하중 $N_x = -N_{x0}$ 가 작용할 경우 포텐셜 에너지 π_p 는 다음과 같다.

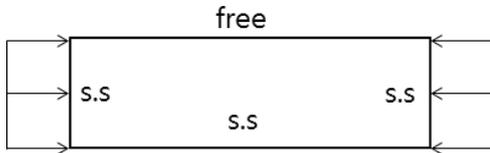
$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right)^2 + D_{66} \left(2 \frac{\partial^2 w^o}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[N_{x0} \left(\frac{\partial w^o}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx \quad (2)$$

식(1)을 식(2)에 대입하고 정리하면

$$\pi_p = \frac{A^2 L_x}{4} \left\{ D_{11} \frac{L_y^3}{3} \frac{\pi^4}{L_x^4} + 4D_{66} L_y \frac{\pi^2}{L_x^2} - N_{xo} \frac{L_y^3}{3} \frac{\pi^2}{L_x^2} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial A} = 0 ; N_x = \frac{\pi^2 D_{11}}{L_x^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (4)$$

좌굴 하중 $N_{x.er}$ 은 경계조건에 따라 다음과 같이 계산된다.



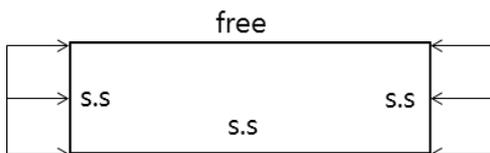
$$\frac{\pi^2 D_{11}}{L_x^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (5)$$



$$\frac{\pi^2 D_{11}}{(0.7L_x)^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (6)$$



$$\frac{\pi^2 D_{11}}{(0.5L_x)^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (7)$$



$$\frac{1.25 l_x D_{22}}{L_y^4} + \frac{\pi^2 D_{11}}{l_x^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (8)$$

여기서 $l_x = \frac{L_x}{i}$; 좌굴파의 반파길이 $i = 3$ 이다.

다음으로 한변이 회전 구속된 Fig.2와 같은 경우에 대한 좌굴하중 계산에 대하여 정리한다.

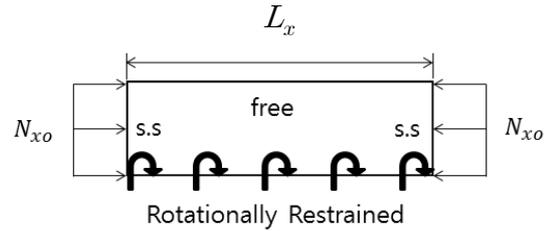


Fig. 2. 한 변이 회전 구속된 직교 이방성 대칭 적층 판

$$\frac{1.25}{1+4.12\xi} \frac{l_x^2 D_{22}}{L_y^4} + \frac{\pi^2 D_{11}}{l_x^2} + \frac{12D_{66}}{L_y^2} \quad (9)$$

여기서, $l_x = \frac{L_x}{i}$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$\xi = \frac{D_{22}}{\tilde{K} L_y}$, $\tilde{K} = \frac{M_y}{\frac{\partial w}{\partial y}}$, $M_y = (D_{22})_{rs} K_y$, $\frac{\partial w}{\partial y} = K_y \cdot C$ 이고,

$\tilde{K} = \frac{C(D_{22})_{rs}}{L_{rs}}$ 이다.

윗 식에서 \tilde{K} 는 회전구속된 변의 스프링 상수이고, C 값은 구속을 유발한 인근 판(Rotationally Restrained Segment)의 양단 경계 조건에 따라 결정되는 값으로서 다음과 같다.

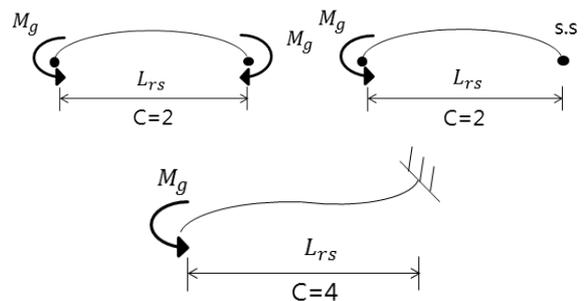


Fig. 3. 경계조건에 따른 C 값

상기 식으로 계산된 값은 14% 낮게 계산되고 있으며, 최소 좌굴 하중은 $i = 2$ 에서 발생한다. 또한, $(D_{22})_{rs}$ 는 구속을 유발한 인근 판 (Rotationally Restrained Segment)의 폭 방향의 휨강성 이고, L_{rs} 는 폭 길이를 의미한다.

