East Asian Math. J.
Vol. 30 (2014), No. 4, pp. 571-581
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.037

부등식의 풀이에 대한 연구

On the Thought about How to Solve the Inequality

김 동 화 · 이 민 정* · 이 양

ABSTRACT. Students might find different solutions to the quadratic inequalities according to the range of the number representing the character of the inequalities. They have confusion when the roots of a quadratic inequality are complex numbers since the character of the inequalities generally represents the real number in the mathematics textbooks. Therefore we suggest that we must explain definitely the range of the number representing the character for each inequality question.

Ⅰ. 서론

<그림 1>에서 제시된 부등식 문제에 대한 풀이는 <그림 2>의 풀이와는 차이가 있음을 관찰할 수 있다. <그림 2>는 고등학교 교과서 황우형 외(2013)에 제시된 문제이다.

<그림 1>의 부등식 문제의 정답은

$$x = 1 + bi \ (i = \sqrt{-1},\ b\text{는 } 0\text{이 아닌 임의의 실수})$$

이지만 x를 실수 범위에서만 구하면 “해가 없다”가 답이 된다.

하지만 x가 실수라는 조건은 문제에 없다. 만약에 부등식을 풀 때 실수 범위에서 푼다는 말이 있다면 문제가 없겠으나, 방정식 단원에서 복소수 범위까지 근을 구하고 그 다음의 부등식 단원에서 실수 범위까지 근을 구하는 문제에 대해 학생들은 분명 혼란을 겪을 것이다. 2009학년도 개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)의 수학 Ⅰ 교과서에는 부등식에서 허수에 대해서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함되는 문자는 모두 실수를 나타낸다고 하였다. (김원경 외, 2014, p.93 ; 우정호 외, 2014, p.118 ; 이준열 외, 2014, 천재교육, p.106; 이강섭

* 교신저자

2010 Mathematics Subject Classification: 97B40
Key Words: 이차부등식, 해, 복소수, 실수

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

외, 2014, p.112)

그러므로 <그림 2>의 황우형 외(2013)의 이차부등식 문제 및 풀이는 문맥상

$(x-1)^2<0$를 풀어라.

(풀이)

$x=a+bi(a,b\text{는 실수}, i=\sqrt{-1})$라 두고 풀면

$(a-1+bi)^2=(a-1)^2-b^2+2(a-1)bi<0$

이기 위해서

$a=1$ 또는 $b=0$이어야 허수부가 0이 된다.

$b=0$이면 $(x-1)^2>0$이어서 모순이므로

$x=1+bi(i=\sqrt{-1}$, b는 0이 아닌 임의의 실수)

일 때 주어진 부등식의 해가 된다.

<그림 1> 복소수 해를 가지는 부등식 문제

오류는 없으나, 복소수 단원 이후, 방정식 단원을 배우고 부등식 단원을 배움으로써 학생들은 근의 범위를 복소수 전체 범위로 확대해서 해석할 수 있으며 부등식의 근이 허수가 되는 위와 같은 문제가 생길 수 있다.

먼저, 허수들 사이에서는 대소 관계를 생각하지 않지만 $a+bi$ (여기서 a,b는

다음 이차부등식을 풀어라.

$$x^2+x+1\le 0$$

(풀이) 이차방정식 $x^2+x+1=0$에서

$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$

이고 x^2의 계수가 양수이므로

$x^2+x+1\le0$의 해는 없다.

<그림 2> 황우형 외(2013)의 이차부등식 문제 및 풀이

실수)의 크기인 $\sqrt{a^2+b^2}$로써 대소 관계를 부여할 경우에는 부등식에서도 허수의 사용을 고려할 수도 있다.

<그림 1>의 부등식 문제에는 문자가 실수를 대표하느냐 또는 복소수 범위까

지 포함하느냐에 따라서 답과 풀이가 달라진다. 그러므로 실수 범위에서 부등식을 다루는 이유 및 문자가 대표하는 수의 범위를 정확히 제시해야 할 필요가 있을 것이다.

