

대기행렬모형에 의한 워크플로우 시간분석

박진수^{1†}

A Workflow Time Analysis Applying the Queueing Model

Jinsoo Park

ABSTRACT

Traditional workflow time analyses have been performed treating an activity as an independent $M/M/1$ queueing system. Using the general forms of performance measures in the $M/M/1$ system, various aspects of analyses can be performed. Especially, on the time analysis of an AND structure in a workflow system, the mean system sojourn time can be formalized by applying the performance measures of $M/M/1$ system. In the real workflow system, the AND structure cannot be described correctly under the assumption of independent $M/M/1$ systems. To overcome this limitation, this research makes the assumption that the all activities for a task starts simultaneously. In this situation, the theoretical solution can be derived using the performance measures of the $M/G/1$ system. In addition, the simulation modeling method will be proposed to analyze the AND structure of a real workflow system. Finally, some numerical results from the theoretical solutions and simulation models will be provided for verification. The main performance measures used in this research are mean queueing time and mean sojourn time.

Key words : Business process management, Workflow time analysis, Queueing model

요약

전통적인 워크플로우 시간분석은 단위작업을 독립적인 $M/M/1$ 대기행렬모형에 적용하여 수행해왔다. $M/M/1$ 시스템 성능척도의 일반해들을 활용하면 여러 가지 분석이 가능해진다. 특히 워크플로우 시스템의 AND 구조를 분석함에 있어 $M/M/1$ 시스템 성능척도를 활용하면 그 체제시간에 대한 분석이 가능하다. 그러나 실질적인 AND 구조를 정확히 묘사하기 위해서는 각각의 $M/M/1$ 시스템이 독립이라는 가정이 없어야 한다. 본 연구는 이러한 한계를 극복하기 위해 한 업무에 대한 모든 단위 작업이 동시에 시작하는 상황으로 가정한다. 이 가정 하에서는 $M/G/1$ 시스템의 성능척도를 이용하여 이론적 분석이 가능해진다. 또한 시물레이션을 이용하여 실질적인 AND 구조를 정확히 묘사할 수 있는 방법론을 소개한다. 마지막으로 가상의 시스템을 구성하여 이론적인 해와 시물레이션 결과들을 수록함으로써 제안된 방법론들을 검증한다. 본 연구에서 사용된 주요 시스템 성능척도는 평균대기시간과 평균체제시간이다.

주요어 : 비즈니스프로세스관리, 워크플로우 시간분석, 대기행렬모형

1. 서론

워크플로우는 여러 분야에서 광범위한 의미로 사용되지만 일반적으로 비즈니스프로세스관리(BPM, business process management)에서는 정보 또는 업무의 이동을 나타내는 작업의 흐름을 지칭한다. 워크플로우 분석은 작업 절차에 대한 운영을 위해 매우 중요하며 다양한 측면에서의 분석방법이 연구되고 있으며 국내에서도 활발히 연구되고 있다. 특히 워크플로우 시간분석은 비즈니스프로세

*이 논문은 2013년도 용인대학교 학술연구비 재원으로 수행된 연구임.

접수일(2014년 6월 3일), 심사일(2014년 7월 19일),
게재 확정일(2014년 9월 17일)

¹⁾용인대학교 경영정보학과

주 저 자 : 박진수

교신저자 : 박진수

E-mail: jsf001@yongin.ac.kr

스에 있어 시간 관리 및 통제를 위해 활용된다.

워크플로우 시간분석에 대한 연구의 역사는 길지 않지만 여러 형태의 분석기법이 존재한다^{3, 6, 9-10, 12}. 워크플로우 시스템의 시간분석은 일반적으로 수리적 결과를 공식화하여 도출할 수 있는 대기행렬모형을 활용하여 연구되어 왔다^{4, 8, 11}. 특히 $M/M/1$ 시스템은 워크플로우 분석에 있어 가장 많이 사용되는 대기행렬모형이다. 이는 시스템의 특성상 이론적인 분석에 의한 성능척도의 수리적 해가 모두 도출되기 때문이다. 본 연구의 기초연구라 할 수 있는 Truong et al.의 분석결과¹¹는 $M/M/1$ 시스템을 활용한 대표적인 예이다.

워크플로우는 SEQUENCE, AND, XOR, LOOP의 네 가지 구조(structures)로 구성되며 본 연구에서 분석하고자 하는 대상은 AND 구조이다. AND 구조는 여러 개의 단위작업(activity; 본래 사전적 용어가 따로 존재하지만 본 논문에서는 그 의미상 ‘단위작업’으로 기술)을 모두 수행해야 해당 업무 또는 정보처리가 종료되는 형태의 비즈니스프로세스를 지칭한다. 업무가 도착하면 각 단위작업의 대기열에서 대기하다가 자신의 차례가 되면 해당 단위작업을 수행한다. 모든 단위작업을 완료해야지만 해당 업무가 종료되기 때문에 이를 AND 구조라 지칭한다. Truong et al.은 AND 구조의 단위작업을 독립적인 $M/M/1$ 시스템으로 설명하고 이를 분석하여 평균체제시간을 유도하였다¹¹. 그러나 이 분석방법에는 한계가 존재하며 여러 가지 확장 가능성을 내포하고 있다.

