

# 구간 시변 지연시간을 갖는 양의 시변 이산 구간 시스템의 새로운 안정 조건

## New Stability Conditions for Positive Time-Varying Discrete Interval System with Interval Time-Varying Delay Time

한 형 석  
가천대학교 전자공학과

**Hyung-seok Han**  
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do 461-701, Korea

### [요 약]

음이 아닌 입력에 대하여 음이 아닌 초기상태에서 출발한 모든 상태변수 값들이 시간에 대하여 항상 음이 아닌 값을 유지하는 시스템은 양의 시스템으로 정의된다. 본 논문에서는 상태변수에 시변 지연시간이 있는 양의 시변 선형 이산 구간 시스템의 안정조건을 새롭게 제안한다. 시변 지연시간은 최소와 최대 지연시간 범위에서 변하는 것으로 고려된다. 제안된 안정조건은 리아프노프 방정식의 상한 해 한계를 이용하여 유도되며, 매우 간단한 부등식의 형태로 표현된다. 수치예제를 통하여 새로운 안정조건들이 안정성 판단에 간단하고 효과적으로 적용될 수 있음을 확인한다.

### [Abstract]

A dynamic system is called positive if any trajectory of the system starting from non-negative initial states remains forever non-negative for non-negative controls. In this paper, new sufficient conditions for asymptotic stability of the interval positive time-varying linear discrete-time systems with time-varying delay in states are considered. The considered time-varying delay time has an interval-like bound which has minimum and maximum delay time. The proposed conditions are established by using a solution bound of the Lyapunov equation and they are expressed by simple inequalities which do not require any complex numerical algorithms. An example is given to illustrate that the new conditions are simple and effective in checking stability for interval positive time-varying discrete systems.

**Key word** : Discrete-time system, Interval delay, Interval system, Positive system, Robust stability.

<http://dx.doi.org/10.12673/jant.2014.18.5.501>



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Received 30 September 2014; Revised 21 October 2014  
Accepted (Publication) 7 October 2014 (30 October 2014)

\*Corresponding Author; Hyung-seok Han

Tel: +82-31-750-5561

E-mail: hshan@gachon.ac.kr

## I. 서론

양의 시스템은 음이 아닌 초기상태에서 시작하여 음이 아닌 입력에 대하여 항상 음이 아닌 상태변수 궤적을 영원히 유지하는 동적 시스템으로 정의된다[1]-[3]. 이러한 양의 동적 시스템은 상태변수의 값들이 양의 값으로만 표현되는 현상을 수학적으로 모델링하는데 중요한 역할을 하며, 경제학, 인구 특성, 오염물질 전달 특성 등의 여러 분야에서 발견할 수 있다[4]. 양의 시스템에 대한 안정성 판단 문제는 이 분야의 중요한 주제로, 지난 몇 년간 다양한 연구결과가 제시되었다[5]-[9]. 시간지연을 갖는 양의 구간 이산 시스템에 대한 견실 안정성 필요충분조건은 [8],[9]에서 제시되었으나, 제안된 조건은 일정한 지연시간을 갖는 시불변 구간 시스템에만 적용이 가능하다.

본 논문에서는 최근의 결과인 [8],[9]의 조건으로 안정성 해석이 불가능한 양의 시변 구간 시스템에 대하여 안정성 조건을 고려한다. 고려된 시스템은 특정한 구간에서 시간에 따라 변동하는 지연 시간을 갖으며, 시스템의 특성도 시간에 따라 일정한 구간에서 변동하는 양의 시변 이산 구간 시스템이다. 이는 시변 지연시간이 있는 네트워크 제어시스템에 대한 안정조건을 제시한 최신의 결과[10]를 확장 적용한 것으로 제안되는 안정 조건은 행렬의 스펙트럴 노름(spectral norm)을 이용한 간단한 부등식으로 표현된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 행렬의 노름, 음이 아닌 행렬과 이산 리아프노프(Lyapunov)방정식의 기본 성질에 대하여 정리하고, 3장에서는 안정성에 대한 충분조건을 주된 결과로 제시하며, 4장에서는 기존 수치 예제[9]에 대하여 새로 제시된 조건을 적용하고 그 결과를 기존의 것과 비교한다.