본 연구에서는 학생들에게 이와 같은 혼란이 생기는 것을 방지하기 위하여 복소수를 배운 후, 이차방정식과 삼사차방정식, 그리고 이차부등식을 배우는 우리나라의 교육과정과 일본, 영국, 미국과 같은 외국의 교육과정을 비교해 보고, 각각의 부등식 문제 제시 방법을 분석한 결과를 토대로 하여 2009년 개정 교육과정의 부등식 문제에서 수의 범위를 정확하게 명시하는 방법을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 부등식의 정의와 부등식 풀이

두산백과(2013)은 일반적으로 부등식이란 실수의 집합에 속하는 2개의 원소 a, b의 대소(大小)의 순서관계를 나타내는 것으로 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$로 연결한 순서관계를 나타내는 식 $a<b$, $a>b$, $a \geq b$, $a \leq b$를 가리킨다고 하였다. 이 정의에 의하여 일반적으로 부등식의 모든 문자가 실수를 대표한다고 볼 수 있기 때문에 이차부등식을 풀 때 실수 범위 내에서 풀라는 조건이 없어도 <그림 2>와 같이 풀 수 있을 것이다.

하지만 특수한 경우에 이차부등식 단원 이전의 이차방정식의 근의 공식을 활용하는 과정에서 $x^2+ix-1=0$ $(i=\sqrt{-1})$을 풀라는 문제에서 근은 $x=\dfrac{-i \pm \sqrt{i^2+4}}{2}$ 이 되며, 판별식 $D=i^2+4=3>0$이므로 두 개의 서로 다른 실근을 가져야 하지만 복소수 계수 방정식에서는 근의 공식은 성립하나 판별식은 성립하지 않는다는 것을 보일 때 허수가 포함된 부등식을 사용하기도 한다.

2009 개정 교육과정에서 복소수와 이차방정식 이후 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식 순서로 수업이 진행되도록 교육과정에 편성되어 있다. 고등학교 1학년 교과서(황선욱 외, 2014)에서 이차방정식에서는 복소수 범위에서 인수분해 하라고 하고, 여러 가지 방정식에서 풀라고 할 때 특별한 언급이 없어도 복소수 범위까지 해를 구하도록 예시 문제에 제시되어 있다.

Hall과 knight(1891)은 영국에서 대학교 공부를 위한 기초 대수 교과서에서 복소수 단원을 공부한 후 이차방정식 단원에서 근의 공식을 통해 근이 2개 이상 나오지 않는다는 내용으로 복소수 범위에서 근을 구하고 있었다. 그 후 이차부등식 단원을 제시하는데, 우리나라 교과서와 비슷한 형태로, 문제마다 문자가 모든 실수를 대표한다고 언급하지는 않았고, "현재 단원에서 문자는 실수이면서 양수라고 항상 가정한다"는 것을 단원 처음 부분에 제시하고 있었다.

2. 문자가 복소수를 나타내는 부등식의 풀이

복소수 범위에서 부등식의 해를 구할 경우 좌표 평면이 복소평면으로 변하게 되므로, 이러한 내용은 고등학교 복소수 단원에 보충적으로 제시될 수도 있을 것이다.

허유정(2002)에 따르면 일본 교육과정에서는 이차부등식을 고등학교 1학년 때 필수 과정으로 다루고 복소평면을 고등학교 2학년 선택 과정에서 다루고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 <Ⅳ. 결과 분석 및 논의>의 <1. 2009년 개정 교육과정과 일본 교육과정의 분석>에서 허유정(2002)의 일본의 2002년 교육과정의 단원 순서를 자세히 다루기로 한다.