본 논문에서는 기존의 AND 구조 시스템에 가정을 하나 추가한다. 업무가 도착하면 각 단위작업의 대기열에서 대기하는 것이 아니라 하나의 대기열에서 대기하다가 선행 업무가 종료되면 모든 단위작업을 일제히 시작하는 상황으로 가정한다. 이는 실제로 컴퓨터 또는 인터넷이 활용되는 IT(information technology) 분야에서 충분히 존재할 수 있는 상황이며 다른 비즈니스프로세스에 대해서도 활용가능한 상황이 존재한다. 일례로 물류센터에서의 상하차 업무와 같이 선행차량의 모든 작업이 끝나야 다음 차량의 업무를 수행하는 경우를 들 수 있다. 이러한 상황 하에서는 AND 구조 자체가 $M/G/1$ 시스템으로 설명되며 그 일반해를 이용하면 평균대기시간과 평균체제시간을 이론적으로 유도할 수 있다. 아울러 본 논문에서는 단위작업의 동시시작 가정이 없는 시스템의 분석을 위한 대안으로 상세한 시뮬레이션 알고리즘을 제안한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 먼저 2장에서는 워크플로우 대기행렬모형과 기존연구에서 수행된 시간분석에 대해 고찰한다. 3장에서는 본 논문에서 제안하는 시

간분석 방법과 그 해법들을 설명하고 시뮬레이션 모델링 방법을 제시한다. 4장에서는 가상의 시스템에 본 연구에서 제안하는 방법을 적용한 계산결과 및 시뮬레이션결과를 통해 타당성을 검증하고 5장에서는 결론 및 추후 연구과제를 제안한다.

2. 워크플로우 모형

2.1 워크플로우 대기행렬모형

전통적인 워크플로우 대기행렬모형은 시스템 내의 모든 단위작업(activity)에 대해 선입선출(FCFS, first come first served) 서비스 정책을 갖는 $M/M/1$ 대기행렬시스템으로 가정하며 워크플로우 시스템은 그들로 이루어진 네트워크로 구성된다. 그 이유는 $M/M/1$ 시스템의 모든 성능척도를 해석적인 방법으로 유도할 수 있기 때문이다. 특히 $M/M/1$ 시스템으로부터의 이탈과정은 Burke의 이탈정리²에 의해 포아송과정이기 때문에 네트워크를 구성하더라도 이론적 분석이 가능해진다. 물론 실제계에서 일어나는 수많은 도착과정 또는 사건의 발생과정이 포아송과정을 따르는 것도 $M/M/1$ 시스템을 응용하는 큰 이유 중 하나이다.

도착률이 λ 이며 서비스율이 μ 인 $M/M/1$ 시스템의 안정상태(steady state) 대기시간 T_q 의 분포함수와 그 평균은 다음과 같이 유도된다.

$$W_q(x) = Pr(T_q \leq x), (x \geq 0) \\ = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)x}$$

$$W_q = E(T_q) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

여기서, $\rho = \lambda/\mu$ 이며 서버이용률(server utilization, i.e. traffic intensity) 또는 서버가 바쁠 확률을 나타낸다. 또한 안정상태에서의 시스템 체제시간(sojourn time) T 의 분포함수와 그 평균은 다음과 같다.

$$W(x) = Pr(T \leq x), (x \geq 0) \\ = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x} \quad (1)$$

$$W = E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

만일 모든 단위작업을 단순한 $M/M/1$ 만으로 모형화

할 수 있다면 그들로 이루어진 네트워크인 워크플로우 시스템에 대한 이론적 분석이 가능하다. 그러나 실제 워크플로우 시스템은 각 단위작업이 $M/M/1$ 의 형태로 모형화할 수 없는 시스템이 존재한다. 대표적인 경우가 바로 AND 구조의 작업이다.

2.2 기존연구 고찰

앞서 언급한 바와 같이 본 논문은 Truong et al.^[11]이 제안한 AND 구조의 워크플로우 분석에 대한 일반화 및 확장 분석 방법을 소개한다(본 논문에서는 편의상 Truong et al.의 분석 방법을 기존연구라 칭하겠다). 먼저 기존연구에서의 시스템 가정과 그 분석결과를 간략히 살펴보자. 일반적인 AND 구조의 형태는 Fig. 1과 같이 주어진다. 즉 단위작업 A 를 마치고 나면 X_1 부터 X_n 까지의 모든 단위작업에 입력되어 이들이 전부 완료되어야지만 단위작업 B 에 입력된다. 분석의 대상은 Fig. 1의 점선으로 구성된 부분, 즉 단위작업 A 가 끝난 시점부터 단위작업 B 가 시작하기 직전까지이다. 기존 연구에서는 X_1 부터 X_n 까지의 작업을 모두 독립적인 $M/M/1$ 모형으로 가정하여 분석하였다.