기존 수치예제에 새롭게 제시된 결과를 적용하면, 기존의 결과로는 다룰 수 없는 시변 구간 시스템에 대하여 안정성을 판단할 수 있음과 그 과정이 매우 간단함을 알 수 있다.

## II. 기초 이론

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬 및 행렬방정식의 중요한 이론 및 정리를 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는  $Z_+$ 는 음이 아닌 정수 집합,  $R_+^{n \times m}$ 는 음이 아닌 값으로 행렬 요소를 갖는  $n \times m$  행렬이며,  $R_+^n = R_+^{n \times 1}$ ,  $\|X\|$ 는 행렬  $X$ 의 스펙트럴 노름(spectral norm), ( $\|X\|: X^T X$ 행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며,  $X > 0$ 는 대칭행렬  $X$ 가 양의 정칙(positive definite),  $A = [a_{ij}]$ 는 행렬 요소 값  $a_{ij}$ 로 구성된 행렬.  $|A| = [|a_{ij}|]$ ,  $A \leq B$ 는 행렬 요소별 부등식을 나타내며,  $\lambda_{\max}(X)$ 는 행렬  $X$ 의 최대 고유치,  $\rho(X)$ 는  $\max |\lambda_i(X)|$ , 즉, 스펙트럴 반경(spectral radius),  $I_n$ 는  $n \times n$  차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다. 벡터  $x \in R_+^n$  중 모든 행렬요소가 양의 값을 갖는 경우에는, 완전 양(strictly positive)벡터라 정의하며  $x > 0$ 으로 표시한다.

보조정리 1([11, lemma 2.4]): 임의의 벡터  $x, y$ 와 양의 정칙행렬(positive definite matrix)  $\Sigma > 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^T y \leq x^T \Sigma x + y^T \Sigma^{-1} y \tag{1}$$

보조정리 2([12]): 정방행렬(square matrix)  $X$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$\rho(X) \leq \|X\| \tag{2}$$

보조정리 3([13, theorem 4.9]): 선형 시불변 시스템  $x(k+1) = Ax(k)$ 의 점근 안정성을 위한 필요충분조건은 임의의 양의 정칙행렬  $Q = Q^T > 0$ 에 대하여,  $A^T P A - P = -Q$ 의 식을 만족하는 유일한 양의 정칙행렬 해  $P = P^T > 0$ 가 존재한다.

보조정리 4([14, theorem 10.12]): 선형 시불변 시스템  $x(k+1) = Ax(k)$ 이 점근안정하면, 임의의 주어진 양의 정칙행렬  $Q = Q^T > 0$ 에 대하여, 리아프노프(Lyapunov)방정식  $A^T P A - P = -Q$ 을 만족하는 유일한 양의 정칙행렬 해

$$P = P^T = \sum_{i=0}^{\infty} (A^T)^i Q A^i > 0 \tag{3}$$

를 갖는다.

따름정리 1: 선형 시불변 시스템  $x(k+1) = Ax(k)$ 이 점근안정하고,  $A \in R_+^{n \times n}$ 이면, 주어진 임의의 음이 아닌 행렬 요소를 갖는 양의 정칙행렬  $Q = Q^T > 0$ ,  $Q \in R_+^{n \times n}$ 에 대하여, 리아프노프 방정식  $A^T P A - P = -Q$ 의 식을 만족하는 유일한 양의 정칙행렬 해  $P = P^T = \sum_{i=0}^{\infty} (A^T)^i Q A^i > 0$ 를 갖고, 이 행렬의 행렬요소는 모두 음이 아닌 값은 갖는 행렬로  $P \in R_+^{n \times n}$ .와  $P = |P|$ 를 만족한다.

증명:  $A \in R_+^{n \times n}$ 가 점근안정인 조건에 의하여 보조정리 4를 이용하면 유일한 양의 정칙행렬 해가 존재함을 알 수 있으며 이 해는  $A \in R_+^{n \times n}$ ,  $Q \in R_+^{n \times n}$  이므로  $P \in R_+^{n \times n}$ .와  $P = |P|$ 임을 식 (3)에 의해 알 수 있음.