한편, Fig.4와 같이 마주보는 긴변의 양단이 회전구속인 변장비가 매우 큰 직교 이방성 대칭 적층판의 좌굴은 식(10)과 같이 계산할 수 있다.

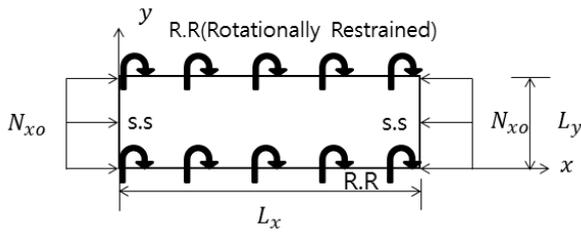


Fig. 4. 양 변이 회전 구속된 직교 이방성 대칭 적층 판

$$N_{xcr} = \frac{\pi^2}{L_y^2} \left(D_{11} \frac{L_y^2}{L_x^2} + (1 + 4.139\xi) D_{22} \frac{l_x^2}{L_y^2} + (2 + 0.62\xi') (D_{12} + 2D_{66}) \right) \quad (10)$$

여기서, ξ, ξ' 는 마주보는 긴변의 지지조건에 따라 결정되는 매개변수로서,

$$\xi = \frac{1}{1 + 10\zeta}, \quad \xi' = \xi^2, \quad \zeta = \frac{D_{22}}{\tilde{K}L_y} \text{이다.}$$

결론적으로, 매개 변수 $K = \frac{2D_{66} + D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$ 라고 할 때, ξ, ξ' 값들은 $0 < K < 1$ 일 경우 좌굴하중이 3.5% 보다 적게 산출되고, $1 < K < 3$ 일 경우는 6.5% 보다 적게 산출된다. 가장 실질적인 값은 K 값이 3이하여야 한다.

3. 등분포 면내하중을 받는 직교이방성 대칭 적층판의 좌굴

y 축에 평행한 두 단부가 단순지지일 경우 $\alpha_1 = i\pi$, $\alpha_4 = i^2\pi^2$ 임을 고려하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{xcr} = D_{11} \frac{\pi^2}{l_x^0} + D_{22} \frac{\alpha_3^4}{\pi^2} \frac{l_x^0}{L_y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\alpha_5}{L_y} \quad (11)$$

여기서, l_x 는 좌굴파형의 반파길이이며, 가장 적은 좌굴하중을 얻기 위한 필요조건은

$$\frac{dN_{x,cr}}{d(l_x^0)} = 0 \text{ 임을 고려하면 식 (11)로부터 다음과 같}$$

이 나타낼 수 있다.

$$l_x^0 = \frac{\pi}{\alpha_3} L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \quad (12)$$

각 경계조건에 따른 좌굴길이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

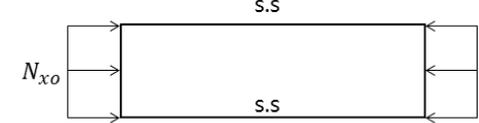
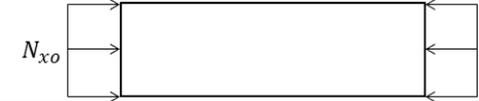
여기서, $\xi = \frac{1}{1 + 10\zeta}$, $\zeta = \frac{D_{22}}{\tilde{K}L_y}$, 이고 L_y 는 폭, \tilde{K} 는 스프링상수를 의미한다.

식(12)를 식(11)에 대입하고 정리하면,

$$N_{xcr} = \frac{2}{L_y^2} \left[\alpha_3^2 \sqrt{D_{11}D_{22}} + \alpha_5 (D_{12} + D_{66}) \right] \quad (13)$$

여기서, α_3, α_5 값은 $j = 1$ 인 경우의 값을 대입하여 좌굴길이와 좌굴하중을 구하여 정리하였다.