각 X_i 의 체제시간을 T_i 라 하면 모든 작업이 종료될 때까지의 최종 체제시간 T 는 그들의 최대치이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \max(T_1, T_2, \dots, T_n) \tag{2}$$

이로부터 Fig. 1과 같이 단위작업이 n 개인 AND 구조 시스템의 체제시간 분포함수는 식 (1)에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} W(x) &= Pr(T \leq x) \\ &= Pr[\max(T_1, \dots, T_n) \leq x] \\ &= Pr[T_1 \leq x, \dots, T_n \leq x] \\ &= Pr[T_1 \leq x] \cdots Pr[T_n \leq x] \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - e^{-(\mu_i - \lambda)x}) \end{aligned} \tag{3}$$

이 식에서 네 번째 등호는 각 시스템이 독립이기 때문에 성립한다. 식 (3)를 이용하면 평균체제시간이 계산되는데 기존연구에서는 이를 다음과 같이 정리하였다(기존연구에서는 T 를 *waiting time*으로 명명하였는데 엄밀히 따지면 *sojourn time*이 정확한 표현이다).

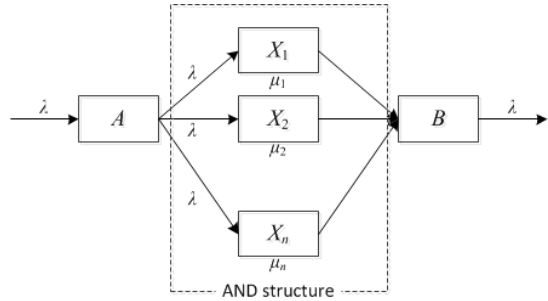


Fig. 1. A general AND structure in workflow^[11]

$$\begin{aligned} W &= E(T) \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{1 < t_1 < \dots < t_k < n} \frac{1}{\gamma_{t_1} + \dots + \gamma_{t_k}} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\gamma_k = \mu_i - \lambda$ 이다. 식 (4)의 괄호 안에 있는 합산식을 보충설명하면 γ_1 부터 γ_n 중에서 임의의 k 개의 합에 역수를 취하고 이를 모든 경우에 대해 더한 것이다. 예를 들어 $n=3, k=2$ 인 경우 괄호안의 합산식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_3}$$

또한 식 (4)는 Fig. 1의 AND 구조에서 각 입력에 대한 λ 가 서로 다른 경우로도 확장할 수 있다.

기존연구의 결과는 공식화된 해를 보여주고 있지만 그 한계가 존재하며 이를 극복하기 위한 가정 및 확장을 고려해야 한다. 그들은 독립적인 $M/M/1$ 시스템들의 최대 체제시간을 유도하였는데 이는 실제 상황을 정확히 설명할 수 없다. 그 이유는 하나의 업무에 대해 n 개의 단위작업을 모두 처리해야 하는 경우 이들이 독립적인 $M/M/1$ 시스템이며 각 단위작업의 체제시간이 식 (1)과 같은 분포를 따르는 것처럼 보이지만 실상은 그렇지 않기 때문이다. 이는 단위작업 A 를 마친 업무가 X_1 부터 X_n 까지의 각 단위작업에 동시에 입력되기 때문이다. 이해를 돕기 위해 Fig. 2를 살펴보자. Fig. 2는 네 개의 단위작업이 존재하는 AND 구조의 한 예이다. 기존연구에 의하면 식 (2)에 의해 가장 긴 시간이 소요되는 단위작업 X_4 의 체제시간이 실제 체제시간이 된다. 이 경우 업무 i 의 각 단위작업당 체제시간은 그 분포가 서로 다르게 된다. X_3 부터 X_4 까지의 단위작업은 선행업무가 이미 종료되었으므로 입력되자마자 서비스를 받게 되어 그 체제시간이 서비스

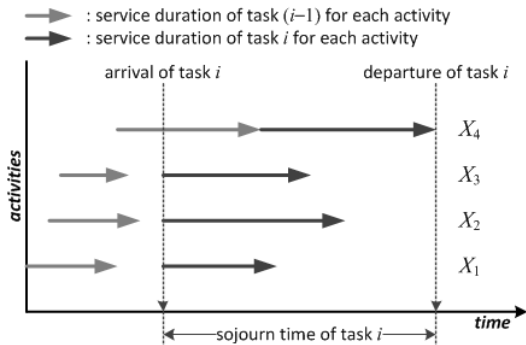


Fig. 2. An example of sojourn time in AND structure

을 μ_i 의 지수분포를 따르게 되며 X_4 의 체재시간만이 식 (1)의 분포를 따르게 된다. 이러한 상황은 서버이용률이 작을수록 더욱 빈번히 발생하며 이 경우 업무 i 의 체재시간 분포가 식 (3)과 같이 유도되지 않는다. 결국 각 단위작업의 체재시간이 선행업무의 이탈시점에 의해 결정되므로 AND 구조에서의 체재시간을 식 (3)과 같이 유도하는 것은 올바르지 못하다. 다만 서버이용률이 높은 경우에는 Fig. 2에서 업무 i 의 단위작업 X_4 와 같은 상황이 빈번히 발생하게 되어 식 (3)이 근사적 해가 될 수 있다. 이는 4장에서 다시 한 번 언급하도록 하겠다.