## III. 주요 결과

다음과 같은 지연시간을 갖는 양의 시변 구간 이산시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)x(k-d(k)) \tag{4}$$

여기서,  $A(k), B(k) \in R_+^{n \times n}, x(k) \in R_+^n, \forall k \in Z_+$  이고, 모든  $x(-k) \in R_+^n, k = 0, 1, \dots, d_M$  이다. 또한,

$$\begin{aligned} A(k) &\in [A^-, A^+] \subset R_+^{n \times n} \\ 0 \leq_e A^- \leq_e A(k) \leq_e A^+ (0 \leq a_{ij}^- \leq a_{ij}(k) \leq a_{ij}^+) \forall k, i, j & \quad (5) \\ B(k) &\in [B^-, B^+] \subset R_+^{n \times n} \\ 0 \leq_e B^- \leq_e B(k) \leq_e B^+ (0 \leq b_{ij}^- \leq b_{ij}(k) \leq b_{ij}^+) \forall k, i, j & \\ d(k) &\in [d_m, d_M] \subset Z_+, (0 \leq d_m \leq d(k) \leq d_M) \forall k \end{aligned}$$

이다. 위 식에서 지연시간  $d(k)$ 가 시변이며, 구간 사이에서 변하는 것에 주목할 필요가 있으며, 시스템 행렬인  $A(k), B(k)$  도 시변으로 고려한 것이 이전 논문들[5]-[9]과의 차이점이다. 고유치를 이용한 안정성 조건은 위의 시변 시스템의 경우에는 적용될 수 없으며, 따라서 [15]에서와 같은 리아프노프 방정식을 이용한 안정 해석을 도입한다. [15]에서는 리아프노프 방정식의 상한 해 한계(upper solution bound)를 이용하였으며, 본 논문에서는 이를 새로운 리아프노프 함수에 대하여 적용한다. 이를 위하여 [16]의 리아프노프 함수와 유사하게 함수를 선택한다.

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) & (6) \\ &+ \sum_{j=-d_M+2i=k+j-1}^{-d_m+1} \sum_{i=k-j}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned}$$

여기서, 대칭행렬  $P, R$ 은 양의 정칙행렬로  $P, R > 0$ .

보조정리 5: 식(6)에서 정의된 리아프노프 함수는 다음의 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &V(x(k+1)) - V(x(k)) & (7) \\ &\leq x^T(k)(A^T(k)PA(k) - P + (1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d(k))(B^T(k)PB(k) - R)x(k-d(k)) \\ &\quad + 2x^T(k-d(k))B^T(k)PA(k)x(k) \end{aligned}$$

증명:

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\ x_d(k) &\equiv x(k-d(k)) \\ \Delta V_1 &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) & (8) \\ &= x^T(k)(A^T(k)PA(k) - P)x(k) \\ &\quad + 2x_d^T(k)B^T(k)PA(k)x(k) \\ &\quad + x_d^T(k)B^T(k)PB(k)x_d(k) \\ \Delta V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^k x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \quad (9)$$

[16]에서와 같이 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) & (10) \\ &\leq \left( \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) + \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \right) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \\ \Delta V_3 &= \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} (x^T(k)Rx(k) - x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) & (11) \\ &= (-d_m+1 - (-d_M+2)+1)x^T(k)Rx(k) \\ &\quad - (x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1) - \dots \\ &\quad - x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\ &= (d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) - \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned}$$

그러므로  $V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$ 는 식(7)을 만족한다.

정리 1: 식(4),(5)를 만족하는 양의 구간 이산시스템은 시스템 행렬  $A^+$ 이 점근안정하고, 즉

$$\rho(A^+) < 1 \quad (12)$$

하고, 다음의 조건을 만족하면

$$\begin{aligned} &(\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|) & (13) \\ &\times \left( \frac{(A^+)^T A^+}{\|A^+\|} + \sqrt{1+d_M-d_m} \frac{(B^+)^T B^+}{\|B^+\|} \right) < I_n \end{aligned}$$

점근안정하다.