Table 1. 경계 조건에 따른 좌굴 길이

	$L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$0.8L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$0.664L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$\sqrt{\frac{1}{1+4.139\xi}} L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$1.675L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$1.675 \sqrt[4]{1+4.12\zeta} L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$
	$0.707L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$

한편, 마주보는 긴 두변이 회전구속된 긴 판의 경우 식(10)를 $\frac{d(N_{x,cr})}{d(l_x)} = 0$ 로 하여 l_x 를 구하면 l_x 는 가장 낮은 좌굴하중 상태에서의 좌굴길이이다. 따라서,

$$l_x^0 = \sqrt{\frac{1}{1+4.139\xi}} L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \quad (14)$$

식(14)와 $\xi = \frac{1}{1+10\zeta}$, $\xi' = \xi^2$, $\zeta = \frac{D_{22}}{KL_y}$ 를 식(10)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{x,cr} = \frac{\pi^2}{L_y^2} [2\sqrt{1+4.139\xi} \sqrt{D_{11}D_{22}} + (2+0.62\xi^2)(D_{12}+2D_{66})] \quad (15)$$

다른 예로서 긴변에서 1단고정이고 1단 자유인 경우

의 판의 경우 식(8)에서, $\frac{d(N_{x,cr})}{d(l_x)} = 0$ 로하여 얻은 l_x 값이 가장 작은 좌굴하중을 유발하는 좌굴장이 되고, 그 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$l_x = 1.675L_y \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \quad (16)$$

이 값을 식(8)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$N_{x,cr} = 7 \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{L_y^2} + 12 \frac{D_{66}}{L_y^2} \quad (17)$$

그러나 이 값은 14% 보다 작은 값이 얻어지므로 이를 보정하고자 “Kollar”는 K 값의 범위를 구분하여 비교적 정확한 값을 얻도록 보정식을 제안하였다 ($0 < K \leq 1$ 일때는 2%, $1 < K \leq 3$ 일때는 5%).

한편, 두 긴 변 중에서 1단은 회전구속하고 다른 변은 자유인 판의 경우는 같은 방법으로 식(9)에서 $\frac{d(N_{x,cr})}{d(l_x)} = 0$ 로 하여 얻은 l_x 의 값이 가장 작은 좌굴 하중을 유발하는 좌굴장이되고 그 값은 다음과 같이 계산된다.

$$l_x = 1.675L_y \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}(1+4.12\zeta)} \quad (18)$$

이 값은 식(9)에 대입하여 정리하면,

$$N_{x,cr} = \frac{7}{\sqrt{1+4.12\zeta}} \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{L_y} + 12 \frac{D_{66}}{L_y^2} \quad (19)$$

이 값도 14% 이하로 실제보다 적은 값이 얻어지므로 이 역시 “Kollar”는 K 값의 범위를 구분하여 비교적 정확한 값을 얻도록 보정식을 제안하였다. 이중 상각형 하중이 작용하는 경우는 “Lekhnitskii”가 좌굴하중을 제안하였고 전단하중의 경우는 “Whitney”가 제안하였다. 이 경우도 K 값의 범위를 구분하여 정확성을 향상시켰다.

$$\xi = \frac{1}{1+10\zeta}, \quad \zeta = \frac{D_{22}}{KL_y},$$

$$\nu = \frac{D_{12}}{2D_{66}+D_{12}}, \quad K = \frac{2D_{66}+D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1+(7.22-3.55\nu)\zeta}} \text{ 이고,}$$

등분포 전단하중을 받는 직교이방성판에서 다음과 같은 단순지지인 경우와 고정지지인 경우의 전단좌굴 하중($N_{xy,cr}$)는 다음과 같다.

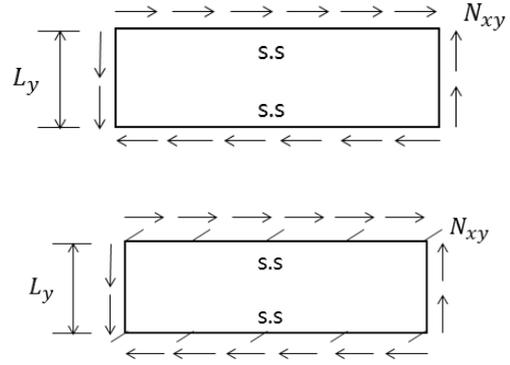


Fig. 5. 등분포 전단하중을 받는 경우

$$(N_{xy})_{cr} = \begin{cases} \frac{4\beta_1}{L_y^2} \sqrt{D_{11}D_{22}^3} & 0 < K \leq 1 \\ \frac{4\beta_1}{L_y^2} \sqrt{D_{22}(D_{12}+2D_{66})} & 1 < K < \infty \end{cases} \quad (20)$$

Table 2. β_1 의 값

	$0 < K \leq 1$	$1 < K < \infty$
단순지지	$8.125 + 5.045K$	$11.71 + \frac{1.46}{K^2}$
고정지지	$15.07 + 7.08K$	$18.59 + \frac{3.56}{K^2}$

-다음호 계속