결국 각각의 X_i 는 $M/M/1$ 시스템으로 설명되지만 이를 AND 구조로 아우르면 독립적인 $M/M/1$ 시스템만으로는 설명할 수 없게 된다. 따라서 본 연구에서는 모든 단위작업을 동시에 시작하도록 가정을 두고 분석을 시도하였다. 이러한 가정을 갖는 시스템은 기존연구에서 제안된 AND 시스템과는 절차상에 있어 상이한 형태이지만 시스템 체재시간은 물론 대기시간과 최종 서비스시간에 대한 분석이 가능하게 해준다. 더불어 본 논문에서는 이를 AND 구조의 입력과 서비스가 지수분포가 아닌 일반 분포인 경우에 대해서도 확장하여 분석하고, 시뮬레이션 모델을 통해 단위작업의 동시시작 가정이 없는 경우에 대한 분석결과도 제시하고자 한다.

3. 모형 분석 방법론

3.1 대기행렬모형 및 가정

본 논문은 기본적으로 Fig. 1과 같은 시스템을 가정한다. 기존연구와의 다른 점은 선행 업무의 모든 작업이 완료된 이후 다음 업무가 시작된다고 가정하며 각 단위작업 X_i 들은 서로 독립이라는 것이다. 이 가정에 의해 모든 단

위작업이 동시에 시작하는 상황이 이루어진다. 또한 Fig. 1의 단위작업 A 와 B 를 고려하지 않고 AND 구조만을 분석하고 이를 일반화 한다. A 와 B 를 고려하게 되면 이는 대기행렬 네트워크로 확장되며 그 이론적 분석이 매우 까다롭거나 불가능해지기 때문이다.

이 장에서 언급되는 대기시간, 서비스시간, 체재시간의 의미는 다음과 같다. 대기시간이란 한 업무가 AND 구조에 입력된 시점부터 선행 업무가 모두 종료되고 자신의 동시작업을 시작할 때까지의 시간을 가리킨다. 서비스시간이란 한 업무가 동시작업을 시작한 시점부터 자신의 모든 단위작업이 종료될 때까지의 시간을 나타낸다. 체재시간의 의미는 2절에서의 의미와 동일하며 결국 대기시간과 서비스시간의 합으로 계산된다. 마지막으로 대기행렬시스템의 안정상태에 대한 해가 존재하기 위해서는 평균서비스시간이 평균도착간격보다 작아야 한다는 가정을 기본으로 한다.

3.2 마코프 대기행렬 모형에 의한 분석

먼저 앞 절에서 제안한 AND 구조 시스템을 분석해 보자. 이 경우 입력은 여전히 도착률 λ 의 포아송과정이 되지만 서비스시간은 X_1 부터 X_n 중 가장 오래 걸리는 단위작업의 완료시간이 된다. 따라서 서비스시간 S 는 다음과 같이 표현된다.

$$S = \max(X_1, \dots, X_n) \tag{5}$$

이로부터 서비스시간의 분포함수는 단위작업의 독립가정에 의해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= Pr(S \leq s) \\ &= Pr(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq s) \\ &= Pr(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s) \\ &= Pr(X_1 \leq s) \cdots Pr(X_n \leq s) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\mu_i s}), \quad (s > 0) \end{aligned} \tag{6}$$

결국 Fig. 1의 AND 구조 시스템 전체는 도착이 포아송과정이고 서비스시간이 $F_S(\cdot)$ 를 따르는 $M/G/1$ 시스템과 동일해진다. 따라서 다음과 같은 $M/G/1$ 모형의 평균 대기시간 공식을 그대로 활용할 수 있다.

$$W_{q, M/G/1} = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} \tag{7}$$

식 (7)에서 $\rho = \lambda E(S)$ 이며 $E(S^2)$ 은 서비스시간 S 의 2차 모멘트로서 식 (6)를 이용하여 유도할 수 있다. 또한 $M/G/1$ 시스템의 평균체제시간은 다음과 같이 계산된다.

$$W_{M/G/1} = W_{q,M/G/1} + E(S) \tag{8}$$

만일 Fig. 1의 μ_i 가 μ 로 모두 같다면 식 (6)는 다음과 같이 단순화된다.

$$F_S(s) = (1 - e^{-\mu s})^n, \quad (s > 0)$$

Fig. 1의 AND 구조 시스템을 확장하여 X_i 들의 작업 시간이 각각 $E(X_i) = 1/\mu_i$ 인 일반분포 $F_i(\cdot)$ 을 따른다고 가정해보자. 서비스시간은 여전히 식 (5)로 표현된다. 식 (5)를 이용해 서비스시간의 분포를 유도하면 단위작업의 독립가정에 의해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= Pr(S \leq s) \\ &= Pr(\max(X_i) \leq s) \\ &= Pr(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s) \\ &= Pr(X_1 \leq s) \dots Pr(X_n \leq s) \tag{9} \\ &= \prod_{i=1}^n F_i(s), \quad (s > 0) \end{aligned}$$