우리나라 고등학교 교육과정에서는 복소수 단원을 이차부등식 단원보다 먼저 배우기 때문에 부등식 문제가 자연스럽게 복소수 단원과 연결하여 복소수 범위에서 활용될 수 있으며, 실제로 복소수 단원에서 황선욱 외(2014)는 <그림 3>과

복소수 $z=x(2-i)+3(-4+i)$에 대하여 z^2이 음의 실수가 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.
<그림 3> 복소수의 제곱이 음의 실수가 되는 실수 x를 구하는 문제

같은 문제를 제시하고 있다. 따라서 수학 Ⅰ 교과서의 복소수 단원에서 허수가 포함된 부등식을 다루고 있다고 볼 수 있다. 그러므로 부등식에서 문자가 나타내는 것이 반드시 실수라는 조건은 정확하지 않을 수 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 제한점

2009년 개정 교육과정에 입각하여 만들어진 우리나라 수학 Ⅰ교과서와 허유정(2002)이 제시한 일본 교육과정에 입각한 수학 B, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ 교과서를 대상으로 이차 부등식 단원과 복소수 단원, 이차 방정식 단원의 위계를 살펴본다. 그리고 최근의 문부성(2009)과 영국 자격 인증 및 교육 과정원(2007)과 미국 Janet Lundin et al. (2006)의 California Department of Education의 수학과 교육과정 속에서 복소수와 이차부등식의 단원 위계를 살펴본다.

그리고 우리나라 2014년 수학 Ⅰ교과서(김원경 외, 2014, p.93 ; 우정호 외, 2014, p.118 ; 이준열 외, 2014, p.106; 이강섭 외, 2014, p.112)들 속에서 부등식에 사용된 문자가 나타내는 수를 명시하는 방법을 살펴본다.

본 연구에서는 몇 개의 외국의 교육과정과 국내의 교과서를 대상으로 분석하였으므로 분석결과를 일반화하는 데에는 다소 한계가 있다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 2009년 개정 교육과정과 일본 교육과정의 분석

2009년 개정 교육과정 수학 Ⅰ 교과서에는 복소수, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 이차 부등식의 순서로 교과서 구성이 이루어지고 있었다. 여러 가지 방정식 단원에서 허근까지 근을 구하다가 이차 부등식에서는 실수 범위에서만 근을 구하고 있었으며, 허수는 대소 관계가 없기 때문에 부등식의 모든 문자는 실수를 대표한다고 되어 있었는데 교과서에 따라서 작은 글씨로 되어 있거나 부등식 단원 서두에 언급되어 있었다(김원경 외, 2014, p.93 ; 우정호 외, 2014, p.118 ; 이준열 외, 2014, p.106; 이강섭 외, 2014, p.112). 이는 일반적인 모든 시중에 유통되어 있는 문제집, 대학 교재, 연구 서적 등에서도 이차부등식 문제의 문자는 항상 실수라는 것을 의미한다고 학생들이 받아들이도록 한다. 하지만 본 연구에서의 문제 상황에서는 이차부등식의 문자가 항상 실수를 나타낸다는 것이 일반화될 수 없음을 살펴 볼 수가 있어

Ⅱ. 방정식과 부등식(고등학교 1학년)
1. 복소수와 이차방정식
1) 복소수
2) 이차방정식의 판별식
3) 이차방정식의 근과 계수와의 관계
2. 이차방정식과 이차함수
1) 이차방정식과 이차함수
2) 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
3) 이차함수의 최대, 최소
3. 여러 가지 방정식
1) 이차방정식과 사차방정식
2) 연립방정식
4. 여러 가지 부등식

1) 절댓값 기호를 포함한 일차부등식
2) 이차부등식

<그림 4> 2009년 교육과정 수학 Ⅰ 방정식과 부등식 단원 순서

수학 Ⅰ(고등학교 1학년)

(1) 이차함수
가. 이차함수의 그래프
(가) 함수와 그래프
(나) 이차함수와 그 그래프
나. 이차함수의 값의 변화
(가) 이차함수의 최대, 최소
(나) 이차방정식과 이차부등식

수학 B(고등학교 2학년)

(2) 복소수와 복소평면
가. 복소수와 방정식의 근
(가) 복소수와 그의 연산
(나) 이차방정식의 근
(다) 간단한 고차방정식
나. 복소수 평면
(가) 복소수의 그림표시
(나) 드므와브르의 정리

<그림 5> 일본의 2002년 교육과정의 단원 순서

개선이 요구가 된다.

<그림 4>는 2009년 개정 교육과정에 따르는 수학 Ⅰ의 단원 순서이다.