증명: [14]에서와 같은 방법으로 임의의  $q > 0$  을 이용하여 식(5)의 음이 아닌 행렬요소를 갖는 양의 정칙행렬  $Q = Q^T > 0$  를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} Q &= q \left( \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|}{\|A^+\|} (A^+)^T A^+ \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+ \right) \\ &\in R_+^{n \times n} \end{aligned}$$

식(12)의 가정과 위와 같은 행렬  $Q$ 의 선택에 의하여 따름정리로부터,  $(A^+)^T A^+ - P - Q$ 의 방정식을 만족하는 음이 아닌 행렬요소를 갖는 양의 정칙행렬  $P \in R_+^{n \times n}$ 가 존재함을 알 수 있다. 식(13)의 조건을 이용하면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & (A^+)^T(qI_n - P)A^+ - (qI_n - P) = Q + q(A^+)^T A^+ - qI_n \quad (14) \\
 & = q \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|}{\|A^+\|} (A^+)^T A^+ \\
 & + \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+ \\
 & + (A^+)^T A^+ - I_n \\
 & = q(\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|) \\
 & \times \left( \frac{(A^+)^T A^+}{\|A^+\|} + \sqrt{1+d_M-d_m} \frac{(B^+)^T B^+}{\|B^+\|} \right) - I_n \\
 & = S < 0
 \end{aligned}$$

식 (12)와 보조정리 3에 의해,  $(A^+)^T(qI_n - P)A^+ - (qI_n - P) = S, S < 0$  의 방정식을 만족하는  $qI_n - P > 0$  가 존재함을 알 수 있다. 따라서,  $qI_n - P > 0$  이므로  $q > \lambda_{\max}(P)$  됨을 알 수 있다.

보조정리1에 의해, 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 & 2x_d^T(k)B^T(k)PA(k)x(k) \quad (15) \\
 & \leq \epsilon^{-1}x^T(k)A^T(k)PA(k)x(k) + \epsilon x_d^T(k)B^T(k)PB(k)x_d(k)
 \end{aligned}$$

식 (15)와 보조정리5를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & V(x(k+1)) - V(x(k)) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\
 & \leq x^T(k)(A^T(k)PA(k) - P + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}A^T(k)PA(k))x(k) \\
 & + x_d^T(k)((1+\epsilon)B^T(k)PB(k) - R)x_d(k) \\
 & \leq x^T(k)((A^+)^T PA^+ - P + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}(A^+)^T PA^+)x(k) \\
 & + x_d^T(k)((1+\epsilon)(B^+)^T PB^+ - R)x_d(k) \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$(\because A(k), B(k), P \in R_+^{n \times n}, x(k) \in R_+^n, A(k) \leq_e A^+, B(k) \leq_e B^+)$$

임의의 양수  $\epsilon$ 과 대칭행렬  $R$ 을 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon & = \frac{\|A^+\|}{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|} \\
 R & = (1+\epsilon)(B^+)^T PB^+ \quad (17) \\
 & = \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\| + \|A^+\|}{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|} (B^+)^T PB^+
 \end{aligned}$$

식 (17)과 앞서 증명한  $q > \lambda_{\max}(P)$  관계를 이용하면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+d_M-d_m) R}{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|} (B^+)^T PB^+ \\
 & \leq \lambda_{\max}(P) \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+ \\
 & < q \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+ \\
 & (\because q > \lambda_{\max}(P))
 \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}
 & V(x(k+1)) - V(x(k)) \\
 & \leq x^T(k)((A^+)^T PA^+ - P + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}(A^+)^T PA^+)x(k) \\
 & = x^T(k)(-Q + (1+d_M-d_m)R + \epsilon^{-1}(A^+)^T PA^+)x(k) \\
 & < x^T(k)(-q \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|}{\|A^+\|} (A^+)^T A^+ \quad (18) \\
 & + \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+) \\
 & + q \frac{(1+d_M-d_m) \|B^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|A^+\|}{\|B^+\|} (B^+)^T B^+ \\
 & + q \frac{\sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|}{\|A^+\|} (A^+)^T A^+)x(k) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

그러므로,  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$  이 되어 시스템은 점근 안정하다.