식 (9)로부터 $E(S)$, $E(S^2)$ 을 각각 유도할 수 있으며 도착이 여전히 포아송과정이므로 이 경우도 $M/G/1$ 의 일반해인 식 (7)과 (8)을 그대로 이용할 수 있다. X_i 들의 모두 평균이 $1/\mu$ 인 $F(\cdot)$ 분포를 따른다면 식 (9)은 다음과 같이 단순화된다.

$$F_S(s) = F^n(s), \quad (s > 0)$$

3.3 일반 대기행렬 모형에 의한 분석

앞 절에서 분석한 바와 같이 도착과정이 포아송과정인 경우 대기시간, 체제시간의 이론적 결과를 정확한 공식으로 유도 가능하다. 그러나 도착과정이 포아송과정이 아닌 일반 재생과정인 경우 정확한 해를 구하는 것이 쉽지 않다. 서비스시간의 경우 단위작업 시간의 분포에 따라 여전히 식 (6) 또는 (9)로 표현할 수 있다. 그러나 도착과정의 포아송 가정이 깨지면서 $M/G/1$ 의 일반해를 사용할 수 없게 된다. 도착과정이 일반 재생과정, 즉 도착간격이 일반적인 연속분포 $F(\cdot)$ 을 따르는 대기행렬시스템

을 $GI/G/1$ 이라 하며 이론적인 평균대기시간의 계산이 가능하다^[1, 7]. 그러나 복잡한 변환형태로 주어지는 공식을 계산하는데 있어 어려움이 따르므로 근래에는 계산의 편의상 근사해법을 주로 사용한다. 대표적인 $GI/G/1$ 의 대기시간에 대한 근사해법으로는 Kingman의 근사해^[5]가 있으며 다음과 같이 계산된다.

$$W_{q,GI/G/1} \approx \frac{\lambda [Var(\tau_a) + Var(S)]}{2(1-\rho)} \tag{10}$$

여기서 λ 는 평균 도착률이며 τ_a 는 도착간격을 나타내는 확률변수를, $\rho = \lambda E(S)$ 를 가리킨다. 이외에도 확산 근사법 등의 여러 가지 근사해법이 존재한다^[1]. 식 (8)에서와 마찬가지로 체제시간은 대기시간과 서비스시간의 합으로 계산되므로 다음이 성립한다.

$$W_{GI/G/1} \approx W_{q,GI/G/1} + E(S) \tag{11}$$

3.4 시뮬레이션 분석

실제 시스템을 분석함에 있어 선행 업무의 모든 작업이 완료된 이후 다음 업무가 시작된다는 가정은 항상 성립할 수 없다. 이 가정이 성립하지 않으면 정확한 이론적 해를 구하는 것이 매우 어려워진다. 물론 단위작업에 대해 $M/M/1$ 시스템을 가정하는 경우 이론적인 해를 구할 수 있으나 본 논문에서는 추후 연구과제로 남겨두도록 하겠다. 대신에 본 논문에서는 시뮬레이션 모델을 이용하여 해당 시스템을 분석하는 방법을 제안한다.

먼저 AND 구조의 단위작업이 동시에 시작되는 경우의 시뮬레이션 알고리즘을 순서대로 나타내면 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 모든 단위작업은 동시에 시작되며 이들이 모두 종료되어야 서비스가 종료된 것으로 판단하고 체제시간과 서비스시간을 계산한다. 본 시뮬레이션 알고리즘은 앞서 분석한 결과를 검증하기 위한 수단으로 사용 가능하며 단위작업의 수가 많아져 이론적 해를 계산하기 힘든 경우에도 활용할 수 있다.

다음으로 Fig. 4는 AND 구조에서 선행 업무의 모든 단위작업이 끝나지 않더라도 자신의 차례가 되면 해당 단위작업을 시작하는 경우에 대한 시뮬레이션 알고리즘이다. 즉, 모든 단위작업을 동시에 시작한다는 가정이 없는 상황이다. 사실 이러한 경우 대기시간과 서비스시간에 대한 개념이 모호해 지지만 본 논문에서는 각각을 다음과 같이 정의하였다. 먼저 대기시간은 업무가 도착하여 처음 단위작업을 수행할 때까지의 시간으로 정의하는 것이 무

난할 것으로 판단된다. 이에 따라 서비스시간은 처음 단위작업의 시작시점부터 마지막 단위작업의 종료시점까지로 구분할 수 있다. Fig. 4의 ‘Departure’ 직전 프로세스가 이들을 계산하는 과정이다. 또한 Fig. 4에서 ‘Activity 2’부터 Activity n 까지의 프로세스는 ‘Activity 1’의 그것과 동일하다.