<그림 5>는 허유정(2002)에 제시된 일본의 2002년 수학 교육과정이다. 일본의 교육과정에 보면, 복소수는 고등학교 교육과정인 수학 B가 2학년 선택과목인데 복소수 단원이 포함되어 있고 수학 Ⅱ가 1학년 필수과목인데 이차부등식 단원이 포함되어 있음을 알 수 있다. 여기서는 이차부등식 단원을 학습한 후 복소수 단원을 선택해서 학습하고 있음을 주목해 볼 만 하다.

2. 최근 일본, 영국, 미국의 방정식, 부등식 관련 교육과정의 분석

NCIC(국가교육과정 정보센터)(2013)에서는 일본 문부성(2009)과 영국 자격 인증 및 교육 과정원(2007)과 Janet Lundin, et al. (2006)의 미국 California 수학 교육과정 등의 수학과 세계 교육과정을 제시하고 있다.

일본 문부성(2009)은 고등학교 학습 지도 요령에서 수학 Ⅰ에서 이차함수의 그래프를 배우고 이차방정식, 이차부등식을 그래프를 이용하여 풀도록 배우고 있었으며, 다음 단계인 수학 Ⅱ에서 복소수를 배우고 있었다.

영국 자격 인증 및 교육 과정원(2007)은 고등학교에서 수와 대수학에서 실수와 그 성질을 배우고, 계산을 배우고, 일차, 이차 함수와 방정식을 실생활 상황에서 이해하도록 배우고 있었다. 영국 자격 인증 및 교육 과정원(2007)은 복소수와 이차부등식에 대한 언급은 하지 않고 있었다.

Janet Lundin, et al. (2006)은 미국 California 수학과 교육과정에서 Algebra Ⅰ에서 일차부등식을 배우고, Algebra Ⅱ 에서 복소수를 배우고 나서 이차함수를 배우고 고차방정식 풀이를 배우고 있었다. Janet Lundin, et al. (2006)은 이차부등식에 대한 언급은 하지 않고 있었다.

3. 2009 개정 교육과정의 방정식과 부등식 단원의 위계에 대한 고찰

우리나라 수학 Ⅰ에서는 이차방정식의 판별식을 이용해 이차함수의 그래프를 통해 이차부등식의 근의 범위를 구하고 있으므로 판별식 이후에 이차함수의 그래프를 학습한 후, 이차방정식을 학습하고, 그 이후에 이차부등식을 학습해야 했다. 복소수 단원 이후에 허근의 개념을 통해 판별식을 배우면 판별식의 이해를 도울 수 있다.

하지만 복소수를 배우지 않아도 이차함수의 꼭짓점 좌표와 아래로 볼록과 위로 볼록 등의 개념을 통해 이차함수의 그래프를 그릴 수 있고 판별식과의 관계도 이해할 수 있다. 일본의 교육과정에 보면, 이차함수의 그래프와 이차방정식, 이차부등식을 복

다음 부등식을 풀어라. $x-1<0$ (풀이) $x=a+bi(i=\sqrt{-1},\ a,b$는 실수)라 두면 $x-1=a+bi-1=(a-1)+bi<0$일므로 $b=0$이고 $a<1$이다. 그러므로 $x=a<1$가 답이 되어 정답은 $x<1$이다.
<그림 6> 문자가 복소수를 나타낼 때 일차부등식의 풀이

소수 배우기 전에 다루고 있다.

우리는 이차부등식을 풀이하는 방법을 인수분해와 근의 공식과 이차함수의 그래프를 실수 좌표 평면에서 활용하여 실수 범위에서 학생들에게 지도할 수 있다고 생각한다.

일차 부등식의 문제의 경우 <그림 6>의 문자가 복소수를 나타낼 때 일차부등식의 풀이를 보면, 실수 범위에서 푼 경우와 정답에 차이가 없다.