정리1에서는 안정을 위한 두 개의 조건을 갖는다. 첫 번째 조건은 음이 아닌 시스템 행렬  $A^+$ 에 대한 조건이며, 두 번째 조건은 매우 간단한 행렬부등식으로 표현된다. 그러나, 식 (13)의 조건을 확인하기 위해서는 부등식의 좌변에 해당하는 대칭행렬의 고유치를 계산하여야 한다. 정리1의 조건들을 더욱 간단하게 하기 위하여 복잡한 계산이 없는 하나의 조건으로 표현하면 정리2와 같다.

정리 2: 식(4),(5)를 만족하는 양의 구간 이산시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\| < 1 \quad (19)$$

증명: 식(19)의 부등식을 만족하면,  $\|A^+\| < 1$  임을 만족하고 보조정리2에 의하여  $\rho(A^+) \leq \|A^+\| < 1$ 가 되어, 시스템 행렬  $A^+$ 가 점근안정함을 알 수 있다. 즉, 정리1의 식(12)의 조건을 만족함을 알 수 있다. 또한,  $\|A^+\|^2 I_n \geq (A^+)^T A$ ,  $\|B^+\|^2 I_n \geq (B^+)^T B$ 의 사실을 이용하면, 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|) \quad (20) \\
 & \times \left( \frac{(A^+)^T A^+}{\|A^+\|} + \sqrt{1+d_M-d_m} \frac{(B^+)^T B^+}{\|B^+\|} \right) \\
 & \leq (\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|)^2 I_n
 \end{aligned}$$

그러므로, 식(20)에 의하여 식 (19)를 만족하면,  $(\|A^+\| + \sqrt{1+d_M-d_m} \|B^+\|)^2 I_n < I_n$  를 만족하게 되어 식 (13)의 조건을 만족하게 된다. 따라서, 식(19)의 조건을 만족하면 정리 1의 두 개의 조건을 모두 만족하게 되므로, 시스템은 점근안정하다.

정리2는 이전의 발표된 결과들에 비하여 매우 간단하고 효과적인 조건이며, 복잡한 알고리즘이나 수치 계산(선형행렬부등식), 최적화 계산 등을 요구하지 않는다. 정리2의 결과는 [15]에서 제시된 고정된 지연시간을 갖는 시불변 이산 시스템  $x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d)$ 에 대한 안정 조건  $\|A\| + \|B\| < 1$ 과 같이 매우 간단하며 효율적인 것이다. 정리2의 결과는 지연시간에 대한 특별한 조건이 있는 일반적인 이산시스템에 대한 안정조건[10]의 조건과 유사한 형태이다. 정리2에서 보면 안정조건은 지연시간의 크기에는 영향을 받지 않고, 단지 지연시간의 변동폭에만 영향 받는다는 것을 알 수 있다.

IV. 예 제

[8],[9]에서 예제로 사용된 수치예제를 이용한다. [9]에서는 시불변 시스템과 일정한 지연시간에 대하여 안정성 해석을 행하였다. [9]에서와 같은 시불변 지연시간을 고려하기 위하여 정리2에서  $d_m = d_M = 1, d_M - d_m = 0$ 로 두고 식 (4),(5)의 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.20 \\ 0.2 & 0 & a \\ 0 & 0.10 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.10 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.20 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & b \end{bmatrix}$$

상수인 지연 시간에 대하여 안정한  $a \geq 0, b \geq 0$ 의 필요충분조건에 대한 범위는, [9]에 의하면  $0 \leq a < 4.222, 0 \leq b < 1 - 0.18a/0.76$ 로 구해 질 수 있다. 이는 시불변 지연시간이 있는 시불변시스템에 대한 결과이므로, [9]와는 다르게 시변 시스템으로 고려하여 정리1과 정리2를 적용하면  $d_M - d_m = 0$ 이므로 다음의 조건으로 표시된다.