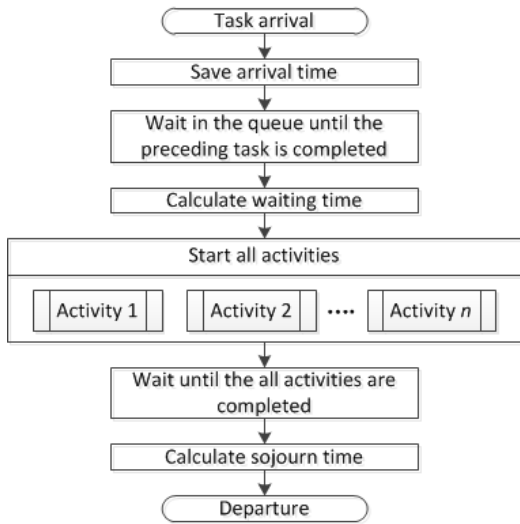


Fig. 3. Simulation flowchart of a task in the AND structure that starts activities simultaneously

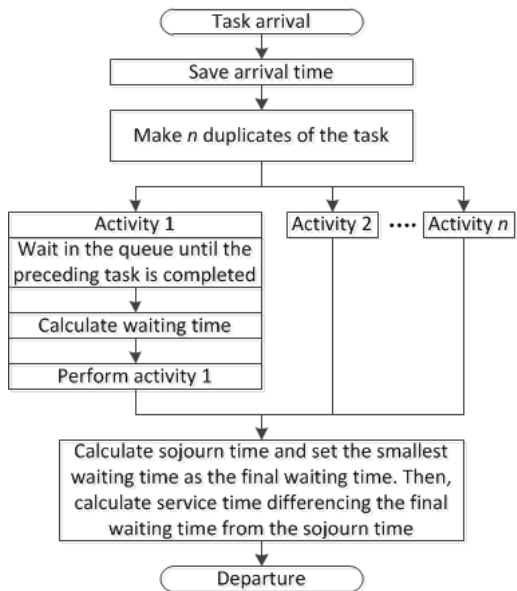


Fig. 4. Simulation flowchart of a task in the AND structure that starts activities in order

4. 계산예시 및 시뮬레이션

4.1 시스템 구성

본 절에서는 앞서 제시한 이론적 해의 검증과 시스템 확장을 위해 가상의 시스템을 구성하여 이론적 해를 찾아보고 확장된 버전에 대한 시뮬레이션을 수행한다. 본 논문에서는 먼저 Table 1에서 제시된 바와 같이 네 개의 가상 시스템을 구성하였다. Table 1에 제시된 시스템 1과 2는 각 단위작업이 전형적인 $M/M/1$ 시스템들로 구성되어 있다. 시스템 3의 경우 서비스분포가 일반분포인 $M/G/1$ 시스템이며, 시스템 4는 도착과정까지 일반화된 $GI/G/1$ 시스템으로 구성하였다. 각 분포에 사용되는 모수들은 지수분포의 경우 도착률(λ) 또는 서비스율(μ_i)을 나타내며, Erlang 분포에 사용된 두 번째 모수도 동일한 의미이다. 모수로 사용된 수치들은 각 시스템이 안정상태에 도달할 수 있는 조건, 즉 1미만의 서버이용률을 만족하는 수치들로서 경험적 방법에 의해 도출하였다.

식 (6)에 의하면 $M/G/1$ 형태로 분석되는 시스템 1과 2의 서비스시간에 대한 분포함수는 각각 다음과 같이 유도된다.

$$F_1(s) = (1 - e^{-2.3s})^3, (s > 0)$$

$$F_2(s) = (1 - e^{-2.0s})(1 - e^{-2.3s})(1 - e^{-2.5s}), (s > 0)$$

또한 식 (9)에 의하면 $M/G/1$ 또는 $GI/G/1$ 형태로 분석되는 시스템 2와 3의 서비스시간 분포함수는 다음과 같이 동일하게 유도된다.

Table 1. Experimental systems for AND structure

| System | Interarrival distribution | Activities | |
|--------|---------------------------|------------|---|
| | | n | distributions |
| 1 | expo(1) | 3 | $X_i's \sim \text{expo}(2.3)$ $X_i's$ are IID |
| 2 | expo(1) | 3 | $X_1 \sim \text{expo}(2.0)$ $X_2 \sim \text{expo}(2.3)$ $X_3 \sim \text{expo}(2.5)$ |
| 3 | expo(1) | 2 | $X_1 \sim \text{expo}(2.0)$ $X_2 \sim \text{erlang}(2, 2.5)$ |
| 4 | erlang(2, 2) | 2 | $X_1 \sim \text{expo}(2.0)$ $X_2 \sim \text{erlang}(2, 2.5)$ |

$$F_{3,4}(s) = (1 - e^{-2.0s}) [1 - (1 + 2.5s)e^{-2.5s}], (s > 0)$$

유도된 분포함수로부터 계산된 서비스시간의 평균과 2차 모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(S_1) &= 0.7971, E(S_1^2) = 0.8927 \\ E(S_2) &= 0.8187, E(S_2^2) = 0.9476 \\ E(S_{3,4}) &= 0.9543, E(S_{3,4}^2) = 1.2515 \end{aligned}$$