그러므로 복소수 단원 이전에 이차 부등식 단원을 도입하는 것도 효과적일 것이다. 본 연구의 일본의 사례에서 단원의 순서가 우리와 달리 복소수를 이차부등식 단원 이전에 다루고 있지 않아서 이차부등식 단원을 학습할 때 학생들이 복소수의 존재를 모르고 이차함수의 그래프 이후에 배우기 때문에 이차부등식의 문자가 실수를 의미한다는 것을 문제마다의 별도의 언급이 없었어도 학습에 무리가 없었다. 본 연구의 영국과 미국의 경우 이차함수의 그래프는 다루어도 이차부등식에 대한 언급은 별도로 없었기 때문에 우리나라와 같은 이차부등식의 문자가 나타내는 수의 범위에 대한 문제가 생기지 않았다.

우리나라에서도 복소수를 이차부등식 이후에 배우는 것도 하나의 해결책으로 볼 수 있다. 하지만 우리나라 상황에서는 기존의 교육 체계를 바꾼다는 것은 상당히 무리가 있으며, 학생에 따라 선행 학습이 되어 있는 상황도 있을 수 있다. 그리고 단원의 순서와 위계를 바꾸는 것이 근본적인 해결책이 되지는 않을 것이다. 부등식의 문자가 실수를 대표한다는 이유가 명백하지 않고 고등학교 수학 교과서에서 부등식의 문자가 실수를 대표한다고 약속을 해야 한다면 각 문제마다 문자가 실수를 나타낸다고 언급할 필요가 있다. 고등학교 교과서 내에서 현재 단원에서는 부등식의 문자는 별다른 언급이 없을 때 실수를 나타내는 것으로 약속한다고 설명할 필요도 있을 것이다. 이 때 중요한 것은 고등학교 교과서 내에서 부등식의 문자를 실수로 가정한 경우에만 적용되는 것이며, 다른 문제에서는 적용이 안 될 수 있다는 것을 명백히 해둘 필요가 있겠다.

4. 2009 개정 교육과정에의 이차부등식 단원의 문제점에 대한 고찰

<그림 7>은 문자가 실수를 나타낼 때 이차 부등식의 풀이를 제시한 것이다. x는 실수라는 조건이 있을 때 문제가 모순 없이 해결이 된다. 학생들의 입장에서 문제를 좀 더 자세히 설명하고 문자가 어떤 수 범위를 대표하는 것인지에 대해 언급을 하여 문자의 사용에 혼란이 없도록 해야 하는 것은 대수를 지도하면서 중요한 문제일 것이다.

앞에서 2006년, 2007년, 2009년의 미국, 영국 일본의 수학과 교육과정을 살펴 본 결과 우리나라 이차부등식과 복소수의 단원 위계와 차이점이 있는 것을 발견할 수 있었다. 다른 나라와 달리 우리나라는 이차함수의 그래프와 별도로 이차부등식 단원을 두면서 고등학교 1학년 때 복소수를 먼저 배우고 나서 이차부등식을 배우면서, 이차부등식을 풀 때에는 이차함수의 그래프만을 이용하여 복소근을 구하지 않고 있었다.

반면에 복소수 단원에서는 복소근을 가지는 부등식을 다루고 있었다(황선욱 외, 2014).

$(x-1)^2 < 0$ 를 풀어라(단, x는 실수). (풀이) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$에서 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times1=0$ 이고 x^2의 계수가 양수이므로 $(x-1)^2<0$ 의 해는 없다.
<그림 7> 문자가 실수를 나타낼 때 이차 부등식의 올바른 문제 및 풀이

이러한 점에서 교육과정이 다른 국가들과 차이가 있기 때문에 교육과정 단원 위계에 대한 재고가 필요하다고 볼 수도 있다. 하지만 단원 위계에 대한 단순한 조정이 근본적인 해결책이 아닌 것은 분명하므로 우리나라 현 교육과정 상의 단원의 위계는 그대로 두더라도 교과서 내의 이차부등식 문제를 제시하기 전에 문자가 이 단원에서는 실수를 대표한다는 것을 “허수가 대소를 생각할 수 없어서 부등식에 나타나는 문자는 모두 실수를 대표한다.”가 아니라 “현재 단원에서는 부등식에 나타나는 문자는 모두 실수를 대표하는 것으로 가정한다.”로 고쳐서 명시할 것을 제안한다.