$$(\|A^+\| + \|B^+\|) \times \left( \frac{(A^+)^T A^+}{\|A^+\|} + \frac{(B^+)^T B^+}{\|B^+\|} \right) < I_n \quad (22)$$

$$\|A^+\| + \|B^+\| < 1$$

이는 시불변 지연시간을 갖는 시변시스템에 대한 결과이며, [9]의 결과와 함께 그림 1에 도시된다. 그림 1에서 정리2가 정리1의 충분조건이므로, 정리1의 결과가 정리2의 결과보다 더 넓은 영역을 보여준다. 정리1과 2의 결과는 시불변시스템을 고려한 [9]의 결과에 비해 좁은 안정영역을 보이나, 이는 시불변 시스템이 시변시스템에 포함되는 관계이므로 시변의 결과가 시불변의 안정범위보다 작게 나오는 것은 당연하다. 그러나, 정리1과 2의 결과는 [9]의 결과로는 다룰 수 없는 시변시스템에 대하여 구한 것이다. 정리1과 2의 우월성은 지연시간과 시스템이 모두 시변인 경우에서 찾을 수 있다, 이를 위하여 지연시

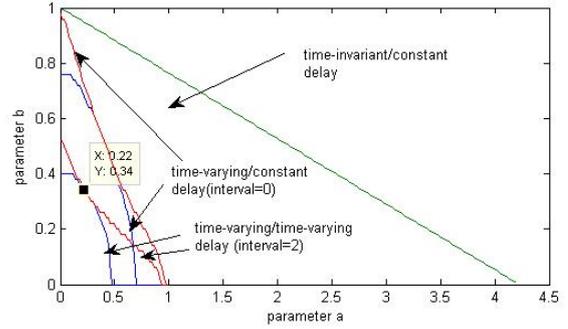


그림 1. 다양한 경우에 대한 안정 영역 비교  
Fig. 1. Comparison of stability regions for various cases.

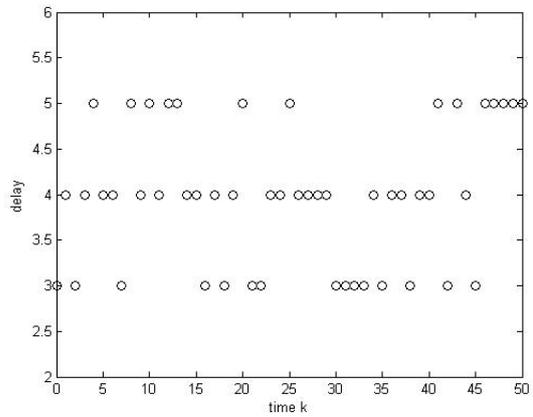


그림 2. 시변 지연시간 d(k) 궤적  
Fig. 2. Trajectory of time varying delay time d(k).

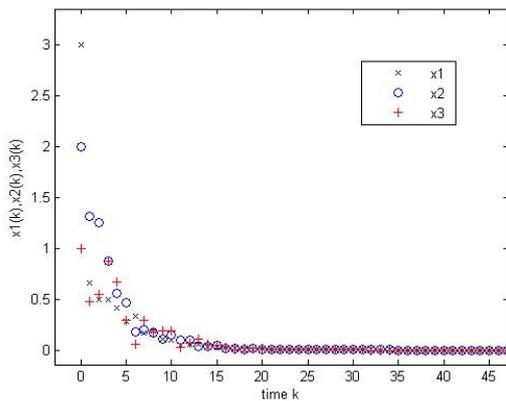


그림 3. 상태변수들의 궤적  
Fig. 3. Trajectory of state variables.

간이 시불변이 아니고  $d_M - d_m = 2$ , 즉, 간격이 2인 시변지연시간을 갖는 경우에 대하여 안정범위를 구하면 다음과 같다.

$$(\|A^+\| + \sqrt{3} \|B^+\|) \times \left( \frac{(A^+)^T A^+}{\|A^+\|} + \sqrt{3} \frac{(B^+)^T B^+}{\|B^+\|} \right) < I_n \quad (23)$$