여기서 모든 시스템의 평균도착률이 1이므로 서비스시간의 평균은 서버이용률인 $\rho = \lambda E(S)$ 와 동일해진다. 다음 절에서는 이 시스템들을 대상으로 대기행렬모형 분석에 의해 대기시간과 체제시간을 계산하고 시뮬레이션 결과를 통해 이를 검증한다. 또한 단위작업의 동시시작 가정을 제거한 경우의 결과를 보이고 그 중 시스템 1, 2의 결과와 기존연구의 결과를 비교해 보도록 한다. 시뮬레이션은 정확성을 기하기 위해 transient period를 100,000 단위 시간, 수행시간을 1,000,000 단위시간으로 설정하여 100회 독립반복 수행하였다.

4.2 이론결과 및 시뮬레이션결과

앞 절의 Table 1에 구성된 세 가지 AND 구조 시스템에 대해 단위작업의 동시시작 가정하에서의 평균대기시간과 평균체제시간을 이론적으로 계산한 결과와 시뮬레이션 수행결과를 정리해보면 Table 2와 같다. Table 2의 시뮬레이션 결과는 Fig. 3의 알고리즘에 의한 결과이다. Table 2에서 W_q 와 W 는 3장에서 정의된 바와 같이 각각 평균대기시간과 평균체제시간이며 RE(relative error)는 상대오차 또는 백분율 오차의 절대치로서 이론적 결과에 대한 시뮬레이션 결과의 오차율을 의미한다.

오차율의 결과로 볼 때 본 논문에서 제시한 분석방법 및 그 결과가 타당하다는 것을 확인할 수 있다. 시스템 3의 경우 서버이용률이 0.9543으로 매우 높기 때문에 시스템 1과 2에 비해 상대적으로 오차가 큰 것으로 판단된다. 또한 GI/G/1 형태인 시스템 4의 경우 오차가 현저히 높게 나타나는데 이는 이론치가 근사해법에 의한 결과이기 때문이다. 본 논문에서 수록하지 않은 별도의 실험결과들을 종합해 본 결과 서버이용률이 1에 근접할수록 이론적 근사해는 참값에 근접하며 그 값이 작을수록 오차가 커진다는 것을 확인하였다. 이는 식 (10)을 유도하는 과정^[5]에서 확인할 수 있는 당연한 결과이다.

Table 3은 단위작업 동시시작 가정이 없는 시스템에

대한 평균대기시간, 평균서비스시간, 그리고 평균체제시간을 정리한 표이다. 이 표에 제시된 시뮬레이션 결과는 Fig. 4에 제시된 알고리즘을 수행한 결과이다. 앞서 언급한 바와 같이 동시시작 가정이 없는 경우는 대기시간과 서비스시간에 대한 분석이 큰 의미가 없다. 그러나 시스템을 대기행렬모형으로 분석한 이상 이들에 부합하는 정의를 내리고 그 값을 구하는 것도 학문적인 의미가 있다고 판단되어 수록하였다. 가장 우측 열은 Truong et al.의

Table 2. Numerical results for experimental systems with assumption

| Sys. | Performance measure | Analytical result* | Simulation result* | RE (%)** |
|------|---------------------|--------------------|--------------------|----------|
| 1 | W_q | 2.1998 | 2.2022 | 0.11 |
| | W | 2.9969 | 2.9994 | 0.08 |
| 2 | W_q | 2.6137 | 2.6129 | 0.03 |
| | W | 3.4324 | 3.4316 | 0.02 |
| 3 | W_q | 13.6988 | 13.6593 | 0.29 |
| | W | 14.6531 | 14.6135 | 0.27 |
| 4 | W_q | 9.2030 | 8.5840 | 6.73 |
| | W | 10.1573 | 9.5383 | 6.09 |

*Rounded to the fourth decimal place

**Rounded to the second decimal place

Table 3. Simulation results for experimental systems without assumption

| Sys. | Performance measure | Simulation result* | Result from Truong et al.* |
|------|---------------------|--------------------|----------------------------|
| 1 | W_q | 0.0758 | - |
| | $E(S)$ | 1.2560 | - |
| | W | 1.3318 | 1.4103 |
| 2 | W_q | 0.0788 | - |
| | $E(S)$ | 1.3474 | - |
| | W | 1.4262 | 1.5071 |
| 3 | W_q | 0.4122 | - |
| | $E(S)$ | 2.9101 | - |
| | W | 3.3223 | - |
| 4 | W_q | 0.2180 | - |
| | $E(S)$ | 2.2085 | - |
| | W | 2.4265 | - |