V. 결론

복소수는 고등학교 1학년 때 처음 나오는 수의 범위이며 초등학교, 중학교에서 배웠던 수와는 성격이 다르고, 허수는 특히 눈에 보이지 않기 때문에 학생들은 복소수를 새롭게 공부를 해야 하는 입장이다. 그리고 이차방정식의 풀잇법도 중학교 때 배운 것과 달라진다. 왜냐하면 문자가 나타내는 수의 범위가 달라지기 때문이다.

어떤 문자는 실수를 대표하고, 어떤 문자는 복소수를 대표하는지 문제에서 명확히 설명해 주어야 학생들이 덜 혼란스러울 수 있다. 같은 문제를 두고 중학교에서와 고등학교에서, 대학교에서 풀이가 각각 다르다면 학생들은 매우 혼란스러울 것이다.

최근의 일본의 교육과정에서도 과거의 교육과정과 단원 제시 순서가 같았으며 영국의 교육과정에는 복소수를 다루지 않고 실수 범위에서 실생활 위주의 문제를 다루고 있었다. 그리고 최근 미국의 교육과정에서는 복소수를 배우고 이차함수의 그래프를 배우며 고차 방정식 풀이를 복소수 범위에서 배우고 있었다. 그렇기 때문에 이차부등식 단원에서 수의 범위에 대해 실수 범위라는 별도의 언급을 하지 않아도 문제가 없었다. 학생들이 아는 수의 범위가 실수밖에 없으므로 실수 범위에서 문제를 풀 것이다.

이상의 여러 분석 결과를 토대로 본 연구에서는 이차부등식 단원에서 “현재 단원에서는 이차부등식의 모든 문자는 실수를 대표하기로 가정한다.” 라는 문구를 단원 서두에 삽입하고, 그 이유에 대해 이차부등식의 문자가 복소수일 수도 있기 때문에 주어진 교과서의 주어진 단원에서만 가정한다고 설명하는 것을 근본적인 해결책으로 제시한다.

또는 외국의 사례를 볼 때, 실수 범위에서 이차함수의 그래프를 다루고 이차방정식, 이차부등식을 배운 후 복소수 단원을 배우는 형태로 현재 교육과정을 바꾸는 방법도 생각해 볼 수 있으나 이것은 근본적인 해결책은 될 수는 없다고 사료된다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정, 제2011-361호.
[2] 김원경 외 (2014). 수학 Ⅰ, (주)비상교육.
[3] 두산백과 (2013). 부등식, 네이버 지식백과사전.
[4] 문부성 (2009). 일본 고등학교 학습 지도 요령, 일본: 문부성.
[5] 우정호 외 (2014). 수학 Ⅰ, (주)두산동아.
[6] 이강섭 외 (2014). 수학 Ⅰ, ㈜미래엔.
[7] 이준열 외 (2014). 수학 Ⅰ, (주)천재교육.

[8] 자격 인증 및 교육과정원(2007). 영국 수학 4단계를 위한 연구 프로그램(2007 국가 교육과정에서 발췌함.), UK: Crown.
[9] 허유정 (2002). 한국과 일본의 수학 교육과정 비교와 연계성에 관한 연구-제7차 수학과 교육과정을 중심으로-. 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.
[10] 황선욱 외 (2014). 수학 Ⅰ,(주)좋은책 신사고.
[11] 황우형 외 (2013). 수학, ㈜ 미래엔.
[12] Hall, H. S, & Knight, S. R (1891). *Higher Algebra: A Sequel to Elementary Algebra*, London : MacMillan.
[13] Janet Lundin, et al. (2006). *Mathematics Framework for California Public Schools(Kindergarten Through Grade Twelve)*. America : California Departement of Education.
[14] NCIC(국가교육과정 정보센터)(2013). 세계교육과정, 서울: 교육과정평가원.

Kim, Dong Hwa
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 609-736 Korea
E-mail : dhgim@pusan.ac.kr

Lee, Min Jung
Gyeongnam Girls' High School
Pusan, 601-816 Korea
E-mail : nice1mj@nate.com

Lee, Yang
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 609-736 Korea
E-mail : ylee@pusan.ac.kr