$$\|A^+\| + \sqrt{3} \|B^+\| < 1$$

그림 1에 나타난 영역 또한 시불변 지연시간에 대한 결과에 비하여 좁은 안정영역을 보여준다. 이러한 시변 지연시간에 대한 시변시스템 응답은 그림 2와 3에서 도시된다. 그림 2는 시간  $k$ 에 따른 시변 지연시간  $d(k)$ 의 궤적이며,  $y$ 축은 시변지연시간  $d(k)$ 의 값, 그림 3에서는 초기치  $x(k) = [3 \ 2 \ 1]^T$ 에 대하여 식 (4),(5)의 시스템 행렬  $A(k), B(k)$  값이 구간 상한 행렬  $A^+, B^+$ 가  $a=0.21, b=0.33$ 인 경우에 대하여 시변으로 임의로 변하는 시변시스템으로 고려한 경우에 대한 응답이 도시된다. 그림 3에서 상태변수  $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$  궤적이 시간  $k$ 에 따라 초기값에서 0으로 접근하여 감을 볼 수 있으며 이를 통하여 안정함을 확인할 수 있다.

### V. 결 론

본 연구에서는 상태변수가 모든 시간에 대하여 음이 아닌 값을 갖고 시스템 행렬도 음이 아닌 행렬요소를 갖는 양의 시스템에 대하여 시변 지연시간에 대한 안정조건을 처음으로 제안한다. 시불변 시스템에만 적용가능한 제약점을 해결하여 구간을 갖는 시변 지연시간에 대하여 양의 구간 시스템에 대한 안정조건을 매우 간단한 조건으로 제안하였고, 이를 기존의 시불변에서 다루어진 수치예제에 적용하여 제안된 조건의 편의성과 시변 시스템으로의 확장가능함을 확인하였다.

### 참고문헌

[1] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive Linear Systems; Theory and Applications*, New York, NY: J. Wiley, 2000.  
 [2] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D Systems*, London, UK: Springer-Verlag, 2002.  
 [3] D. Hinrichsen and N. K. Son, "Stability radii of positive discrete-time systems," in *Proceeding of the 3rd International Conference on Approximation and Optimization in the Caribbean, Aportaciones Matematicas, Comunicaciones*, Puebla: México, pp. 113-124, 1995.  
 [4] E. Virnik, "Stability analysis of positive descriptor systems," *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 429, No. 10, pp.

2640-2659, Oct. 2008.  
 [5] M. Busłowicz, "Robust stability of positive discrete-time linear systems with multiple delays with linear unity rank uncertainty structure or non-negative perturbation matrices," *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 55, No. 1, pp. 1-5, Jan. 2007.  
 [6] M. Busłowicz, "Simple conditions for robust stability of positive discrete-time linear systems with delays," *Control and Cybernetics*, Vol. 39, No. 4, pp. 1159-1171, Apr. 2010.  
 [7] C. Zhang and Y. Sun, "Stability analysis of linear positive systems with time delays on time scales," *Advances in Difference Equations*, Open access, Vol. 2012:56, 2012.  
 [8] M. Busłowicz and T. Kaczorek, "Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays," *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 52, No. 2, pp. 99-102, Feb. 2004.  
 [9] M. Busłowicz, "Simple stability conditions for linear positive discrete-time systems with delays," *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 56, No. 4, pp. 325-328, Apr. 2008.  
 [10] H.S. Han and D.H. Lee, "New Stability Conditions for Networked Control System with Time-Varying Delay Time," *Journal of Korea Navigation Institute*, Vol. 17, No. 6, pp. 679-686, Dec. 2013.  
 [11] Z. Liu and L. Shu, "Robust BIBO stabilization analysis for discrete-time uncertain system," *International Journal of Engineering And Applied Sciences*, Vol. 6, No. 6, pp. 336-340, Oct. 2010.  
 [12] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1990.  
 [13] Z. Gajić and M. Lelić, *Modern Control Systems Engineering*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, pp. 179-183, 1996.  
 [14] P. J. Antsaklis and A. N. Michel, *Linear Systems*, New York, NY: McGraw-Hill, pp. 500, 1998.  
 [15] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, "Robust Stability of Discrete Uncertain Time-Delay Systems By Using a Solution Bound of the Lyapunov Equation," *Innovative Computing Information and Control Express Letters*, Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May 2011.  
 [16] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, "Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay," *Chemical Industry & Chemical Engineering Quarterly*, Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.



**한 형 석 (Hyung-Seok Han)**

1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)  
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수  
※ 관심분야 : 유도제어, 건설제어, 센서 응용 시스템