*Rounded to the fourth decimal place

기존연구^[11]에서 제시한 방법으로 계산한 결과를 나타낸다. 기존연구결과로는 단위작업이 $M/M/1$ 인 경우에 대해서만, 그리고 평균체제시간만을 구할 수 있으므로 네 시스템 중 시스템 1과 2에 대한 평균체제시간을 계산하여 수록하였다. 수록된 결과에 의하면 시뮬레이션 결과에 대한 기존연구결과의 오차율이 각각 약 5.9%와 5.7%인 것으로 계산된다. 본 논문에 수록하지 않은 여러 실험 결과들을 종합해 볼 때, 서버이용률이 작아질수록 기존연구결과의 오차는 커지며 커질수록 오차가 작아지는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 2장에서 언급했던 바와 같이 기존연구 결과는 서버이용률이 충분히 클 때 해당 시스템에 대한 근사해로 사용가능할 것이다.

5. 결 론

본 논문에서는 대기행렬모형을 이용하여 워크플로우의 AND 구조에 대해 시간분석을 수행하였다. 먼저 기존연구에서 제시된 결과를 고찰하고 그 한계점과 확장 가능성을 제시하였다. 각 업무에 대한 모든 단위작업이 동시에 시작된다고 가정한다면 AND 구조 시스템은 $M/G/1$ 또는 $GI/G/1$ 시스템으로 해석이 가능해진다. 이를 토대로 평균대기시간과 평균체제시간을 분석하였으며 단위작업의 동시시작 가정이 없는 경우에 대한 시뮬레이션 모델링 방법론을 제시하였다. 마지막으로 가상의 시스템을 구성하여 이를 제안된 분석방법대로 계산하고 시뮬레이션 수행결과와 비교하여 검증하였다. 또한 시뮬레이션 결과를 통해 기존연구의 활용 가능성을 검토하였다.

본 연구는 워크플로우의 AND 구조를 특정 가정 하에서 분석하여 해를 도출하였으나 가정이 없는 경우에 대해서는 시뮬레이션 방법론만을 제안하였다. 물론 가정이 없는 경우에 대해서 기존연구의 결과를 활용할 수 있겠지만 정확한 분석을 위해서는 가정이 없는 경우에 대한 이론적 분석을 시도하는 것도 의미 있는 연구라 할 수 있겠다. 또한 본 연구는 단편적인 AND 구조만을 분석하였으나 이를 토대로 전체 워크플로우 시스템을 대기행렬 네트워크로 보고 분석하는 연구도 필요할 것이라 판단된다.

References

1. Lee, H.W., Queueing Theory: Stochastic Process Approach, 3rd Edition, Sigma Press, Seoul, pp. 495-876, 2006.
2. Burke, P.J., "The output of a queueing system", Operations Research, Vol. 4, No. 6, pp. 699-704, 1956.
3. Chang, D.-H., Son, J.H., Kim, M.H., "Critical path identification in the context of a workflow", Information and Software Technology, Vol. 44, pp. 405-417, 2005.
4. Jeong, K.-Y., Cho, H., Phillips, D.T., "Integration of queueing network and IDEF3 for business process analysis", Business Process Management Journal, Vol. 14, No. 4, pp. 471-482, 2008.
5. Kingman, J.F.C., "The single server queue in heavy traffic", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 57, pp. 902-904, 1961.
6. Li, H., Yang, Y., "Dynamic checking of temporal constraints for concurrent workflows", Electronic Commerce Research and Applications, Vol. 4, pp. 124-142, 2005.
7. Marshall, K.T., "Some inequalities in queueing", Operations Research, Vol. 16, pp. 651-665, 1968.
8. Reijers, H.A., van der Aalst, W.M.P., "The effectiveness of workflow management systems: Predictions and lessons learned", International Journal of Information Management, Vol. 25, pp. 458-472, 2005.
9. Son, J.H., Kim, M.H., "Improving the performance of time-constrained workflow processing", The Journal of Systems and Software, Vol. 58, pp. 211-219, 2001.
10. Son, J.H., Kim, J.S., Kim, M.H., "Extracting the workflow critical path from the extended well-formed workflow schema", Journal of Computer and Systems Sciences, Vol. 70, pp. 86-106, 2005.
11. Truong, N.K.V., Choi, Y., Kim, I., Shin, S., Hwang, W.J., "A Probabilistic Approach to Workflow Time Analysis for Business Process Management", International Journal of Human and Social Sciences, Vol. 5, No. 12, pp. 811-815, 2010.
12. Zhuge, H., Cheung, T., Pung, H., "A timed workflow process model", The Journal of Systems and Software, Vol. 55, pp. 231-243, 2001.



박진수 (jsf001@yongin.ac.kr)

1998 성균관대학교 산업공학과 학사

2000 성균관대학교 산업공학과 석사

2008 성균관대학교 산업공학과 박사

2008~2012 성균관대학교 시스템경영공학과 박사후연구원

2013~현재 용인대학교 경영정보학과 조교수

관심분야 : 시뮬레이션 방법론, 대기행렬시스템 분석, 시계열 예측